Exercice 1 *Semi-continuité inférieure faible de fonctionnelles intégrales et convexité. Soit f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on suppose aussi que f est minorée. Pour tout $u \in H_0^1((0,1))$ on pose*

$$J(u) := \int_0^1 \Big(f(u'(t)) + g(u(t))\Big)dt.$$

1. *Montrer que si f est convexe alors J est séquentiellement s.c.i. pour la topologie faible de $H_0^1((0,1))$.*

   Supposons que u_n converge faiblement vers u dans H^1 alors, (à une extraction près), u_n converge vers u dans $C^{0,1/2}$ et u'_n converge faiblement vers u' dans L^2, on passe alors aisément à la limite dans le premier terme par convergence dominée, pour le premier on utilise le fait que $v \to \int f(v)$ est sci pour la topologie forte de L^2 (par le lemme de Fatou) et par convexité on en déduit que cette fonctionnelle est aussi sci pour la topologie faible de L^2, la conclusion en découle trivialement.

2. *Soit $(\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in (0,1)$, $\xi := \lambda\xi_0 + (1-\lambda)\xi_1$, soit u_0 définie par:*

   $$u_0(t) = \begin{cases} (\xi_0 - \xi)t & si \quad t \in [0, \lambda] \\ (\xi_0 - \xi)\lambda + (\xi_1 - \xi)(t - \lambda) & si \quad t \in [\lambda, 1]. \end{cases}$$

   que l'on prolonge par 1-périodicité à $\mathbb{R}$ et $u_n(t) := n^{-1}u_0(nt)$ pour tout $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (u_n) converge faiblement dans $H^1(0,1)$ vers une limite à préciser.

   C'est une forme du Lemme de Riemann-Lebesgue. Il est clair que u_n converge fortement vers 0 dans L^2 et un calcul immédiat donne que u_n est bornée dans H^1, à une extraction près on peut donc supposer que u_n converge faiblement dans H^1. On conclut en remarquant alors que 0 est la seule valeur d'adhérence faible de la suite (u_n).

3. *Montrer que si J est séquentiellement s.c.i. pour la topologie faible de $H_0^1((0,1))$ alors f est convexe.*

   Posons

   $$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0, 1/3] \\ \xi(t - 1/3) & \text{si} \quad t \in [1/3, 2/3] \\ \xi(1-t) & \text{si} \quad t \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

   et soit $\varphi_n = \varphi + \tilde{u}_n$ avec $\tilde{u}_n(t) = \frac{1}{3}\chi_{[1/3,2/3]}u_n(3(t-1/3))$. Comme φ_n converge faiblement vers φ on a $J(\varphi) \leq \text{liminf} J(\varphi_n)$ ce qui implique bien que

   $$f(\xi) \leq \lambda f(\xi_0) + (1-\lambda)f(\xi_1).$$

Exercice 2 *Un résultat de regularité locale pour le p-laplacien. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 2$, $p \in]1, +\infty[$, $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, on s'intéresse ici au problème:*

$$\Delta_p(u) = 0 \text{ dans } \Omega, \; u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{1}$$

où

$$\Delta_p u := \operatorname{div}\Big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)$$

1. *Définir ce qu'est une solution faible de (1) et montrer que (1) possède une unique solution faible.*

   Une solution faible de (1) est une fonction $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ (sous-espace affine fermé de $W^{1,p}$) telle que

   $$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi = 0, \; \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

   Considérons le problème variationnel

   $$\inf_{v \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)} \int_\Omega |\nabla v|^p$$

   ce problème possède (par exemple prendre une suite minimisante, remarquer qu'elle est bornée dans $W^{1,p}$ grâce à l'inégalité de Poincaré, en extraire une sous suite faiblement convergente puis utiliser le fait que par convexité la fonctionnelle est faiblement s.c.i) une unique (par un argument de stricte convexité) solution qui est caractérisée par le fait qu'elle résout (1).

2. *On suppose à présent que $p \geq 2$, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ on a*

   $$\langle |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b, a - b\rangle \geq \frac{1}{C}\Big||a|^{(p-2)/2}a - |b|^{(p-2)/2}b\Big|^2 \tag{2}$$

   et

   $$\Big||a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b\Big| \leq C\Big(|a|^{(p-2)/2} + |b|^{(p-2)/2}\Big)\Big||a|^{(p-2)/2}a - |b|^{(p-2)/2}b\Big| \tag{3}$$

   On commence par remarquer que

   $$|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(|b + t(a-b)|^{p-2}(b + t(a-b)\Big)dt$$

   $$= (a-b) \cdot \int_0^1 |b + t(a-b)|^{p-2}dt +$$

   $$(p-2)\int_0^1 |b + t(a-b)|^{p-4}\langle b + t(a-b), a-b\rangle(b + t(a-b))dt$$

Prenant le produit scalaire avec $a-b$ et en utilisant la positivité du second terme, on a donc

$$\langle |a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b, a-b\rangle \geq |a-b|^2\int_0^1 |b+t(a-b)|^{p-2}dt. \tag{4}$$

Par le même calcul qu'au début de la question avec l'exposant $q\geq 2$ on obtient facilement

$$\Big||a|^{q-2}a-|b|^{q-2}b\Big| \leq |a-b|(q-1)\int_0^1 |b+t(a-b)|^{q-2}dt. \tag{5}$$

En appliquant cette inégalité à $q=(p+2)/2\geq 2$ on a donc:

$$\Big||a|^{(p-2)/2}a-|b|^{(p-2)/2}b\Big| \leq |a-b|\frac{p}{2}\int_0^1 |b+t(a-b)|^{(p-2)/2}dt. \tag{6}$$

en élevant au carré et en utilisant l'inégalité de Jensen, il vient alors

$$\Big||a|^{(p-2)/2}a-|b|^{(p-2)/2}b\Big|^2 \leq |a-b|^2\frac{p^2}{4}\int_0^1 |b+t(a-b)|^{(p-2)}dt. \tag{7}$$

Avec (4), il vient donc

$$\langle |a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b, a-b\rangle \geq \frac{4}{p^2}\Big||a|^{(p-2)/2}a-|b|^{(p-2)/2}b\Big|^2$$

ce qui est la première inégalité recherchée. Pour la seconde inégalité, on commence par utiliser à nouveau (5) (avec $p=q$), ce qui donne:

$$\begin{aligned}\Big||a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b\Big| &\leq |a-b|(p-1)\int_0^1 |b+t(a-b)|^{p-2}dt\\ &\leq |a-b|(p-1)\Big(|a|^{(p-2)/2}+|b|^{(p-2)/2}\Big)\int_0^1 |b+t(a-b)|^{(p-2)/2}dt\end{aligned}$$

En remplacant p par $q=(p+2)/2$ dans (4) on a

$$\langle |a|^{(p-2)/2}a-|b|^{(p-2)/2}b, a-b\rangle \geq |a-b|^2\int_0^1 |b+t(a-b)|^{(p-2)/2}dt. \tag{8}$$

et donc, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\Big||a|^{(p-2)/2}a-|b|^{(p-2)/2}b\Big| \geq |a-b|\int_0^1 |b+t(a-b)|^{(p-2)/2}dt \tag{9}$$

et donc

$$\Big||a|^{p-2}a-|b|^{p-2}b\Big| \leq (p-1)\Big(|a|^{(p-2)/2}+|b|^{(p-2)/2}\Big)\Big||a|^{(p-2)/2}a-|b|^{(p-2)/2}b\Big|$$

3. *Soit u la solution faible de (1) et $F := |\nabla u|^{(p-2)/2}\nabla u$, montrer que $F \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (on pourra considérer une fonction-test de la forme $\varphi(x) = \xi^2(x)(u(x+h)-u(x))$ avec ξ^2 une certaine fonction cutoff et $h \in \mathbb{R}^d$ de norme assez petite, utiliser $\langle \Delta_p \tau_h u - \Delta_p u, \varphi\rangle = 0$ puis les inégalités de la question précédente).*

   Soit $\omega \subset\subset \Omega$, $r > 0$ tel que $\omega + B_{4r} \subset\subset \Omega$, $h \in \mathbb{R}^d$, $|h| < r$, $\xi \in C_c^\infty$ avec $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi = 1$ sur ω et $\xi = 0$ en dehors de $\omega + B_r$. On utilise alors la fonction-test suggérée $\varphi(x) = \xi^2(x)(u(x+h)-u(x))$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi = 0$$

   et de même (par exemple en utilisant comme fonction-test $\tau_{-h}\varphi$):

$$\int_\Omega \nabla |u(x+h)|^{p-2}\nabla u(x+h)\nabla\varphi(x)dx = 0.$$

   Effectuant la différence entre ces deux identités, il vient donc

$$\int \xi^2 \langle |\nabla u(x+h)|^{p-2}\nabla u(x+h) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u(x+h) - \nabla u\rangle$$
$$= -2\int \xi(u(x+h)-u)\nabla\xi \cdot (|\nabla u(x+h)|^{p-2}\nabla u(x+h) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

   Utilisant les inégalités (2) et (3) de la question précédente, on obtient

$$\int \xi^2 |F(x+h) - F|^2$$
$$\leq C\|\nabla\xi\|_\infty \int \xi |F(x+h)-F||u(x+h)-u(x)|(|\nabla u(x+h)|^{(p-2)/2} + |\nabla u|^{(p-2)/2}).$$

   Notant que $1/2 + (p-2)/2p + 1/p = 1$, on utilise ensuite l'inégalité de Hölder avec les exposants 2, $2p/(p-2)$ et p pour traiter chaque facteur:

$$\int \xi^2|F(x+h)-F|^2 \leq$$
$$C\Big(\int \xi^2|F(x+h)-F|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_{\omega+B_r}|u(x+h)-u|^p\Big)^{1/p}\times$$
$$\Big(\int_{\omega+B_r}(|\nabla u(x+h)|^{(p-2)/2} + |\nabla u|^{(p-2)/2})^{2p/(p-2)}\Big)^{(p-2)/2p}$$

   et puisque $u \in W^{1,p}$ on en tire que

$$\|\tau_h F - F\|_{L^2(\omega)} \leq C|h|$$

   ce qui permet de conclure que $F \in H^1_{\text{loc}}$ (cf. proposition 7.3 du cours)

4. *En déduire que pour p assez grand mais inférieur à d (préciser) u est localement Hölder (préciser l'exposant).*

   Evidemment on supose $p \leq d$ (sans quoi le résultat se déduit immédiatement du théorème de Morrey). Soit $\omega \subset\subset \Omega$, on a montré que $F \in H^1(\omega) \subset L^{2d/(d-2)}(\omega)$ or $|\nabla u| = |F|^{2/p} \in L^{pd/(d-2)}(\omega)$ de sorte que $u \in W^{1,pd/(d-2)}(\omega)$ et donc si $p > d-2$ on a $pd/(d-2) > d$ et on déduit du théorème de Morrey que $u \in C^{0,\alpha}(\omega)$ avec $\alpha = 1 - d(d-2)/(pd) = 1 - (d-2)/p$.

Exercice 3 *Biting Lemma. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie et $(u_n)_n$ une suite bornée de $L^1(\Omega)$. On rappelle que $v = (v_n)_n$ est uniformément intégrable si et seulement si $\eta(v) = 0$ avec*

$$\eta(v) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{n,\ A \subset \Omega,\ |A| \leq \varepsilon} \int_A |v_n|.$$

On se propose de montrer qu'il existe une sous-suite (u_{n_k}) et une suite décroissante de mesurables A_k telle que $|A_k| \to 0$ et $(u_{n_k} \chi_{\Omega \setminus A_k})$ soit uniformément intégrable.

1. *Donner un exemple de suite bornée dans L^1 et non uniformément intégrable.*

   $\Omega = (0,1)$ et $v_n = n\chi_{(0,1/n)}$ on a alors $\eta(v) = 1$.

2. *Montrer que*

$$\eta(u) = \lim_{M \to \infty} \sup_n \int_{|u_n| \geq M} |u_n|.$$

   Notons

$$\eta_0(u) := \lim_{M \to \infty} \sup_n \int_{|u_n| \geq M} |u_n| = \inf_{M \geq 0} \sup_n \int_{|u_n| \geq M} |u_n|$$

   et soit C une borne sur $\|u_n\|_{L^1}$, on a alors $|\{|u| \geq M\}| \leq C/M$, pour tout n. Soit $\varepsilon > 0$ et M tel que $\sup_n |\{|u| \geq M\}| \leq \varepsilon$ on a alors

$$\eta_0 \leq \sup_{n,\ A \subset \Omega,\ |A| \leq \varepsilon} \int_A |v_n|$$

   ainsi, en faisant tendre ε vers 0, on a $\eta_0 \leq \eta(u)$. Soit $\delta > 0$, par monotonie, il existe M_δ tel que si $M \geq M_\delta$ alors

$$\sup_n \int_{|u_n| \geq M} |u_n| \leq \eta_0 + \delta.$$

Soit $M \geq M_\delta$, $\varepsilon > 0$, et A mesurable vérifiant $|A| \leq \varepsilon$, on a alors

$$\int_A |u_n| \leq \int_{|u_n|\geq M} |u_n| + \int_{A\cap\{|u_n|<M\}} |u_n| \leq \eta_0 + \delta + M\varepsilon$$

ainsi

$$\eta(u) = \inf_\varepsilon \sup_{n,\ A\subset\Omega,\ |A|\leq\varepsilon} \int_A |u_n| \leq \eta_0 + \delta$$

on conclut en faisant tendre δ vers 0.

3. *Montrer qu'il existe une sous suite (u_{n_k}) et une suite strictement croissante de réels M_k tendant vers $+\infty$ telles que pour tout k on ait*

$$\sup_n \int_{|u_n|\geq M_k} |u_n| \leq \eta(u) + \frac{1}{2^k}$$

et

$$\int_{|u_{n_k}|\geq M_k} |u_{n_k}| \geq \eta(u) - \frac{1}{2^k}.$$

Le premier point est évident avec la question précédente. Pour le second, on commence par remarquer que pour tout m, $\{u_1, ..., u_m\}$ est uniformémement intégrable et que par conséquent, en posant

$$g_m(M) := \sup_{n\geq m} \int_{|u_n|\geq M} |u_n|$$

on a $\lim_{M\to\infty} g_m(M) = \eta(u)$ et donc par monotonie $g_m(M_k) \geq \eta(u)$ pour tout m, on peut ainsi construire une suite strictement croissante n_k telle que

$$\int_{|u_{n_k}|\geq M_k} |u_{n_k}| \geq \eta(u) - \frac{1}{2^k}.$$

4. *Soit $B_k := \{|u_{n_k}| \geq M_k\}$, montrer que la suite $(u_{n_k}\chi_{\Omega\setminus B_k})$ est uniformément intégrable.*

Posons

$$g(M) := \sup_k \int_{M_k > |u_{n_k}|\geq M} |u_{n_k}|$$

il s'agit de montrer que $\lim_{M\to+\infty} g(M) = 0$ ou ce qui revient au même par monotonie, que $\lim_{l\to+\infty} g(M_l) = 0$. Soit $l \in \mathbb{N}^*$, on a en utilisant la question précédente:

$$\begin{aligned} g(M_l) &= \sup_{k\geq l} \int_{M_k>|u_{n_k}|\geq M_l} |u_{n_k}| \\ &= \sup_{k\geq l}\Big(\int_{|u_{n_k}|\geq M_l} |u_{n_k}| - \int_{|u_{n_k}|\geq M_k} |u_{n_k}|\Big) \\ &\leq \eta(u) + \frac{1}{2^l} - \eta(u) + \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{l-1}} \end{aligned}$$

de sorte qu'on a bien $\lim_l g(M_l) = 0$.

5. *Conclure.*

   Quitte à effectuer une extraction (encore notée B_k) on peut supposer que $|B_k| \leq 1/2^k$, on pose alors $A_k := \cup_{l\geq k} B_l$, la suite $(u_{n_k}\chi_{\Omega\setminus A_k})$ est uniformément intégrable car $\Omega \setminus A_k \subset \Omega \setminus B_k$. Par construction la suite A_k est décroissante et de mesure tendant vers 0, ceci achève la preuve du Biting Lemma.

Exercice 4 *Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^d$, on rappelle que si $f \in L^2$ alors la solution $H_0^1(\Omega)$ de l'EDP $-\Delta u = f$ dans Ω est H^2 et qu'il existe C (indépendante de f) telle que $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$. On s'intéresse désormais à l'équation*

$$-\Delta u + \sin(u) = f \ \text{dans } \Omega, \ u \in H_0^1(\Omega) \tag{10}$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

1. *Montrer que (10) possède au moins une solution.*

   S'obtient en remarquant que (10) est l'équation d'Euler-Lagrange du problème

   $$\inf_{v\in H_0^1} J(v) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \cos(u) - fu)$$

   et que ce problème possède des solutions par des arguments classiques. On pouvait aussi raisonner par point fixe.

2. *Montrer que pour $|\varepsilon|$ assez petit (préciser) l'équation*

   $$-\Delta u + \varepsilon \sin(u) = f \ \text{dans } \Omega, \ u \in H_0^1(\Omega) \tag{11}$$

   possède une unique solution.

Si u_1 et u_2 sont solutions alors $-\Delta(u_1 - u_2) + \varepsilon(\sin(u_1) - \sin(u_2)) = 0$ en multipliant cette équation par $u_1 - u_2$ et en utilisant l'inégalité de Poincaré, il vient donc

$$0 = \int_\Omega (|\nabla(u_1 - u_2)|^2 + \varepsilon(\sin(u_1) - \sin(u_2))(u_1 - u_2)) \geq (\nu - |\varepsilon|)\|u_1 - u_2\|_{L^2}^2$$

avec

$$\nu := \inf_{v \in H_0^1,\, v \neq 0} \frac{\|\nabla v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^2}^2}$$

de sorte que l'on a bien unicité dès que $|\varepsilon| < \nu$.

3. *Montrer que l'application $F : H^2 \cap H_0^1 \to L^2$ définie par $F(v) = -\Delta v + \sin(v)$ pour $v \in H^2 \cap H_0^1$ est de classe C^1 et calculer sa différentielle.*

   Le premier terme est linéaire et continu, quant au second, $G : v \mapsto \sin(v)$, on déduit facilement du théorème de convergence dominée qu'il est Gâteaux différentiable avec $G'(v)(h) = \cos(v)(h)$ ainsi G' est 1-Lipschitzienne. Ainsi F est de classe C^1 et $F'(v)(h) = -(\Delta v + \cos(v))(h)$ pour tout $(v, h) \in H^2 \cap H_0^1$.

4. *Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que si $\|f\|_{L^2} \leq \delta$ alors (10) possède une unique solution telle que $\|u\|_{H^2} \leq \varepsilon$.*

   On déduit de la question précédente que $F'(0) = -\Delta + I$ qui est un isomorphisme de $H^2 \cap H_0^1$ vers L^2. On déduit du théorème d'inversion locale qu'il existe $\varepsilon > 0$ et U un voisinage de 0 dans L^2 (contenant la boule B_δ pour un certain $\delta > 0$) tels que la double restriction de F à B_ε (dans $H^2 \cap H_0^1$) et U soit un C^1 difféomorphisme. La conclusion en découle immédiatement.