EXAMEN SYSTÈMES DYNAMIQUES 2016 – M1 ENS

L'épreuve dure trois heures. Les quatres exercices sont indépendants. Les notes de cours sont autorisées.

Exercice 1. Soit S une surface hyperbolique complète. On suppose que son groupe fondamental est non-trivial et non-isomorphe à $\mathbb{Z}$.

1. Montrer qu'il existe une géodésique fermée sur S.

2. On suppose que le volume de S est fini, et on veut montrer que l'union des trajectoires périodiques du flot géodésique est dense dans T^1S. On note $\Phi : \mathbb{R} \times T^1S \to T^1S$ le flot géodésique et $\Phi^t = \Phi(t, \cdot)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2.a. On se donne un vecteur unitaire $(x, v) \in T^1S$, et un voisinage $\mathcal{V}$ de (x, v) dans T^1S. Montrer que pour tout T_0, il existe $(x', v') \in \mathcal{V}$ et $T \geq T_0$ tels que $\Phi^T(x', v') \in \mathcal{V}$.

2.b. On note g_T la classe de la matrice $\begin{pmatrix} e^T & 0 \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de $\pm I$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $T_0 \in \mathbb{R}$ et un voisinage $\mathcal{W}$ de $\pm I$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que pour tout $T \geq T_0$, toute matrice de la forme $W' g_T W^{-1}$ avec $W, W' \in \mathcal{W}$ est conjuguée à une matrice diagonale, la conjugante appartenant à $\mathcal{V}$ (i.e. il existe $T' \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathcal{V}$ tels que $W' g_T W^{-1} = V g_{T'} V^{-1}$).

2.c. Conclure.

3. Quelle est l'adhérence de l'union des orbites périodiques du flot géodésique dans le fibré unitaire tangent à un pantalon d'Hadamard?

Exercice 2. Soit Γ le groupe fondamental d'une surface hyperbolique orientée complète connexe S. On considère l'action libre et proprement discontinue de Γ par homographies sur le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ de sorte que S soit isométrique à $\Gamma \backslash \mathbb{D}$. On note $\partial \mathbb{D}$ le bord de $\mathbb{D}$.

1. Supposons que le groupe Γ est non-trivial et n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}$. Montrer que Γ ne préserve aucune mesure de probabilité sur $\mathbb{D} \cup \partial \mathbb{D}$.

2. Soit $x_0 \in \partial \mathbb{D}$ un point du bord de $\mathbb{D}$. On suppose que l'adhérence de l'orbite de x_0 par Γ n'est pas dense dans $\partial \mathbb{D}$. Montrer que l'on peut plonger isométriquement[1] dans S un demi-plan hyperbolique (*Indication* : on pourra montrer qu'il existe un intervalle d'intérieur non vide dans $\partial \mathbb{D}$ qui est disjoint de toutes ses images par les éléments non triviaux de Γ). En déduire que S n'est pas compacte.

3. Est ce que les orbites de Γ sur $\partial \mathbb{D}$ sont denses si S est un pantalon de Hadamard?

Exercice 3. On note $X_+ = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit de la topologie discrète. On identifie un point $x \in X_+$ avec un mot infini formel de la forme

$$x = a_0 a_1 a_2 \cdots ,$$

où $a_i \in \{0, 1\}$.

[1] Un plongement isométrique est une application injective de classe C^∞ dont la différentielle en tout point est une isométrie.

On note $\{0,1\}^*$ l'ensemble des mots *finis* formels dans l'alphabet $\{0,1\}$. Soit $s : \{0,1\} \to \{0,1\}^*$ définie par $s(0) = 01$ et $s(1) = 10$. On note encore $s : X_+ \to X_+$ l'application qui à $x = a_0 a_1 \cdots$ associe le mot formel obtenu en remplaçant chaque lettre a_i par le mot $s(a_i)$:

$$s(x) = s(a_0)s(a_1)s(a_2)s(a_3)\cdots .$$

(Par exemple $s(010)\cdots = s(0)s(1)s(0)\cdots = 011001\cdots$.) Posons $x_0 = 00\cdots \in X_+$ et, pour tout $n \geq 0$, $x_{n+1} = s(x_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, les premières 2^n lettres de x_n et de x_{n+1} coïncident. En déduire que la suite (x_n) converge vers une limite $x_\infty \in X_+$. La suite x_∞ est appelée la *suite de Thue-Morse*.

Soit maintenant $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, l'espace des suites bi-infinies, muni de la topologie produit de la topologie discrète, et $T : X \to X$ l'application de décalage. On garde les notations précédentes pour X_+, s, x_∞.

2. Soit $Y \subset X$ l'ensemble défini de la manière suivante. Un mot bi-infini y appartient à Y si et seulement si tous ses sous-mots finis apparaissent dans x_∞. Montrer que Y est infini, fermé dans X, et qu'il est invariant par le décalage T.

3. Montrer que x_∞ possède la propriété suivante. Pour tout sous-mot fini w de x_∞ il existe $N > 0$ tel que tout sous-mot fini de x_∞ de longueur N contient w comme sous-mot. En déduire que le système (Y,T) est minimal. [2] Est-ce que (Y,T) est conjugué à un sous-décalage de type fini?

Exercice 4. Soit X, Y deux espaces compacts métrisables, et $T : X \to X$ et $S : Y \to Y$ deux homéomorphismes. Les systèmes (X,T) et (Y,S) sont dit *orbitalement conjugués* s'il existe un homéomorphisme $\varphi : X \to Y$ qui envoie les orbites de T sur les orbites de S, i.e. si pour tout $x \in X$ on a $\varphi(\{T^n(x) \,:\, n \in \mathbb{Z}\}) = \{S^n(\varphi(x)) \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$.

1. Soit $(X,T), (Y,S)$ deux systèmes orbitalement conjugués, et φ comme ci-dessus. Montrer qu'une mesure de probabilité borélienne μ sur X est T-invariante si et seulement si $\varphi_*\mu$ est S-invariante.

2. Montrer que μ est ergodique pour T si et seulement si $\varphi_*\mu$ est ergodique pour S.

Pour tout $m \geq 2$ soit $X_m = \{0, \ldots, m-1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit de la topologie discrète sur $\{0, \ldots, m-1\}$. On considère l'homéomorphisme $T_m : X_m \to X_m$ qui à $x = x_0 x_1 x_2 \cdots \in X_m$ (où $x_i \in \{0, \ldots, m-1\}$) associe

$$\begin{cases} T_m(x) = (x_0+1)x_1x_2\cdots & \text{si } x_0 \neq m-1 \\ T_m(x) = 0T_m(x_1x_2\cdots) & \text{si } x_0 = m-1. \end{cases}$$

Le but de la suite de l'exercice est de démontrer que (X_2, T_2) et (X_3, T_3) ne sont pas orbitalement conjugués.

3. Expliciter l'application inverse de T_m et en déduire que T_m est bien un homéomorphisme.

4. Montrer que (X_m, T_m) est minimal pour tout $m \geq 2$. [3]

5. Montrer que (X_m, T_m) admet une unique mesure de probabilité invariante (*Indication*: regarder la mesure des cylindres, et montrer qu'elle est uniquement déterminée.)

6. Montrer que (X_2, T_2) et (X_3, T_3) ne sont pas orbitalement conjugués (*Indication*: regarder dans les deux systèmes les valeurs possibles de $\mu(C)$, où $C \subset X_m$ est à la fois ouvert et fermé).

---

[2] Rappelons qu'un système est dit minimal si toutes ses orbites sont denses.

[3] Rappelons qu'un système est dit minimal si toutes ses orbites sont denses.