Examen de Géométrie différentielle

4 juin 2012

1 Groupes de Lie abéliens

Soit G un groupe de Lie connexe, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On suppose que $[X, Y] = 0$ quels que soient $X, Y \in \mathfrak{g}$.

(A) Montrer que $exp(Y)exp(X) = exp(X) \cdot exp(Y)$. On pourra utiliser le fait que $t \mapsto exp(sX)exp(tY)exp(-sX)$ est le flot de $(exp(sX))_*Y$, et calculer $(\frac{d}{ds}(exp(sX))_*Y)_{|s=s_0}$.

(B) En déduire que $exp(X + Y) = exp(X) \cdot exp(Y)$

(C) En déduire que exp est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}^n, +)$ vers G

(D) Montrer que exp est surjective.

(E) Montrer que le noyau de exp est un sous groupe discret de $\mathbb{R}^n$. On admettra qu'un tel sous-groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}^k$ et donc que G est isomorphe à $\mathbb{R}^{n-k} \times T^k$.

2 Théorème de Darboux

Soit ω une 2-forme différentielle sur une variété M. On suppose que ω est fermée ($d\omega = 0$) et non-dégénérée, c'est à dire que pour tout point x, l'application $\omega(x) : T_xM \longrightarrow (T_xM)^*$ est un isomorphisme. On dit alors que ω est symplectique. On signale sans que cela soit utilisé dans la suite, qu'une forme symplectique ne peut exister que sur une variété de dimension paire. On suppose M compacte.

(A) Soit α une 1-forme sur M de classe C^∞. Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs C^∞, X, tel que $i_X\omega = \alpha$.

(B) Soit $t \mapsto \omega_t$ une famille C^∞ de formes symplectiques. On cherche une équation différentielle, $X(t, x)$, telle que son flot $\varphi^t = \varphi_0^t$ vérifie $(\varphi^t)^*(\omega_t) = \omega_0$. Montrer que

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*(\omega_t)_{|t=0} = L_X\omega_0 + (\frac{\partial}{\partial t}\omega_t)_{|t=0}.$$

En déduire que

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*(\omega_t)_{|t=t_0} = (\varphi^{t_0})^*(L_X\omega_0 + (\frac{\partial}{\partial t}\omega_t)_{|t=t_0}).$$

(C) Montrer que si pour tout t_0, $(\frac{\partial}{\partial t}\omega_t)_{|t=t_0}$ est une forme exacte $d\alpha_{t_0}$, avec $t \mapsto \alpha_t$ dépendant de manière C^∞ de t, on peut trouver X tel que

$$L_X\omega + (\frac{\partial}{\partial t}\omega_t)_{|t=t_0} = 0.$$

(D) Soient ω_0, ω_1 deux formes symplectiques sur $\mathbb{R}^{2n}$ qui coïncident en 0 (i.e. $\omega_0(0) = \omega_1(0)$). Montrer que $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$ est symplectique au voisinage de zéro, et qu'il existe φ difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi^*(\omega_1) = \omega_0$.

3 Surfaces convexes

On dit qu'une surface fermée orientable, et compacte de $\mathbb{R}^3$ est convexe, si sa courbure est > 0 en tout point, ou encore si $\alpha_2 = xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy$, on a $\nu^*(\alpha_2) = K(x)\sigma$ où σ est la forme d'aire de la surface, et $K(x) > 0$.

On veut monter qu'une surface convexe est la frontière d'un ensemble convexe au sens usuel.

(A) Montrer que l'application $\nu : \Sigma \longrightarrow S^2$ est un difféomorphisme local et est de degré strictement positif. On admettra que cela entraîne que c'est un difféomorphisme.

(B) Montrer que si $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est le seul point où $\nu(u_0) = e_z$, Σ est contenue dans $\{(x, y, z) \mid z \leq z_0\}$.

(C) En appliquant le même argument à tous les vecteurs, montrer que si ν est un vecteur de S^2 et $H(u_0, \nu) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u - u_0, \nu\rangle \leq 0\}$, on a $\Sigma \subset \bigcap_{u_0\in\Sigma} H(u_0, \nu(u_0))$.

(D) Montrer que $\bigcap_{u_0\in\Sigma} H(u_0, \nu(u_0))$ est un convexe et a pour bord Σ.

4 Borsuk-Ulam complexe

Soit S^{2n-1} la sphère unité de $\mathbb{C}^n$, munie de l'action de S^1 donnée par

$$e^{i\theta} \cdot (z_1, ..., z_n) = (e^{i\theta}z_1, ..., e^{i\theta}z_n)$$

où $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$.

On dit d'une application $f : S^{2n-1} \longrightarrow S^{2k-1}$ qu'elle est équivariante si elle vérifie $f(e^{i\theta} \cdot (z_1, ..., z_n)) = e^{i\theta} \cdot f(z_1, ..., z_n)$. Le but de cet exercice est de montrer que si une telle application existe, on a $k \geq n$. on suppose dans la suite $k < n$.

(A) Montrer que le quotient de S^{2n-1} par S^1 s'identifie à $\mathbb{C}P^{n-1}$. On pourra montrer qu'une droite de $\mathbb{C}^n$ est définie par un vecteur directeur unitaire défini modulo un complexe de module 1.

(B) Monter que f induit une application de $\mathbb{C}P^{n-1}$ vers $\mathbb{C}P^{k-1}$.

(C) Montrer que si X_n est le champ de vecteurs $X_n(z_1,..,z_n) = (iz_1,...,iz_n)$, il engendre l'action de S^1, c'est à dire que son flot est donné par $\varphi^\theta(z_1,...z_n) = (e^{i\theta}z_1,...,e^{i\theta}z_n)$.

(D) Soit α_n une 1-forme sur S^{2n-1} telle que $i_{X_n}\alpha_n = 1$ et $L_{X_n}\alpha_n = 0$. Montrer que $d\alpha_n$ induit une forme ω_n sur $\mathbb{C}P^{n-1}$, c'est-à-dire que si $\pi : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ est la projection, $d\alpha_n = \pi^*(\omega_n)$. On pourra utiliser le fait que $T_z\mathbb{C}P^{n-1} = T_zS^{2n-1}/(\mathbb{R}X_n)$.

(E) Montrer que ω_n est fermée et que sa classe de cohomologie dans $H^2(\mathbb{C}P^{n-1})$ ne dépend pas du choix de α_n. On pourra montrer que si $i_{X_n}\beta = 0, L_{X_n}\beta = 0$, β induit une forme $\bar\beta$ sur $\mathbb{C}P^{n-1}$ (i.e. $\beta = \pi^*(\bar\beta)$).

(F) Soit α_k une 1-forme sur S^{2k-1} telle que $i_{X_k}\alpha_n = 1$ et $L_{X_k}\alpha_k = 0$.Montrer que $f^*(\alpha_k)$ vérifie les mêmes propriétés que α_n, i.e. $i_{X_n}f^*(\alpha_k) = 1$ et $L_{X_n}f^*(\alpha_k) = 0$.

(G) Montrer que si $\alpha_n = \frac{i}{2}\sum_j z_jd\bar z_j - \bar z_jdz_j = \sum_j x_jdy_j - y_jdx_j$ vérifie les propriétés de la question (D) et que $\omega_n = \sum dz_j \wedge d\bar z_j$ définit bien une 2-forme fermée sur $\mathbb{C}P^{n-1}$.

(H) Montrer que ω_n^n est une forme volume sur $\mathbb{C}P^{n-1}$, que $[\omega_n]^{n-1}$ est un générateur de $H^{2n-2}(\mathbb{C}P^{n-1})$, et que la classe de cohomologie $[\omega_n]$ représente un générateur de $H^2(\mathbb{C}P^{n-1}) = \mathbb{R}$ (on rappelle que $H^2(\mathbb{C}P^{n-1}) = \mathbb{R}$).

(I) Montrer que $f^*([\omega_k]) = [\omega_n]$ et que donc $f^*([\omega_k])^{n-1} \neq 0$.

(J) En déduire une contradiction en utilisant que $[\omega_k]^k = 0$.