Géométrie Différentielle, Examen du 30 mai 2011, durée 3 heures

Documents et calculatrices interdits. Barême approximatif : 6,4,5,5. Les questions sont souvent indépendantes. Ne pas hésiter, quand on peine sur une question, à passer aux suivantes.

1. Foire aux questions. Répondre par OUI/NON et donner une brève justification.

1– La caractéristique d'Euler d'une variété de dimension impaire est nulle.

2– La caractéristique d'Euler d'une variété compacte de dimension impaire est nulle.

3– Soient G, G' des groupes de Lie et $h : G \to G'$ un homomorphisme injectif de groupes de Lie. Alors $T_e h$ est injectif.

4– Un groupe de Lie est orientable.

5– Soit G un groupe de Lie qui agit de façon C^∞ et transitive sur une variété X. Alors X est orientable.

6– Soit G un groupe de Lie de dimension n qui agit de façon C^∞ et transitive sur une variété X de dimension n. Alors X est difféomorphe à G.

Solution :

1– NON. La variété $X = \mathbb{R}$ est contractile, donc sa caractéristique d'Euler, égale à celle du point, vaut 1.

2– OUI. D'après le théorème de dualité de Poincaré, si X est orientable de dimension n, $\dim H^k(X) = \dim H^{n-k}(X)$, donc la somme alternée des dimensions est nulle si n est impair. *Cette réponse suffit. Si X n'est pas orientable, elle a un revêtement des orientations, X^{or}, qui est orientable. Si n est impair, $\chi(X^{or}) = 0$. Or $\chi(X^{or}) = 2\chi(X)$ (mais ce théorème ne se trouve pas dans le cours....).*

3– OUI. Si $T_e h : T_e\mathbb{R}^2 \to T_e G$ n'est pas injectif, soit v un vecteur non nul de son noyau. Alors pour tout t, $h(exp(tv)) = exp((T_e h)(tv)) = e$. Si t est assez petit, $exp(tv) \neq e$ donc h n'est pas injectif.

4– OUI. Une base de champs de vecteurs invariant à gauche définit une orientation.

5– NON. Exemple : le plan projectif réel n'est pas orientable. Or l'action du groupe $Gl_3(\mathbb{R})$ est transitive.

6– NON. $G = \mathbb{R}$ agit transitivement sur $X = \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ mais ne lui est pas difféomorphe.

2. Produit extérieur en degré moitié

Soit det la forme n-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$ définie par le déterminant dans la base canonique. On suppose que $n = 2m$ est pair. On note B la forme bilinéaire sur $\Lambda^m(\mathbb{R}^n)^*$ définie par

$$B(\alpha, \beta)det = \alpha \wedge \beta.$$

1– Soit α une forme m-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$. Calculer $\alpha \wedge dx_{m+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$. En déduire que B est non dégénérée.

2– B est elle symétrique ? alternée ?

3– Soit $L \in Gl_n(\mathbb{R})$. Alors L agit sur les formes m-linéaires alternées. Que vaut $B(\Lambda^m L(\alpha), \Lambda^m L(\beta))$?

4– Lorsque m est pair, montrer que la forme quadratique $\alpha \mapsto Q(\alpha) = B(\alpha, \alpha)$ est de signature (N, N) où $2N = \binom{n}{m}$.

Solution :

1– On écrit $\alpha = \sum_I a_I dx_I$ où $I = \{i_1 < \cdots < i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ et $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$. On observe que si I et $J \subset \{1, \dots, m\}$ ont m éléments, alors $dx_I \wedge dx_J = 0$ sauf si J est le complémentaire de I. Par conséquent

$$\alpha \wedge dx_{m+1} \wedge \cdots \wedge dx_n = a_{1,\dots,m} det.$$

Plus généralement, pour tout $I = \{i_1 < \cdots < i_m\} \subset \{1, \dots, m\}$, $a_I = \pm B(\alpha, dx_{I^c})$. Si $B(\alpha, \beta) = 0$ pour toute m-forme alternée β, tous les a_I sont nuls, donc $\alpha = 0$. On conclut que B est non dégénérée.

2– Par définition,

$$B(\alpha, \beta) det = \alpha \wedge \beta = (-1)^{m^2} \beta \wedge \alpha = (-1)^m B(\beta, \alpha) det.$$

Par conséquent, B est symétrique si m est pair, alternée si m est impaire.

3–

$$\begin{aligned} B(\Lambda^m L(\alpha), \Lambda^m L(\beta)) det &= \Lambda^m L(\alpha) \wedge \Lambda^m L(\beta) \\ &= \Lambda^m L(\alpha \wedge \beta) \\ &= B(\alpha, \beta) \Lambda^m L(det) \\ &= det(L) B(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

donc $B(\Lambda^m L(\alpha), \Lambda^m L(\beta)) = det(L) B(\alpha, \beta)$.

4– On a montré que Q était non dégénérée. Soit (p, q) sa signature. Soit L un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de déterminant -1. Alors $\Lambda^m L$ transforme Q en son opposée. Or transporter une forme quadratique préserve la signature. On en déduit que Q et $-Q$ ont même signature, i.e. que $(p, q) = (q, p)$, d'où $p = q = \frac{1}{2} \binom{n}{m}$.

3. Cohomologie des tores

On note $\mathbb{T}^1$ le cercle et $\mathbb{T}^n = (\mathbb{T}^1)^n$ le tore de dimension n. Soit X une variété dont la cohomologie de de Rham est de dimension finie. On calcule la cohomologie de de Rham de $X \times \mathbb{T}^1$.

1– Trouver deux ouverts U et V de $X \times \mathbb{T}^1$ et des équivalences d'homotopie $r_U : U \to X$ et $r_V : V \to X$ telles que
- $U \cap V$ est la réunion disjointe de deux ouverts W et W' ;
- si on note $i_U : W \to U$, $i'_U : W' \to U$, $i_V : W \to V$, $i'_V : W' \to V$ les injections, alors $r_U \circ i_U = r_V \circ i_V$ et $r_U \circ i'_U = r_V \circ i'_V$ sont à nouveau des équivalences d'homotopie.

2– Montrer que $\chi(X \times \mathbb{T}^1) = 0$.

3– Montrer que le noyau et l'image de la flèche naturelle $H^k(U) \oplus H^k(V) \to H^k(U \cap V)$ sont de dimension moitié.

4– En déduire que $\dim H^k(X \times \mathbb{T}^1) = \dim H^k(X) + \dim H^{k-1}(X)$.

5– Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $k = 0, \dots, n$, la dimension de $H^k(\mathbb{T}^n)$ est égale au coefficient binômial $\binom{n}{k}$.

Solution :

1– On écrit $X \times \mathbb{T}^1 = X \times \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ et on pose

$$U = X \times]0, 1[, \quad V = X \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \quad W = X \times]-\frac{1}{2}, 0[, \quad W' = X \times]0, \frac{1}{2}[.$$

De plus, r_U, r_V, r_W, $r_{W'}$ désignent les projections sur le premier facteur, et $r_U \circ i_U = r_V \circ i_V = r_W$ et $r_U \circ i'_U = r_V \circ i'_V = r_{W'}$. Toutes ces projections sont des équivalences d'homotopie car les intervalles sont contractiles. Par exemple, posons $j : X \to V$, $j(x) = (x, 0)$. Alors $h_s(x,t) = r_V(x, ts)$ est une homotopie de $h_0 = j \circ r_V$ à l'identité h_1 de V, et $r_V \circ j$ est l'identité de X.

2– La suite exacte longue de Mayer-Vietoris entraîne que

$$\begin{aligned}\chi(X \times \mathbb{T}^1) &= \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)\\ &= \chi(U) + \chi(V) - \chi(W) - \chi(W')\\ &= \chi(X) + \chi(X) - \chi(X) - \chi(X) = 0.\end{aligned}$$

3– Soient $a \in H^k(U)$ et $b \in H^k(V)$. La restriction de a (resp. b) à $U \cap V$ est le couple $(i_U^*(a), {i'_U}^*(a))$ (resp. $(i_V^*(b), {i'}_V^*(b)) \in H^k(W) \oplus H^k(W')$. L'image du couple $(a, b) \in H^k(U) \oplus H^k(V)$ par la flèche naturelle est donc

$$c = (i_U^*(a) - i_V^*(b), {i'_U}^*(a) - {i'_V}^*(b)).$$

Comme r_U^* et r_V^* sont des isomorphismes, il existe α et $\beta \in H^k(X)$ uniques tels que $a = r_U^*(\alpha)$ et $b = r_V^*(\beta)$. Il vient

$$\begin{aligned}c &= (i_U^*(r_U^*(\alpha)) - i_V^*(r_V^*(\beta)), {i'_U}^*(r_U^*(\alpha)) - {i'_V}^*(r_V^*(\beta)))\\ &= (r_W^*(\alpha - \beta), r_{W'}^*(\alpha - \beta)).\end{aligned}$$

c est nul si et seulement si $\alpha = \beta$. Par conséquent, le noyau de la flèche naturelle est de dimension moitié, i.e. égale à $\dim H^k(X)$. Il en est de même de son image.

4– Dans la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, l'image de la flèche $H^k(X \times \mathbb{T}^1) \to H^k(U) \oplus H^k(V)$ est de dimension $\dim H^k(X)$, le noyau de la flèche $H^{k-1}(U \cap V) \to H^k(X \times \mathbb{T}^1)$ (et donc, son image) est de dimension $\dim H^{k-1}(X)$. Par exactitude, la dimension de $H^k(X \times \mathbb{T}^1)$ est la somme de ces dimensions.

5– On constate que $\dim H^k(\mathbb{T}^n)$ satisfait la même relation de récurrence que les coefficients binômiaux. Lorsque $n = 1$, $\dim H^0(\mathbb{T}^1) = \dim H^1(\mathbb{T}^1) = 1$. Par récurrence sur n et k, on en déduit que $\dim H^k(\mathbb{T}^n)$ est égal au coefficient binômial $\binom{n}{k}$.

4. Formes différentielles invariantes à gauche

On note $\Omega = g^{-1}dg$ la matrice de 1-formes différentielles sur $Gl_n(\mathbb{R})$ définie comme suit. Si la matrice $v \in M_n(\mathbb{R})$ est vue comme vecteur tangent en g à $Gl_n(\mathbb{R})$, $\Omega(v) = g^{-1}v$. Par exemple, si $n = 2$ et si $g = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ sont les 4 coordonnées sur $Gl_2(\mathbb{R})$,

$$\Omega = \frac{1}{xt - yz}\begin{pmatrix} t & -z \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx & dz \\ dy & dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{tdx - zdy}{xt - yz} & \frac{tdz - zdt}{xt - yz} \\ \frac{-ydx + xdy}{xt - yz} & \frac{-ydz + xdt}{xt - yz} \end{pmatrix}.$$

1– Vérifiez que Ω est invariante à gauche et équivariante à droite, i.e. si $h \in Gl_n(\mathbb{R})$, $L_h^*\Omega = \Omega$ et $R_h^*\Omega = Ad_{h^{-1}} \circ \Omega$.

2– Soit $G \subset Gl_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe de Lie. Montrer que la restriction de Ω à G est à valeurs dans l'algèbre de Lie de G.

3– Montrer que les n^2 coefficients de Ω constituent une base de l'espace vectoriel des 1-formes invariantes à gauche sur $Gl_n(\mathbb{R})$.

4– Montrer qu'en l'élément neutre, $d\Omega$ est, au signe près, le crochet des matrices.

5– Montrer qu'une 1-forme invariante à gauche non nulle sur le groupe $SO(3)$ n'est pas fermée.

Solution :

1– $L_h^*\Omega$ s'obtient en substituant hg (resp. gh) à g, ce qui donne

$$\begin{aligned} L_h^*\Omega &= (hg)^{-1}d(hg) = g^{-1}h^{-1}hdg = g^{-1}dg = \Omega, \\ R_h^*\Omega &= (gh)^{-1}d(gh) = h^{-1}g^{-1}(dg)h = Ad_{h^{-1}} \circ \Omega. \end{aligned}$$

2– Si $v \in M_n(\mathbb{R})$, $w = \Omega_g(v)$ est la valeur en e du champ de vecteurs invariant à gauche qui vaut v en g. Si $v \in T_gG$, ce champ de vecteurs est tangent à G, donc $w \in T_eG = \mathfrak{g}$.

3– Chaque coefficient de Ω est une 1-forme invariante à gauche sur $Gl_n(\mathbb{R})$. Soit ℓ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Alors $\ell \circ \Omega$ est une 1-forme invariante à gauche sur $Gl_n(\mathbb{R})$ qui vaut ℓ en e. Si $\ell \circ \Omega = 0$, alors $\ell = 0$. Cela prouve que les coefficients de Ω sont linéairement indépendants. Il y en a n^2, donc ils constituent une base de l'espace vectoriel des 1-formes invariantes à gauche sur $Gl_n(\mathbb{R})$.

4– On calcule

$$d\Omega = d(g^{-1}dg) = -g^{-1}(dg)g^{-1} \wedge dg = -g^{-1}(dg) \wedge g^{-1}dg = -\Omega \wedge \Omega.$$

Autrement dit, si u, v sont des matrices vues comme vecteurs tangents à $Gl_n(\mathbb{R})$ en g,

$$\Omega \wedge \Omega(u, v) = \Omega(u)\Omega(v) - \Omega(v)\Omega(u).$$

En l'élément neutre, Ω est l'identité donc

$$d\Omega_e(u, v) = -(uv - vu).$$

5– Soit α une 1-forme invariante à gauche sur $SO(3)$. Soit ℓ une forme linéaire sur $M_3(\mathbb{R})$ dont la restriction à $T_eSO(3)$ est égale à $\alpha(e)$. Alors α est la restriction à $SO(3)$ de $\ell \circ \Omega$, $d\alpha$ est la restriction à $SO(3)$ de $\ell \circ d\Omega$. Si u, $v \in T_eSO(3)$, $d\alpha(u, v) = -\ell(uv - vu) = -\ell([u, v])$. Or la structure d'algèbre de Lie de $SO(3)$ est isomorphe au produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, qui est surjectif. On conclut que la restriction de ℓ à $T_eSO(3)$ est nulle, donc α est nulle.