Géométrie Différentielle, Examen du 9 juin 2009, durée 3 heures

Documents et calculatrices interdits. Barême approximatif : 5,7,8. Les questions sont souvent indépendantes. Ne pas hésiter, quand on peine sur une question, à passer aux suivantes. Si une question vous semble suspecte, merci de le signaler.

1. Foire aux questions. Répondre par OUI/NON et donner une brève justification.

1– Un groupe de Lie est-il toujours orientable ?

2– Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, v un vecteur non nul de $\mathfrak{g}$. L'endomorphisme ad_v est il surjectif ?

3– L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est-elle engendrée (comme espace vectoriel) par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ?$$

4– Le crochet des matrices C et B ci-dessus est-il égal à $[C, B] = A$?

5– Dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$, soit v un vecteur non nul. ad_v est-il toujours de rang 2 ?

Solution :

1– OUI. Fixons une orientation sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. La translation à gauche L_g donne un isomorphisme de T_eG sur T_gG. Utilisons la pour transporter l'orientation. Autrement dit, si $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est une base directe de $\mathfrak{g}$, $(\xi_1(g), \ldots, \xi_n(g))$ est une base directe de T_gG. Comme cette base est continue, on obtient une orientation localement constante sur G.

2– NON, jamais. En effet, $ad_v(v) = [v, v] = 0$, donc ad_v n'est pas injectif, donc il n'est pas surjectif non plus.

3– OUI. Elle est constituée des matrices 2×2 de trace nulle, donc de dimension 3, et les matrices A, B et C en constituent bien une base.

4– NON. Le crochet coïncide avec le commutateur des matrices, qui vaut $-A$.

5– OUI. $\mathfrak{so}(3)$ s'identifie à un espace euclidien orienté de dimension 3 muni du produit vectoriel. L'image de ad_v est le plan orthogonal à v.

2. Mesure de Haar

Soit G un groupe de Lie de dimension n, soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, soit k un entier, $0 \leqslant k \leqslant n$. On rappelle qu'un objet défini sur G est *invariant à gauche* s'il est invariant par transport par les translations à gauche L_g, $g \in G$.

1– Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des k-formes différentielles invariantes à gauche sur G ?

2– Soit ω une k-forme différentielle invariante à gauche sur G. Montrer que ω est invariante à droite si et seulement si ω est invariante par l'action adjointe $\overline{Ad} : G \to Aut(G)$.

3– Soit ω une k-forme différentielle invariante à gauche sur G. Montrer que ω est invariante à droite si et seulement si $\omega(e)$ est invariante par la dérivée de l'action adjointe $Ad : G \to Gl(\mathfrak{g})$.

4– Désormais, on fixe une n-forme différentielle non nulle invariante à gauche μ sur G. Montrer que, pour $g \in G$, il existe une constante non nulle $\Delta(g)$ telle que $R_g^*\mu = \Delta(g)\mu$. Montrer que $g \mapsto \Delta(g)$, $G \to \mathbb{R}^*$, est un homomorphisme de groupes.

5– Montrer que si G est compact et connexe, $\Delta = 1$, autrement dit, les n-formes invariantes à gauche sont aussi invariantes à droite.

6– On note $\delta = T_e\Delta : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$. Soient v, $w \in \mathfrak{g}$. Montrer que $\delta([v, w]) = 0$.

7– On suppose que G est connexe et que $\mathfrak{g}$ est engendrée par les crochets $[v, w]$ où v, $w \in \mathfrak{g}$. Montrer que μ est invariante à droite.

8– Vérifier que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est engendrée (comme espace vectoriel) par les crochets.

9– Soit G le groupe affine de la droite réelle, représenté par les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\mu = a^{-2}\, da \wedge db$ est une 2-forme différentielle invariante à gauche sur G, mais qu'elle n'est pas invariante à droite.

Solution :

1– C'est le coefficient binômial $\binom{n}{k}$. En effet, l'application $\omega \mapsto \omega(e)$ définit un isomorphisme de l'espace des k-formes différentielles invariante à gauche sur G sur $\Lambda^k\mathfrak{g}^*$.

2– ω est invariante à droite si et seulement si, pour tout $g \in G$, $R_g^*\omega = \omega$. Comme pour tout g, $L_g^*\omega = \omega$, il vient

$$\overline{Ad}_g(\omega) = R_g^*(L_{g^{-1}}^*\omega) = R_g^*\omega,$$

donc ω est invariante à droite si et seulement si ω est invariante par l'action adjointe $\overline{Ad} : G \to Aut(G)$.

3– Comme les translations à droite commutent avec les translations à gauche, $\overline{Ad}_g(\omega)$ est invariante à gauche. ω et $\overline{Ad}(\omega)$ sont uniquement déterminées par leur valeur en e, donc il suffit de vérifier que $\omega(e)$ est invariante par la dérivée de l'action adjointe $Ad : G \to Gl(\mathfrak{g})$.

4– La forme $R_g^*\mu$ est invariante à gauche et non nulle. Comme l'espace vectoriel des n-formes invariantes à gauche est de dimension 1, il existe une constante non nulle $\Delta(g)$ telle que $R_g^*\mu = \Delta(g)\mu$. Si g, $h \in G$, $R_{gh} = R_h \circ R_g$, d'où

$$\begin{aligned} \Delta(gh)\mu &= R_{gh}^*\mu = (R_h \circ R_g)^*\mu = R_g^*(R_h^*\mu) \\ &= R_g^*(\Delta(h)\mu) = \Delta(h)R_g^*\mu = \Delta(g)\Delta(h)\mu, \end{aligned}$$

donc $g \mapsto \Delta(g)$, $G \to \mathbb{R}^*$, est un homomorphisme de groupes.

5– Δ est de classe C^∞. Si G est compact et connexe, $\Delta(G)$ est un sous-groupe compact et connexe de $\mathbb{R}^*$. Par connexité, $\Delta(G) \subset \mathbb{R}_+^*$. Si il existe $x \in \Delta(G)$ tel que $x \neq 1$, alors $\Delta(G)$ contient les puissances de x, qui tendent vers 0 ou $+\infty$, contradiction. Donc $\Delta(G) = \{1\}$. Autrement dit, $\Delta = 1$ et les n-formes invariantes à gauche sont aussi invariantes à droite.

Autre solution proposée par Etienne Le Masson : comme R_g est un difféomorphisme préservant l'orientation, par la formule de changement de variables,

$$\Delta(g) \int_G \mu = \int_G R_g^* \mu = \int_G \mu,$$

d'où $\Delta(g) = 1$.

6– Comme δ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, $\delta([v,w]) = [\delta(v), \delta(w)] = 0$ car le crochet est nul dans $\mathbb{R}$.

7– Par linéarité, $\delta = 0$. La formule $\exp \circ \delta = \Delta \circ \exp$ montre que Δ vaut 1 dans un voisinage de e. Le noyau de Δ est un sous-groupe ouvert. Comme G est connexe, ce sous-groupe est égal à G. Donc $\Delta = 1$ et μ est invariante à droite.

8– $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 3, elle est engendrée par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule $[B,C] = A$, $[A,B] = B$, $[A,C] = -C$. Donc A, B et C sont des crochets, et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est engendrée par les crochets.

9– On calcule

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b + \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, si $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L_g(a,b) = (\alpha a, \alpha b + \beta)$,

$$L_g^* \mu = (\alpha a)^{-2} d(\alpha a) \wedge d(\alpha b + \beta) = a^{-2} da \wedge db = \mu.$$

En revanche, $R_g(a,b) = (\alpha a, a\beta + b)$,

$$R_g^* \mu = (\alpha a)^{-2} d(\alpha a) \wedge d(a\beta + b) = \alpha^{-1} a^{-2} da \wedge db = \alpha^{-1} \mu.$$

On conclut que μ est invariante à gauche sur G, mais qu'elle n'est pas invariante à droite. De plus, $\Delta(g) = \alpha^{-1}$ est un homomorphisme surjectif sur $\mathbb{R}^*$.

3. Cohomologie des espaces homogènes compacts

Soit G un groupe de Lie compact connexe de dimension N. On fixe une orientation sur G et une N-forme invariante à droite μ sur G d'intégrale égale à 1. On la voit comme une mesure, l'intégrale d'une fonction continue u sur G étant donnée par $\int_G u \, d\mu = \int_G u\mu$.

Soit X une variété de dimension n, de classe C^∞, munie d'une action à gauche transitive de classe C^∞ de G. Pour $g \in G$, on note $\pi(g) : X \to X$ l'action de g sur X.

1– Fixons un point $x_0 \in X$, de stabilisateur H. Soit $f : G \to X$ l'application orbitale $g \mapsto f(g) = \pi(g)(x_0)$. Montrer que si ω est une forme différentielle invariante par G sur X, alors $f^*\omega$ est une forme différentielle invariante à gauche sur G.

2– Montrer que toute forme différentielle invariante par G sur X est de classe C^∞.

3– Soit ω une forme différentielle sur X. On voit $g \mapsto \pi(g)^*\omega$, $G \to \Omega^\cdot(X)$, comme une fonction sur G (à valeurs dans un espace vectoriel) et on note $P\omega = \int_G \pi(g)^*\omega \, d\mu$ son intégrale sur G. Montrer que $P\omega$ est invariante par l'action de G.

4– Montrer que l'opérateur P sur les formes différentielles commute avec la différentielle extérieure et induit l'identité en cohomologie.

5– Soit $\Omega^\cdot_G(X)$ l'espace des formes différentielles G-invariantes sur X. Montrer qu'il est stable par la différentielle extérieure. On note $H^\cdot_G(X)$ sa cohomologie. Montrer que l'injection $\Omega^\cdot_G(X) \to \Omega^\cdot(X)$ induit un isomorphisme en cohomologie, $H^\cdot_G(X) \simeq H^\cdot(X)$.

6– On suppose que $G = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et $X = G$ avec l'action de G sur lui-même par translations. Soit $k \leqslant n$. Quelle est la dimension de $H^k(X)$?

7– On revient au cas général. On suppose X orientable. En utilisant la formule de Stokes, montrer qu'une $(n-1)$-forme G-invariante sur X est automatiquement fermée.

8– On admettra la formule suivante : si ξ et η sont des champs de vecteurs de classe C^∞ et ω une 1-forme différentielle de classe C^∞ sur une variété, alors

$$d\omega(\xi,\eta) = \iota_\eta\iota_\xi(d\omega) = \mathcal{L}_\xi(\iota_\eta\omega) - \mathcal{L}_\eta(\iota_\xi\omega) - \iota_{[\xi,\eta]}\omega.$$

En déduire que si ξ et η sont des champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie G et ω une 1-forme différentielle invariante à gauche sur G, alors

$$d\omega(\xi,\eta) = -\omega([\xi,\eta]).$$

9– Dans cette question, $G = X = SO(3)$. Choisir une base de l'espace $\Omega^\cdot_G(G)$ et écrire la matrice de la différentielle extérieure dans cette base.

10– En déduire les dimensions des espaces de cohomologie de $SO(3)$.

Solution :

1– Soit $g \in G$. Alors, pour $h \in G$, $(f \circ L_g)(h) = \pi(gh)(x_0) = \pi(g)(f(h)) = (\pi(g) \circ f)(h)$. Autrement dit, f est équivariante. Il vient

$$L_g^*(f^*\omega) = (f \circ L_g)^*\omega = (\pi(g) \circ f)^*\omega = f^*(\pi(g)^*\omega) = f^*\omega,$$

donc $f^*\omega$ est une forme différentielle invariante à gauche sur G.

2– La forme $f^*\omega$ est de classe C^∞. En effet, si on note $\varphi = (f^*\omega)(e) \in \Lambda^\cdot\mathfrak{g}^*$, $f^*\omega(g) = L_g^*\varphi$ ne dépend que de la multiplication, qui est de classe C^∞. Comme l'action est transitive, f est une fibration. Tout point de X possède un voisinage V au-dessus duquel, à un difféomorphisme près, $f : f^{-1}(V) \simeq H \times V \to V$ est la projection sur le second facteur. Par conséquent, $f^*\omega$ est de classe C^∞ si et seulement si ω l'est.

3– Soit $h \in G$. Alors

$$\begin{aligned} \pi(h)^* P\omega &= \int_G \pi(h)^*(\pi(g)^*\omega)\, d\mu \\ &= \int_G \pi(gh)^*\omega \, d\mu(g) \\ &= \int_G \pi(g')^*\omega \, d\mu(g') \\ &= P\omega, \end{aligned}$$

où on a utilisé le changement de variable $g \mapsto gh = R_h(g)$ et le fait que μ est invariante à droite.

4– Chaque opérateur $\pi(g)^*$ commute avec la différentielle extérieure, donc il en est de même de P. Comme G est connexe, les difféomorphismes $\pi(g)$, $g \in G$, sont tous homotopes, donc induisent l'identité en cohomologie. En faisant la moyenne (on utilise ici que μ est de masse totale 1), on trouve à nouveau l'identité en cohomologie.

5– Plus généralement, comme les opérateurs $\pi(g)^*$ commutent avec la différentielle extérieure, si ω est G-invariante, $d\omega$ l'est aussi. Notons $i : \Omega^\cdot_G(X) \to \Omega^\cdot(X)$ et $\bar{i}$ (resp. $\bar{P}$) l'opérateur induit par i (resp. P) en cohomologie. Alors $P \circ i = Id_{\Omega^\cdot_G(X)}$ et $i \circ P = P$. Par conséquent, $\bar{P} \circ \bar{i} = Id_{H^\cdot_G(X)}$ et $\bar{i} \circ \bar{P} = Id_{H^\cdot(X)}$, donc $\bar{i} : H^\cdot_G(X) \to H^\cdot(X)$ est un isomorphisme.

6– Tout élément $\varphi \in \Lambda^\cdot(\mathbb{R}^n)^*$ définit une forme différentielle invariante sur G, d'où un isomorphisme de $\Lambda^\cdot(\mathbb{R}^n)^*$ sur $H^\cdot_G(X)$. Notons $p : \mathbb{R}^n \to G$ le revêtement universel. Si ω est G-invariante sur G, alors $p^*\omega$ est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ qui est invariante par translations, donc à coefficients constants, donc fermée. Par conséquent, la différentielle extérieure est nulle sur $\Omega^\cdot_G(G)$, la cohomologie en degré k s'identifie à $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ qui est de dimension $\binom{n}{k}$.

7– Comme X est compacte connexe orientée, $H^n(X)$ est de dimension 1, donc $H^n_G(X)$ est aussi de dimension 1. Il existe donc une n-forme G-invariante τ telle que $\int_X \tau = 1$. Soit ω une $(n-1)$-forme G-invariante sur X. Alors $d\omega$ est une n-forme G-invariante. Par conséquent, il existe une constante c telle que $d\omega = c\mu$. D'après la formule de Stokes,

$$c = \int_X c\tau = \int_X d\omega = 0,$$

donc $d\omega = 0$.

8– Soient ξ et η des champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie G et ω une 1-forme différentielle invariante à gauche sur G. Alors $\iota_\eta\omega$ et $\iota_\eta\omega$ sont des fonctions invariantes à gauche sur G, donc constantes, $\mathcal{L}_\xi(\iota_\eta\omega) = \mathcal{L}_\eta(\iota_\xi\omega) = 0$, donc

$$d\omega(\xi,\eta) = -\iota_{[\xi,\eta]}\omega = \omega([\xi,\eta]).$$

9– $\Omega^0_G(G)$ et $\Omega^3_G(G)$ sont de dimension 1. Comme base de $\Omega^0_G(G)$, on choisit la fonction constante 1. $\Omega^1_G(G)$ et $\Omega^2_G(G)$ sont de dimension 3. $\Omega^1_G(G)$ s'identifie au dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$, laquelle s'identifie à $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté. On prend la base duale (e_1^*, e_2^*, e_3^*) de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme base de $\Omega^2_G(G)$, on prend $(e_2^*\wedge e_3^*, e_3^*\wedge e_1^*, e_1^*\wedge e_2^*)$. Enfin, comme base de $\Omega^3_G(G)$, on choisit $e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^*$. Alors

$$de_1^*(\xi,\eta) = -e_1^*(\xi\wedge\eta) = 0$$

sauf si (ξ,η) est une base du plan orthogonal à e_1. Autrement dit, $de_1^* = -e_2^*\wedge e_3^*$. De même,

$$de_2^*(\xi,\eta) = -e_3^*\wedge e_1^*, \quad de_3^*(\xi,\eta) = -e_1^*\wedge e_2^*.$$

Autrement dit, la matrice de $d : \Omega^1_G(G) \to \Omega^2_G(G)$ est l'opposée de la matrice unité. Les autres différentielles sont identiquement nulles.

10– Comme d est nulle ou bijective, $\dim H^1_G(G) = \dim H^2_G(G) = 0$, $\dim H^0_G(G) = \dim H^3_G(G) = 1$.