Géométrie Différentielle, Examen du 9 juin 2008, durée 3 heures

Documents et calculatrices interdits. Barême approximatif : 10,4,3,8. Les questions sont souvent indépendantes. Ne pas hésiter, quand on peine sur une question, à passer aux suivantes. Si une question vous semble suspecte, merci de le signaler.

1. Foire aux questions. Répondre par OUI/NON et donner une brève justification.

1– Un groupe fini est il un groupe de Lie ?

2– Soit G un groupe de Lie. L'espace vectoriel des formes différentielles invariantes à gauche sur G est-il de dimension finie ?

3– Cet espace est il stable par la différentielle extérieure ?

4– Soit $g \in SO(3)$. On note L_g (resp. R_g) la translation à gauche (resp. à droite) par g. Soient g, $h \in SO(3)$. Parmi les identités suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

$$(a)\ L_g \circ L_h = L_h \circ L_g, \quad (b)\ R_g \circ L_h = R_h \circ L_g, \quad (c)\ L_g \circ R_h = R_h \circ L_g.$$

5– Soit ξ un champ de vecteurs invariant à gauche sur $SO(3)$. Soit $t \mapsto \varphi_t$ son flot. S'agit-il de translations à gauche ?

6– Une forme différentielle invariante par translations sur $\mathbb{R}^n$ est elle exacte ?

7– Une forme différentielle invariante par translations sur $\mathbb{R}^n$ est elle la différentielle d'une forme invariante par translation ?

8– Trouver une 1-forme différentielle α sur $\mathbb{R}^2$ telle que $d\alpha = dx_1 \wedge dx_2$.

9– Soient α et β des 1-formes invariantes par translations sur le tore $T^n = \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{R}^n$, non proportionnelles. La 2-forme $\alpha \wedge \beta$ est-elle fermée ?

10– Soient α et β des 1-formes invariantes par translations sur le tore $T^n = \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{R}^n$, non proportionnelles. La 2-forme $\alpha \wedge \beta$ est-elle exacte ?

Solution :

1– OUI. C'est une variété de dimension 0 et un groupe. Sur une variété de dimension 0, toute application est différentiable, donc les axiômes des groupes de Lie sont vérifiés.

2– OUI. Une forme différentielle invariante à gauche est déterminée par sa valeur sur l'espace tangent en e. Par conséquent, la dimension de l'espace vectoriel des formes différentielles invariantes à gauche sur G est égale à la dimension de $\Lambda^{\cdot}\mathfrak{g}^*$, soit 2^n, si $n = \dim(G)$.

3– OUI. Etre invariant à gauche, c'est satisfaire $L_g^*\alpha = \alpha$. Alors $L_g^*(d\alpha) = d(L_g^*\alpha) = d\alpha$.

4– (a) est fausse en général (elle équivaut à $gh = hg$). (b) est fausse en général (elle entraîne $gh = hg$). (c) est vraie.

5– NON. Il s'agit de translations à droite, puisqu'elles commutent avec toutes les translations à gauche.

6– OUI, sauf en degré 0, puisque la cohomologie de $\mathbb{R}^n$ est nulle, sauf en degré 0.

7– NON. La différentielle d'une forme invariante par translation sur $\mathbb{R}^n$ est automatiquement nulle.

8– $x_1\,dx_2$ fait l'affaire.

9– OUI. Toutes les formes invariantes sur le tore, ou bien sur $\mathbb{R}^n$, c'est pareil, sont fermées. Soient α et β des 1-formes invariantes sur le tore $T^n = \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{R}^n$, non proportionnelles. La 2-forme $\alpha \wedge \beta$ est-elle exacte ?

10– NON. $\alpha \wedge \beta$ est non nulle, invariante, donc non nulle en cohomologie.

2. Action de $O(2)$ sur $P^1(\mathbb{R})$

On note $O(2)$ le groupe des matrices 2×2 orthogonales. Comme une matrice inversible envoie les droites vectorielles sur des droites vectorielles, le groupe $O(2)$ agit sur la droite projective.

1– Montrer que cette action est transitive.

2– Quel est le stabilisateur de la droite Ox d'équation $\{y = 0\}$?

3– Pourquoi ne peut-on en déduire que $O(2)$ a 4 composantes connexes ?

4– Existe-t-il un sous-groupe de Lie de $O(2)$ qui agit librement et transitivement sur la doite projective ?

Solution :

1– Soit D une droite, $\theta \in [0, \pi]$ l'angle de l'axe Ox avec D. Alors D est l'image de Ox par la rotation d'angle π, qui appartient à $O(2)$. Cela prouve que l'orbite d'un point est égale à toute la droite projective, donc que l'action est transitive.

2– Les rotations qui envoient l'axe Ox dans lui-même sont l'identité et la rotation d'angle π. Les symétries orthogonales qui envoient l'axe Ox dans lui-même sont la symétrie par rapport à Ox et la symétrie par rapport à son orthogonale, l'axe Oy. On trouve donc un stabilisateur à 4 éléments.

3– On sait que $O(2)$ a 2 composantes connexes, toutes deux difféomorphes au cercle. Rien n'empêche une application du cercle dans lui-même d'avoir des fibres à deux éléments. Par exemple, $z \mapsto z^2$.

4– Par l'absurde. Supposons qu'un tel sous-groupe H existe. Alors $H = \{e\} \setminus H$ est difféomorphe à $P^1(\mathbb{R})$, donc H est une sous-variété de dimension 1 de $O(2)$, donc c'est un ouvert. Mais un sous-groupe de Lie est aussi fermé. Donc H est une union de composantes connexes de $O(2)$. Celui-ci possède deux composantes connexes, et seule la composante contenant e, à savoir le groupe des rotations $SO(2)$, est un sous-groupe. On conclut que $H = SO(2)$. Or le stabilisateur de Ox dans $SO(2)$ a deux éléments. Contradiction.

3. Une construction en dimension 3

Soit X une variété compacte orientée de dimension 3. Soient α et β des 1-formes différentielles fermées sur X. Supposons que $\alpha \wedge \beta$ est exacte. Soit γ une 1-forme différentielle sur X telle que $d\gamma = \alpha \wedge \beta$. On pose alors

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = \int_X \alpha \wedge \beta \wedge \gamma.$$

1– Vérifier que $M(\alpha, \beta, \gamma)$ ne dépend pas du choix de la primitive γ. On le note désormais $M(\alpha, \beta)$.

2– Vérifier que $M(\alpha, \beta)$ ne dépend que des classes de cohomologie de α et de β.

3– Montrer que lorsque X est le tore T^3, pour tout choix de classes de cohomologie c et c' pour lesquelles le nombre $M(c, c')$ est défini, il est nul.

Solution :

1– Soit γ' une autre primitive. On calcule $d(\gamma \wedge \gamma') = (d\gamma) \wedge \gamma' - \gamma \wedge (d\gamma')$. La formule de Stokes donne

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta, \gamma') &= \int_X (d\gamma) \wedge \gamma' \\ &= \int_X d(\gamma \wedge \gamma') + \int_X \gamma \wedge (d\gamma') \\ &= \int_X \gamma \wedge (d\gamma) \\ &= \int_X (d\gamma) \wedge \gamma \\ &= M(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}$$

2– Soit $\alpha' = \alpha + d\eta$ un autre représentant de la classe de cohomologie de α. Alors $\alpha' \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + (d\eta) \wedge \beta = d(\gamma + \eta \wedge \beta)$, donc $\alpha' \wedge \beta$ est exacte, et on peut définir $M(\alpha', \beta)$. On peut d'ailleurs choisir $\gamma' = \gamma + \eta \wedge \beta$ comme primitive de $\alpha' \wedge \beta$. On calcule $d(\eta \wedge \beta \wedge \gamma) = (d\eta) \wedge \beta \wedge \gamma - \eta \wedge (d\beta) \wedge \gamma + \eta \wedge \beta \wedge (d\gamma) = (d\eta) \wedge \beta \wedge \gamma$, car

β est fermée et $d\gamma$ est divisible par β. La formule de Stokes donne

$$\begin{aligned}
M(\alpha',\beta) &= \int_X \alpha' \wedge \beta \wedge \gamma' \\
&= \int_X (\alpha + d\eta) \wedge \beta \wedge (\gamma + \eta \wedge \beta) \\
&= M(\alpha,\beta) + \int_X (d\eta) \wedge \beta \wedge \gamma + \int_X \alpha' \wedge \beta \wedge \eta \wedge \beta \\
&= M(\alpha,\beta) + \int_X d(\eta \wedge \beta \wedge \gamma) \\
&= M(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

Comme $M(\alpha,\beta) = -M(\beta,\alpha)$, il n'est pas nécessaire de faire la même vérification pour β.

3– On choisit, comme représentants des classes de cohomologie de degré 1 de T^3, des formes invariantes α et β. Si α et β ne sont pas proportionnelles, alors $\alpha \wedge \beta$ n'est pas exacte. Par conséquent, $M(\alpha,\beta)$ n'est définie que lorsque les classes de cohomologie de α et β sont proportionnelles, et alors $M(\alpha,\beta) = 0$.

4. Un groupe de Lie non commutatif.

On note G le sous-groupe du groupe linéaire $GL_3(\mathbb{R})$ formé des matrices triangulaires supérieures, avec des 1 sur la diagonale. On utilise comme système de coordonnées sur G le difféomorphisme $(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note ξ l'unique champ de vecteurs invariant à gauche sur G qui, en l'élément neutre e, coïncide avec le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x} = (1,0,0)$. De même, on note η le champ de vecteurs invariant à gauche sur G qui, en e, coïncide avec le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial y} = (0,1,0)$.

1– Soit g l'élément de G de coordonnées (a,b,c). Calculer l'expression, dans les coordonnées (x,y,z), de la translation à gauche L_g et de la translation à droite R_g.

2– Calculer ξ et η au point de coordonnées (x,y,z) de G.

3– Pour $g \in G$, soit $\mathcal{P}(g)$ le sous-espace vectoriel de T_gG engendré par $\xi(g)$ et $\eta(g)$. Le champ de plans $\mathcal{P}$ est-il tangent à un feuilletage ?

4– Trouver une 1-forme différentielle invariante à gauche sur G dont le noyau est $\mathcal{P}$. Calculer son expression en coordonnées. Calculer sa différentielle extérieure.

5– Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des 1-formes différentielles invariantes à gauche sur G ? En donner une base, exprimée en coordonnées. Lesquelles sont fermées ?

6– Soit Γ le sous-groupe de G formé des matrices à coefficients entiers. Montrer que l'espace quotient $X = \Gamma \setminus G$ est une variété compacte orientée. Vérifier que les formes différentielles invariantes à gauche de G descendent en des formes différentielles sur X.

7– Trouver des 1-formes différentielles fermées α et β sur X telles que l'invariant $M(\alpha, \beta)$ de l'exercice 3 est défini et non nul.

8– Montrer que X n'est pas difféomorphe au tore T^3.

Solution :

1– On calcule $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+a & z+c+ay \\ 0 & 1 & y+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'où $L_g(x, y, z) = (x + a, y + b, z + c + ay)$, $R_g(x, y, z) = (x + a, y + b, z + c + bx)$.

2– Soit $g = (x, y, z)$. Alors $\xi(g) = \frac{\partial}{\partial t} L_g(t, 0, 0)_{|t=0} = \frac{\partial}{\partial t}(x + t, y, z)_{|t=0} = (1, 0, 0)$, autrement dit $\xi = \frac{\partial}{\partial x}$.

$\eta(g) = \frac{\partial}{\partial t} L_g(0, t, 0)_{|t=0} = \frac{\partial}{\partial t}(x, y+t, z+xt)_{|t=0} = (0, 1, x)$, autrement dit $\eta = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$.

3– Non. On calcule $[\xi, \eta] = [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}] = \frac{\partial}{\partial z}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{P}$.

4– La 1-forme différentielle invariante à gauche τ sur G qui vaut dz en e convient. Sa valeur en $g = (a, b, c)$ est $(L_{g^{-1}})^* dz$. Comme $g^{-1} = (-a, -b, -c+ab)$, $(L_{g^{-1}})^* dz(a, b, c) = dz - a\, dy$. Autrement dit, $\tau = dz - x\, dy$. $d\tau = -dx \wedge dy$.

5– La dimension de l'espace vectoriel des 1-formes différentielles invariantes à gauche sur G est 3. Des formules $(L_{g^{-1}})^* dx(a, b, c) = dx$ et $(L_{g^{-1}})^* dy(a, b, c) = dy$, on tire la base $(dx, dy, dz - x\, dy)$. La différentielle extérieure annule les deux premières, son noyau est de dimension 2, engendré par dx et dy.

6– Γ est un sous-groupe discret, il agit proprement et librement sur G (théorème du cours), en préservant l'orientation, donc le quotient est une variété séparée et orientée. Comme domaine fondamental, on peut prendre le cube unité de $\mathbb{R}^3$, qui est compact, donc X est compacte. Les formes différentielles invariantes à gauche de G sont en particulier invariantes par l'action de Γ par translations à gauche sur G. Par conséquent, elles descendent en des formes différentielles sur X.

7– Soit α (resp. β, resp. γ) la 1-forme qui se relève à G en dx (resp. dy, resp. $-\tau$). Comme $dx \wedge dy = d(-\tau)$, $\alpha \wedge \beta = d\gamma$ est exacte. Par définition,

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta) &= \int_X \alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \int_{[0,1]^3} dx \wedge dy \wedge (-dz + x\, dy) \\ &= -\int_{[0,1]^3} dx\, dy\, dz = -1. \end{aligned}$$

8– L'existence d'un couple de classes de cohomologie telles que M est défini est non nul est une propriété invariante par difféomorphisme. X la possède, mais pas T^3.

Par conséquent, X n'est pas difféomorphe au tore T^3. En fait, Cette propriété est invariante par équivalence d'homotopie.