# Examen de Géométrie différentielle

17 juin 2013

## 1 Cohomologie

On admettra dans cet exercice la dualité de Poincaré (voir les feuilles de TD dans le cas sans bord) : si $N^{n+1}$ est une variété compacte orientée de bord $M^n$, alors la dualité

$$DP : H^q(N) \longrightarrow H^{n+1-q}(N, M)^*$$

donnée par

$$\alpha \longrightarrow [\beta \longrightarrow \int_N \alpha \wedge \beta]$$

est un isomorphisme.

Soit maintenant $M$ une variété compacte orientée sans bord de dimension $n = 4k$. On considère l'application $B : \Omega^{2k}(M) \times \Omega^{2k}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(\alpha, \beta) \longrightarrow \int_M \alpha \wedge \beta$.

(A) Montrer que $B$ induit une application encore notée $B : H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui définit une forme bilinéaire symétrique sur $H^{2k}(M)$.

(B) Montrer que cette forme est non-dégénérée.

On note $\sigma(M)$ sa signature, c'est à dire la différence entre le nombre de valeurs propres positives et le nombre de valeurs propres négatives.

On veut montrer que si $M = \partial N^{4k+1}$ avec $N$ compacte orientée, alors $\sigma(M) = 0$. On note $i : M \longrightarrow N$ l'inclusion.

(C) On note $\overline{M}$ la variété $M$ avec l'orientation opposée. Comparer $\sigma(M)$ et $\sigma(\overline{M})$.

(D) Soit $B$ une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur un espace vectoriel réel $V$. Montrer que s'il existe un sous-espace isotrope (i.e. sur lequel $B$ s'annule) $W$ tel que $2\dim(W) = \dim(V)$, alors $B$ est de signature nulle.

(E) Montrer que si $[\omega] \in H^{4k}(N)$ alors $\int_M i^*\omega = 0$. En déduire que le sous-espace de $H^{2k}(M)$ donné par $(i^*)H^{2k}(N)$ est isotrope.

(F) Montrer en utilisant la dualité de Poincaré que $2\dim((i^*)H^{2k}(N)) = \dim H^{2k}(M)$. On pourra vérifier que $DP \circ i^* \circ DP^{-1}$ est l'adjoint de l'application cobord $\delta : H^{2k}(M) \longrightarrow H^{2k+1}(N, M)$ qui apparaît dans la suite exacte longue de la paire $(N, M)$. Conclure.

(G) Montrer que si deux variétés de dimension $n = 4k$ compactes orientées sans bord $M_1, M_2$ sont telles qu'il existe $N$ compacte orientée avec $\partial N = M_1 \bigcup \overline{M}_2$, alors $\sigma(M_1) = \sigma(M_2)$.

# 2 Groupes et algèbres de Lie

Soit $G$ un groupe de Lie, $V$ un espace vectoriel et $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ un morphisme de groupes de Lie (i.e. une représentation de $G$ sur $V$). Si $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$, on notera $g \cdot v$ pour $\rho(g)v$ et $X \cdot v$ pour $(d\rho(e)X)v$.

(A) Montrer que le sous-groupe d'isotropie $G_v$ de $v$, i.e. $G_v = \{g \in G \mid g \cdot v = v\}$ est un groupe de Lie ayant pourn algèbre de Lie $\mathfrak{g}_v = \{X \in \mathfrak{g} \mid X \cdot v = 0\}$.

(B) Soit maintenant une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On cherche sous certaines hypothèses un groupe dont $\mathfrak{g}$ soit l'algèbre de Lie. Soit $Aut(\mathfrak{g})$ l'ensemble $\{g \in GL(\mathfrak{g}) \mid \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g},\ [g(\xi), g(\eta)] = g([\xi, \eta])\}$. Montrer que c'est un sous-groupe de Lie de $GL(\mathfrak{g})$.

(C) Soit $V$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Montrer qu'il existe une représentation de $GL(\mathfrak{g})$ sur $V$ telle que $(g \cdot B)(\xi, \eta) = g \cdot B(g^{-1} \cdot \xi, g^{-1} \cdot \eta)$.

(D) Soit $\theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ la forme bilinéaire donnée par le crochet de Lie. Montrer que $G = (GL(\mathfrak{g}))_\theta$ est un groupe égal à $Aut(\mathfrak{g})$, dont l'algèbre de Lie est $Der(\mathfrak{g})$, l'algèbre des dérivations de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire des applications linéaires $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ telles que $D([\xi, \eta]) = [D\xi, \eta] + [\xi, D\eta]$. Montrer que $ad(\xi) : \eta \mapsto [\xi, \eta]$ est dans $Der(\mathfrak{g})$.

(E) On appelle forme de Killing la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ donnée par $K : (\xi, \eta) \mapsto Tr(\zeta \mapsto [\xi, [\eta, \zeta]])$ ou en d'autres termes $K(\xi, \eta) = Trace(ad(\xi) \circ ad(\eta))$. Montrer que $K([\xi, \eta], \zeta) = K(\xi, [\eta, \zeta])$. On pourra utiliser que $ad([\xi, \eta]) = ad(\xi)ad(\eta) - ad(\eta)ad(\xi)$.

(F) On suppose désormais que la forme de Killing est non-dégénérée. Montrer que toute dérivation est de la forme $ad(\xi)$ pour un $\xi \in \mathfrak{g}$. On écrira la forme linéaire $\eta \mapsto Trace(D \circ ad(\eta))$ sous la forme $K(\xi, \eta)$ et on montrera que $D(\eta) = ad(\xi)\eta$. On pourra montrer que $ad(D(\eta)) = D \circ ad(\eta) - ad(\eta) \circ D$, puis que $K([\xi, \eta], \zeta) = Trace(ad(D(\eta)) \circ ad(\zeta))$.

(G) Conclure que l'algèbre de Lie de $G$ est $\mathfrak{g}$.

(H) Montrer que si la forme de Killing est définie négative, alors $G_\theta$ est compact. On pourra montrer que $Aut(\mathfrak{g})$ préserve la forme de Killing.

# 3 Surfaces (Gauss-Bonnet, cas à bord)

Soit $S$ une surface (sous-variété de dimension 2) orientée de $\mathbb{R}^3$. On note $\sigma$ sa forme volume canonique, et $\nu(x)$ la normale unitaire orientée de $S$ en $x$. Soit $U \subset S$ une variété à bord dont le bord est une courbe (i.e. une sous-variété de dimension 1) fermée $\gamma : [0,1] \to S$ tracée sur $S$ et paramétrée par $[0,1]$. On suppose que $|\dot\gamma(t)| = 1$ pour tout $t$. On note $Y$ un champ de vecteurs tangent à $S$ unitaire tel que $(\dot\gamma(t), Y(\gamma(t)))$ soit une base orthonormée directe de $T_{\gamma(t)}S$.

(A) Montrer que $\ddot\gamma(t) \perp \dot\gamma(t)$.

(B) Soit $k_g(t) \in \mathbb{R}$ tel que $k_g(t)Y$ soit la projection de $\ddot\gamma(t)$ sur $T_{\gamma(t)}S$.
Montrer que :

$$k_g(t) = \det(\nu(\gamma(t)), \dot\gamma(t), \ddot\gamma(t)).$$

On dit que $k_g(t)$ est la courbure géodésique de $\gamma$ en $t$.

(C) Soient $U_2 := \{(x,h) \mid |x| = |h| = 1, \langle x,h\rangle = 0\}$ l'espace des vecteurs tangents unitaires à $S^2$ et $U_S := \{(x,h) \mid x \in S, |h| = 1, h \in T_xS\}$ l'espace des vecteurs tangents unitaires à $S$. Soit $T_2$ la forme différentielle sur $U_2$ donnée par $T_2(x,h)(u,v) = \det(x,h,v)$ ; on rappelle que $dT_2 = -p_2^*\alpha_2$ où $\alpha_2 = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$. Enfin $F_\nu : U_S \to U_2$ est l'application définie par $F_\nu(x,h) = (\nu(x), h)$. Montrer que $p_2 \circ F_\nu = \nu \circ p_S$.

(D) Montrer que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_U K(x)\sigma = \frac{-1}{2\pi}\int_\gamma Y^* F_\nu^* T_2.$$

(E) Montrer que :

$$\int_\gamma Y^* F_\nu^* T_2 = \int_0^1 \det(\nu(\gamma(t)), Y(\gamma(t)), dY(\gamma(t))\dot\gamma(t))dt.$$

(F) Montrer que $\det(\nu(\gamma(t)), Y(\gamma(t)), dY(\gamma(t))\dot\gamma(t)) = k_g(t)$.

(G) En déduire que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_U K(x)\sigma = \frac{-1}{2\pi}\int_0^1 k_g(t)dt.$$

(H) Étendre les résultats précédents au cas d'un domaine $U$ bordé par des courbes $\gamma_1, ...., \gamma_k$ telles que $\gamma_j, j \geq 2$ sont des petits cercles tracés sur la surface autour de points $x_j$ et $Y$ n'est pas supposé normal à $\dot\gamma_j(t)$ pour $j \geq 2$.

(I) Soit $U$ une sous-variété à bord de codimension 0 de $S$ bordée par la courbe $\gamma$. En déduire que, si $X$ est un champ de vecteurs sur $S$ et tel que $X(\gamma(t)) \perp \dot\gamma(t)$, et dont les zéros dans $U$ sont $x_1, \ldots, x_k \in U \setminus \partial U$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_U K(x)\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 k_g(t)dt = \sum_j \mathrm{ind}(X, x_j).$$

(J) On appelle géodésique une courbe dont la courbure géodésique est nulle. Montrer que sur la sphère les grands cercles (intersection d'un plan passant par 0 et de la sphère) sont des géodésiques.

(K) Soit $T$ un triangle sphérique, constitué de trois arcs de grand cercle faisant des angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Montrer que si $A$ est l'aire du triangle, on a $A + \pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

# FIN