Examen Algèbre 2

Responsable : Mr O. DEBARRE

Important : vous avez droit de consulter le cours et d'utiliser sans démonstration ses résultats. Si vous voulez utiliser des résultats hors du cours, il faut les démontrer (sauf mention explicite du contraire).

Exercice 1. Soit $K \hookrightarrow L$ une extension de corps galoisienne (finie) de groupe de Galois $\mathfrak{S}_n$, avec $n \geq 5$. Montrer que le degré sur K d'un élément de L est soit 1, soit 2, soit $\geq n$ (on admettra sans démonstration que le seul sous-groupe distingué strict de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$).

Exercice 2. Soit K un corps et soit $P \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On a défini en cours la matrice compagnon $C(P) \in \mathscr{M}_n(K)$. Soit $Q \in K[X]$ un polynôme unitaire. Calculer les invariants de similitude de la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} C(P) & 0 \\ 0 & C(Q) \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. 1) Donner une décomposition primaire minimale pour l'idéal (X^2-2, Y^2-2) dans $\mathbf{C}[X,Y]$. Y a-t-il des idéaux premiers immergés ?

2) Donner une décomposition primaire minimale pour l'idéal (X^2-2, Y^2-2) dans $\mathbf{Q}[X,Y]$.

Problème. Dans tout ce problème, A est un anneau intégralement clos de corps de fractions K_A, que l'on suppose de caractéristique nulle, et $\iota : A \hookrightarrow B$ est une extension finie d'anneaux intègres.

I. Montrer que l'extension $K_A \hookrightarrow K_B$ entre corps de fractions est finie.

Pour les besoins des démonstrations, on introduit maintenant la clôture galoisienne $K_A \hookrightarrow L$ de $K_A \hookrightarrow K_B$ dans une clôture algébrique de K_B (prop. I.6.34 du cours). C'est une extension galoisienne finie de K_A contenant K_B. On note enfin $C \subset L$ la clôture intégrale de A dans L ; c'est une extension entière de A. On a donc le diagramme d'extensions suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A & \hookrightarrow & B & \hookrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_A & \hookrightarrow & K_B & \hookrightarrow & L. \end{array}$$

II. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Le but de cette partie est de montrer que tous les idéaux premiers de C au-dessus de $\mathfrak{p}$ sont conjugués par l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/K_A)$.

Soient $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_2$ des idéaux premiers de C au-dessus de $\mathfrak{p}$. On raisonne par l'absurde, en supposant

$$\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K_A) \qquad \mathfrak{q}_2 \neq \sigma(\mathfrak{q}_1).$$

1) Montrer

$$\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K_A) \qquad \mathfrak{q}_2 \not\subset \sigma(\mathfrak{q}_1).$$

2) Montrer qu'il existe $x \in \mathfrak{q}_2$ qui n'appartient à aucun des $\sigma(\mathfrak{q}_1)$, pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K_A)$.

3) Montrer $\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K_A)} \sigma(x) \in A$.

4) En déduire une contradiction.

III. Montrer que les fibres de l'application canonique $\iota^\sharp : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ sont finies, c'est-à-dire que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers $\mathfrak{q}$ de B tels que $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ (*Indication :* on pourra utiliser le résultat de la partie II).

IV. Montrer le « going-down » : si $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ sont des idéaux premiers de A et $\mathfrak{q}_2$ un idéal premier de B au-dessus de $\mathfrak{p}_2$, il existe un idéal premier $\mathfrak{q}_1$ de B au-dessus de $\mathfrak{p}_1$ tel que $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2$ (*Indication :* on pourra utiliser le résultat de la partie II).

V. Le but de cette partie est de montrer que l'application $\iota^\sharp : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est ouverte, c'est-à-dire que l'image de toute partie ouverte de $\mathrm{Spec}(B)$ est une partie ouverte de $\mathrm{Spec}(A)$.

On rappelle que pour tout élément a d'un anneau A', on a posé en cours

$$D(a) = \{\mathfrak{r} \in \mathrm{Spec}(A') \mid a \notin \mathfrak{r}\}.$$

C'est un ouvert de $\mathrm{Spec}(A')$ et tout ouvert de $\mathrm{Spec}(A')$ est réunion d'ouverts de ce type.

1) Soit $b \in B$ et soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in K_A[X]$ le polynôme minimal de b sur K_A. Montrer $P \in A[X]$.

2) Soit $\mathfrak{q} \in D(b)$. Montrer $\iota^\sharp(\mathfrak{q}) \in \bigcup_{i=1}^{n-1} D(a_i)$.

3) Supposons inversement $\mathfrak{p} \in \bigcup_{i=1}^{n-1} D(a_i)$. Notons R le sous-anneau $A[b]$ de B.

a) Supposons $b \in \sqrt{\mathfrak{p}R}$. Montrer qu'il existe $m \geq 1$ et $a'_0, \ldots, a'_{n-1} \in \mathfrak{p}$ tels que $b^m = \sum_{i=0}^{n-1} a'_i b^i$.

b) Montrer que X^m est divisible par $\bar{P}(X) = X^n + \bar{a}_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1 X + \bar{a}_0$ dans $(A/\mathfrak{p})[X]$ et en déduire une contradiction.

c) On a donc $b \notin \sqrt{\mathfrak{p}R}$. Montrer qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{q}_2$ de R contenant $\mathfrak{p}R$ tel que $b \notin \mathfrak{q}_2$.

d) Montrer qu'il existe $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ avec $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}_2$ et $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

e) En déduire $\mathfrak{p} \in D(b)$.

5) En déduire que l'application $\iota^\sharp : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est ouverte.