Géométrie Différentielle, Examen du 4 juin 2010, durée 3 heures

Documents et calculatrices interdits. Barême approximatif : 4,3,4,9. Les questions sont souvent indépendantes. Ne pas hésiter, quand on peine sur une question, à passer aux suivantes.

1. Foire aux questions. Répondre par OUI/NON et donner une brève justification.

1– Si deux variétés de même dimension ont même type d'homotopie, et si l'une est orientable, peut on affirmer que l'autre l'est aussi ?

2– Deux variétés orientables de dimensions différentes peuvent-elles avoir même type d'homotopie ?

3– Deux variétés compactes orientables de dimensions différentes peuvent-elles avoir même type d'homotopie ?

4– Sur un groupe de Lie, un champ de vecteurs invariant à droite est-il toujours complet ?

5– Soit G un groupe de Lie, $h \in G$, $\varphi : G \to G$ le difféomorphisme défini par $\varphi(g) = hgh^{-1}$, ξ un champ de vecteurs invariant à gauche. $\varphi_*\xi$ est il invariant à gauche ?

6– Soit G un groupe de Lie, $i : G \to G$ le difféomorphisme défini par $i(g) = g^{-1}$, ξ un champ de vecteurs invariant à gauche. $i_*\xi$ est il invariant à gauche ?

7– Soit G un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors $G = \exp(\mathfrak{g})$.

8– Soit G un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors G est engendré par $\exp(\mathfrak{g})$.

2. Une inégalité isopérimétrique

Soit $vol = dx \wedge dy \wedge dz$ la 3-forme différentielle à coefficients constants sur $\mathbb{R}^3$ orienté qui vaut 1 sur les bases orthonormées directes. Soit $N \subset \mathbb{R}^3$ un domaine à bord lisse. Soit $X = \partial N$ son bord, orienté par la normale sortante $p \mapsto \nu(p)$. On définit une 2-forme, l'*élément d'aire* σ de X, comme suit. Si v_1, v_2 sont des vecteurs tangents à X en p, $\sigma_p(v_1, v_2) = vol(\nu(p), v_1, v_2)$. L'*aire* de X est $\int_X \sigma$.

1– Soit $\alpha = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$. Calculer $d\alpha$.

2– Montrer que si (v_1, v_2) est une base orthonormée directe de T_pX, alors $\alpha(v_1, v_2) \leqslant \|p\|\sigma(v_1, v_2)$.

3– En déduire que si N est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon R, alors

$$volume(N) \leqslant \frac{R}{3} aire(\partial N).$$

3. Surfaces non orientables

On rappelle que la *somme connexe* $M\#N$ de deux variétés de dimension 2 est homéomorphe à l'espace obtenu en retirant un disque à M et un disque à N et en recollant les espaces résultants le long de leur bord. On note U_0 le plan projectif réel et, pour $g \in \mathbb{N}$, $U_{g+1} = U_0\#U_g$. On note χ la caractéristique d'Euler.

1– Montrer que $\chi(U_0) = 1$.

2– Montrer que $\chi(M\#N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$.

3– En déduire la valeur de $\chi(U_g)$. Montrer que si $g \neq g'$, U_g et $U_{g'}$ n'ont pas même type d'homotopie.

4– Montrer qu'aucun des tores à g' trous $T_{g'}$ n'a le même type d'homotopie que U_g.

T.S.V.P.

4. Sous-groupes de Lie de $Sl_2(\mathbb{R})$

Soit $G = Sl_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ son algèbre de Lie. On note $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note $T \subset G$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, et $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

1– T est-il connexe ? Quelle est la composante connexe de e dans T ?

2– Montrer que pour tout $v \in \mathfrak{g}$, il existe $g \in G$ tel que $Ad_g(v) \in \mathbb{R}v_1 \cup \mathbb{R}v_2 \cup \mathbb{R}v_3$.

3– Le sous-ensemble $\exp(\mathbb{R}v_1)$ (resp. $\exp(\mathbb{R}v_2)$, resp. $\exp(\mathbb{R}v_3)$) est-il fermé dans G ?

4– Quels sont les sous-groupes de Lie de dimension 1 de G ?

5– Soit $w \in \mathfrak{g}$ tel que $[v_1, w] \in \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}w$ (resp. $[v_2, w] \in \mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}w$). Montrer que w est triangulaire.

6– Soit $w \in \mathfrak{g}$ tel que $[v_3, w] \in \mathbb{R}v_3 + \mathbb{R}w$. Montrer que w est colinéaire à v_3.

7– Montrer que toute sous-algèbre de Lie de dimension 2 de $\mathfrak{g}$ est de la forme $Ad_g(\mathfrak{t})$ pour un $g \in G$.

8– En déduire la classification des sous-groupes de Lie connexes de dimension 2 de G.

9– G possède t'il des sous-groupes de Lie non connexes ?

10– Montrer que les sous-groupes connexes de G, distincts de G, ne recouvrent pas G. Qu'en est-il pour le groupe de Lie $G' = G/\pm I = PSl_2(\mathbb{R})$?