## ALGEBRE-06/08

Documents interdits. Il n'est pas necessaire de finir le sujet pour avoir une tres bonne note. La question I.l est plus difficile.

### I

Un anneau $R$ sera toujours suppose commutatif et unitaire. Soit $\Sigma \subset R$ un sous semi-groupe multiplicatif, i.e., on a $1 \in \Sigma$ et $xy \in \Sigma$ pour tous $x, y \in \Sigma$. Si $M$ est un $R$-module on pose

$$M[\Sigma^{-1}] = \{(m, s) \in M \times \Sigma\}/\sim$$

ou $(m, s) \sim (m', s')$ si et seulement si il y a un element $t \in \Sigma$ tel que $t(s'm - sm') = 0$. On note $m/s$ la classe d'equivalence du couple $(m, s)$. On munit $M[\Sigma^{-1}]$ de la structure de $R$-module telle que $m/s + m'/s' = (s'm + sm')/ss'$ et $t(m/s) = (tm)/s$. Soit $i_M$ le morphisme $M \to M[\Sigma^{-1}]$, $m \mapsto m/1$. On note $ideal(R)$ l'ensemble des ideaux de $R$, $max(R)$ celui des ideaux maximaux, et $spec(R)$ celui des ideaux premiers. Un $R$-module $P$ est plat si pour tout morphisme injectif de $R$-modules $f : M \to N$ l'application $\mathrm{id}_P \otimes f : P \otimes_R M \to P \otimes_R N$ est encore injective. Un anneau est local si il contient un unique ideal maximal.

**I.a.** Démontrer que $R[\Sigma^{-1}]$ est un anneau, que $M[\Sigma^{-1}]$ est un $R[\Sigma^{-1}]$-module, et que tout morphisme de $R$-modules $f : M \to N$ induit un morphisme de $R[\Sigma^{-1}]$-modules $f[\Sigma^{-1}] : M[\Sigma^{-1}] \to N[\Sigma^{-1}]$. Démontrer que si $f : R \to R'$ est un morphisme d'anneaux tel que $f(s)$ est inversible pour tout $s \in \Sigma$, il existe un unique morphisme $g : R[\Sigma^{-1}] \to R'$ tel que $g \circ i_R = f$.

**I.b.** Démontrer qu'un $R[S^{-1}]$-module est la meme chose qu'un $R$-module sur lequel les elements de $\Sigma$ agissent par des automorphismes.

**I.c.** Demontrer que si $m \in M$ alors $i_M(m) = 0$ si et seulement si il existe $t \in \Sigma$ tel que $tm = 0$. Demontrer que si $M$ est un $R$-module de type fini on a $M[\Sigma^{-1}] = 0$ si et seulement si il existe $t \in \Sigma$ tel que $tm = 0$ pour tout $m \in M$.

**I.d.** Demontrer que l'application $R[\Sigma^{-1}] \otimes_R M \to M[\Sigma^{-1}]$, $(r/s) \otimes m \mapsto (rm)/s$ est un isomorphisme de $R[\Sigma^{-1}]$-modules.

**I.e.** Demontrer que si $\mathfrak{p} \in spec(R)$ alors $R - \mathfrak{p}$ est un sous semi-groupe multiplicatif. Dans ce cas on ecrit $M_\mathfrak{p} = M[(R - \mathfrak{p})^{-1}]$. Demontrer que $R_\mathfrak{p}$ est un anneau local. Deduire du lemme de Zorn que si $m \in M$ alors $m = 0$ si et seulement si $m$ s'envoie sur 0 dans $M_\mathfrak{m}$ pour tout $\mathfrak{m} \in max(R)$. Demontrer que $M = 0$ si et seulement si $M_\mathfrak{m} = 0$ pour tout $\mathfrak{m} \in max(R)$.

**I.f.** Soit $P$ un $R$-module plat. Demontrer que si $R \to S$ est un morphisme d'anneaux, alors $S \otimes_R P$ est un $S$-module plat. Demontrer que si $f : M \to N$ est un morphisme de $R$-modules alors $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{id}_P \otimes f) = P \otimes_R \mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Coker}\,(\mathrm{id}_P \otimes f) = P \otimes_R \mathrm{Coker}\,(f)$.

**I.g.** Démontrer que $R[\Sigma^{-1}]$ est un $R$-module plat. En deduire que $\mathrm{Ker}\,(f)[\Sigma^{-1}] = \mathrm{Ker}\,(f[\Sigma^{-1}])$, $\mathrm{Coker}\,(f)[\Sigma^{-1}] = \mathrm{Coker}\,(f[\Sigma^{-1}])$, et que $f$ est injectif, surjectif si et seulement si $f_{\mathfrak{m}}$ l'est pour tout $\mathfrak{m} \in max(R)$.

**I.h.** Demontrer que si $M_1, M_2, ...M_r$ sont des sous-modules d'un $R$-module $M$ alors $(\bigcap_i M_i)[\Sigma^{-1}] = \bigcap_i (M_i[\Sigma^{-1}])$ (nb : $\bigcap_i M_i$ est le noyau de l'application evidente $M \to \bigoplus_i (M/M_i)$). Demontrer que si $I \in ideal(R)$, $\mathfrak{p} \in spec(R)$ alors $(R/I)_{\mathfrak{p}} = 0$ si et seulement si $I \not\subset \mathfrak{p}$. En deduire le Lemme Chinois, i.e., si $I_1, I_2, \ldots I_r \in ideal(R)$ sont tels que $I_i + I_j = R$ pour tous $i \neq j$ alors $R/(\bigcap_i I_i) \simeq \bigoplus_i (R/I_i)$ (nb : si $\mathfrak{m} \in max(R)$ alors il existe au plus un $i$ tel que $I_i \subset \mathfrak{m}$. En deduire que $(R/(\bigcap_i I_i))_{\mathfrak{m}} \subset \bigoplus_i (R/I_i)_{\mathfrak{m}}$).

**I.i.** Donner un exemple de $\mathbb{Z}$-module non plat. Soit $R = \mathbb{C}[x]$. Le $R$-module $R[y]/(y^2 - x)$ est-il plat ? Le $R$-module $R[y]/(xy - 1)$ est-il plat ? Le $R$-module $R[y]/(xy)$ est-il plat ?

**I.j.** Demontrer qu'un $R$-module $M$ est plat si et seulement si $M_{\mathfrak{m}}$ est un $R_{\mathfrak{m}}$-module plat pour tout $\mathfrak{m} \in max(R)$. En deduire que si $M$ est localement libre, i.e., si $M_{\mathfrak{m}}$ est un $R_{\mathfrak{m}}$-module libre pour tout $\mathfrak{m} \in max(R)$, alors $M$ est plat.

**I.k.** Soit $P$ un $R$-module plat et $a_1, a, \ldots a_r \in R$. Soit $f : R^r \to R$ l'application $(b_i) \mapsto \sum_i a_i b_i$, et $(x_i) \in P^r$ un element tel que $\sum_{i=1}^r a_i x_i = 0$. Demontrer que $f \otimes \mathrm{id}_P$ est une application $P^r \to P$ envoyant $(x_i)$ sur 0. Deduire de I.f qu'il existe des elements $b_{ij} \in R$, $y_j \in P$, $i = 1, 2, \ldots r$, $j = 1, 2, \ldots s$ tels que $\sum_i a_i b_{ij} = 0$ pour tout $j$ et $x_i = \sum_j b_{ij} y_j$ pour tout $i$.

**I.l.** Soit $M$ un $R$-module de type fini, et $x_1, x_2, \ldots x_r \in M$. Supposons que $max(R) = \{\mathfrak{m}\}$. Soit $\bar{R} = R/\mathfrak{m}$, $\bar{M} = M/\mathfrak{m}M$, et $\bar{x}_i$ l'image de $x_i$ dans $\bar{M}$. Supposons que $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$ est une $\bar{R}$-base de $\bar{M}$. Demontrer que $x_1, x_2, \ldots x_n$ engendrent le $R$-module $M$. Demontrer qu'ils forment une $R$-base de $M$ (nb : raisonner par recurrence en utilisant I.k). En deduire que, pour tout anneau $R$, le module $M$ est localement libre si et seulement si il est plat.