FIMFA ENS Ulm — Mardi 12 juin 2006 — Durée : 3 heures

Examen final de géométrie différentielle

Documents et calculatrices interdits

Les deux problèmes ci-dessous sont indépendants.

Problème I L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne usuelle $||\cdot||$. On note $\mathbb{S}_n$ la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Soient M une variété différentielle C^∞ et k un entier positif non nul. Notons $X_k(M)$ l'ensemble des k-uplets de points deux à deux distincts de M.

(1) Montrer que $X_k(M)$ est une sous-variété de la variété produit M^k, et que pour $1 \leq i \leq k$, l'application $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_i$ de $X_k(M)$ dans M est une submersion C^∞.

(2) Soit n un entier positif non nul, montrer que si $k \geq 2$, alors l'ensemble des éléments $(x_1, \ldots, x_k)$ de $X_k(\mathbb{R}^n)$ tels que $\sum_{i,j=1}^{k} ||x_i - x_j||^2 = 1$ est une sous-variété C^∞ de $X_k(\mathbb{R}^n)$.

(3) Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ agit par permutation des composantes sur $X_k(M)$, et on pose $Y_k(M) = \mathfrak{S}_k \backslash X_k(M)$. Montrer qu'il existe une unique structure de variété différentielle C^∞ sur $Y_k(M)$ telle que la projection canonique $X_k(M) \to Y_k(M)$ soit une submersion C^∞.

(4) Soit n un entier positif non nul. Le groupe orthogonal $G = \mathrm{O}(n+1)$ agit sur $X_2(\mathbb{S}_n)$ par $(g, (x, y)) \mapsto (gx, gy)$. Montrer que toute orbite $\mathcal{O}$ de G dans $X_2(\mathbb{S}_n)$ est une sous-variété C^∞ de $X_2(\mathbb{S}_n)$, et qu'il existe un sous-groupe de Lie H de G tel que G/H et $\mathcal{O}$ soient C^∞-difféomorphes. Est-ce que H, à isomorphisme de groupes de Lie près, dépend de l'orbite $\mathcal{O}$?

(5) Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $s : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par $(x, y) \mapsto (x, y, 0, \ldots, 0)$, montrer que l'application $\sigma : \mathbb{S}_1 \to X_2(\mathbb{R}^n)$ définie par $x \mapsto (s(x), -s(x))$ est un C^∞-plongement. Pour tout entier positif ou nul p, calculer $H^p_{DR}(X_2(\mathbb{R}^n))$ et $H^p_{DR}(X_2(\mathbb{R}^n) - \sigma(\mathbb{S}_1))$.

Problème II Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie, d'espace vectoriel dual E^*, on rappelle qu'une forme bilinéaire alternée ou symétrique $f : E \times E \to \mathbb{R}$ est *non dégénérée* si l'application de E dans E^*, qui à $x \in E$ associe la forme linéaire $y \mapsto f(x, y)$, est injective ou, de manière équivalente, un isomorphisme.

On dit qu'une 2-forme différentielle ω sur une variété différentielle M de classe C^∞ est *non dégénérée* si pour tout x dans M, la forme bilinéaire alternée ω_x sur T_xM est non dégénérée.

On rappelle que si X est un champ de vecteurs C^∞ sur M, et si w est une $(p+1)$-forme différentielle C^∞ sur M avec $p \in \mathbb{N}$, alors $i_X w$ est la p-forme différentielle C^∞ sur M définie par

$$\forall\, x \in M, \ \ \forall\, X_1, \ldots, X_p \in T_xM, \quad (i_X w)_x(X_1, \ldots, X_p) = w_x(X(x), X_1, \ldots, X_p)\ .$$

Soient M une variété différentielle C^∞, et ω une 2-forme différentielle C^∞ non dégénérée sur M.

(1) Soit n un entier positif non nul. On suppose dans cette question que $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et on note $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées canoniques sur M. Montrer que

$$\Omega_n = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

est une 2-forme différentielle C^∞ non dégénérée et exacte sur M.

(2) Pour toute application $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs X_f de classe C^∞ sur M tel que

$$i_{X_f}\omega = -df \ .$$

(3) Si $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\omega = \Omega_n$, et $f : (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \mapsto \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + y_i^2$, calculer X_f.

(4) Montrer qu'une application $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ est constante sur chaque courbe intégrale de X_f.

(5) On suppose que $M = G$ est un groupe de Lie, et que ω est G-invariante (i.e. que $(L_g)^*\omega = \omega$ pour tout g dans G, où $L_g : x \mapsto gx$ est la translation à gauche sur G). Si $f : G \to \mathbb{R}$ est un morphisme de groupes de Lie, montrer que X_f est un champ de vecteurs invariant à gauche.

(6) Si f et g sont deux applications C^∞ de M dans $\mathbb{R}$, on appelle *crochet de Poisson*, et on note $\{f, g\}$, l'application $x \mapsto \omega_x(X_f(x), X_g(x))$ de classe C^∞. Montrer que

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \ ,$$
$$\{f, g\} = dg(X_f) = -\mathcal{L}_{X_g}(f) \ ,$$
$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g \ ,$$

cette dernière identité s'appelant l'*identité de Leibnitz.*

(7) Soient $f, g : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, montrer que g est constante sur les courbes intégrales de X_f si et seulement si $\{f, g\} = 0$.

(8) a) Pour tous les champs de vecteurs X, Y de classe C^∞ sur M, montrer, en commencant par les 0-formes différentielles et leurs différentielles, l'égalité suivante entre applications de $\Omega(M)$ dans $\Omega(M)$:

$$i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X \ .$$

b) On suppose que ω est fermée. Soient $f, g, h : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, montrer que

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$$

et que

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \ ,$$

cette dernière identité s'appelant l'*identité de Jacobi* du crochet de Poisson.