Examen de topologie algébrique

- Mercredi 22 janvier 2014. Durée : 3 heures
- Pas de document. Calculatrices inutiles.

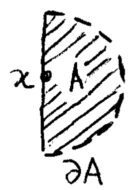
Problème 1 : Triangulations

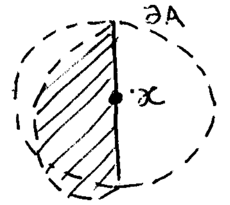
1. Soit K un complexe simplicial géométrique de $\mathbb{R}^n$, *fini* (i.e. avec un nombre fini de simplexes), et $|K| \subset \mathbb{R}^n$ le polyèdre associé. On note s_i le nombre de simplexes de K de dimension i et $\chi(K)$ la somme
$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i s_i$$
Soit $\Bbbk$ un corps. Montrez que pour tout i on a $\dim_{\Bbbk} H_i(|K|, \Bbbk) \leq s_i$, puis que
$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_{\Bbbk} H_i(|K|, \Bbbk) .$$

2. Soit S une surface topologique compacte séparée, et $(K, h : |K| \xrightarrow{\approx} S)$ une triangulation finie de S.
   (a) Soit σ un simplexe de dimension maximale de K. Montrez que $\sigma \setminus \partial\sigma$ ($\partial\sigma$= la réunion des faces de σ) est un ouvert de $|K|$, et déduisez en que σ est de dimension 2.

   Le complexe simplicial géométrique n'a donc que des simplexes de dimension 0, 1 ou 2, qu'on appellera sommets, arêtes, et triangles de K.

   (b) Soit A le demi-disque ouvert :
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 1\} ,$$
   de bord $\partial A = \{(0, y) \ : \ y^2 < 1\}$. Pour $n \geq 2$ on note X_n l'espace obtenu en recollant n copies de A le long de leur bord commun ∂A, et on note x le milieu de $\partial A \subset X_n$.

   A:


   X_3


   Calculez les groupes d'homologie locale $H_i(X_n, X_n \setminus \{x\}, \mathbb{Z})$ pour tout i.

   (c) Déduisez de la question précédente que chaque arête de K est une face d'exactement deux triangles distincts.

3. On conserve la surface topologique compacte séparée S et sa triangulation $(K, h : |K| \xrightarrow{\approx} S)$. On note s le nombre de sommets de K, a le nombre d'arêtes et t le nombre de triangles.
   (a) Montrez que $3a = 2t$ puis que $a = 3(s - \chi(K))$.
   (b) Montrez que $a \leq \binom{s}{2}$ et deduisez-en que
$$s \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(K)}}{2} .$$
   (c) Montrez qu'une triangulation du plan projectif $\mathbb{R}P^2$ possède au minimum 6 sommets.
   (d) Montrez qu'il existe une triangulation de $\mathbb{R}P^2$ à 6 sommets. (On pourra par exemple dessiner la triangulation sur le disque D^2 dont $\mathbb{R}P^2$ est le quotient)

Problème 2 : Topologie du complémentaire d'un noeud

Dans cet exercice, on identifie le cercle S^1 avec l'ensemble des nombres complexes de module 1, et on identifie S^3 avec $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ : \ \max\{|z_1|, |z_2|\} = 1\}$ (l'identification de S^3 est justifiée par l'équivalence des normes). On remarque que $S^3 = S^1 \times D^2 \cup D^2 \times S^1$.

Un nœud (en anglais : *knot*) dans un espace X est un plongement $f : S^1 \hookrightarrow X$. L'espace topologique $X \setminus \operatorname{Im} f = X \setminus f(S^1)$ est appelé le complémentaire du nœud.

A. Homologie du complémentaire d'un nœud de S^n.

1. (Question de cours) Calculez les groupes d'homologie $H_i(S^n \setminus \operatorname{Im} f, \mathbb{Z})$ pour un nœud $f : S^1 \hookrightarrow S^n$, pour $n \geq 2$.

   Pour répondre à cette question, on *admettra* le résultat suivant : si K est un sous espace de S^n, $n \geq 2$, homéomorphe à un disque euclidien D^k alors $\overline{H}_i(S^n \setminus K, \mathbb{Z}) = 0$ pour tout i. On *montrera* comment déduire le calcul de $H_i(S^n \setminus \operatorname{Im} f, \mathbb{Z})$ du résultat admis.

B. Groupe fondamental du complémentaire d'un nœud de S^3.

2. Justifiez brièvement que si $f : S^1 \to S^3$ est un nœud, le groupe fondamental de $S^3 \setminus \operatorname{Im} f$ ne dépend pas du choix du point base (à isomorphisme près).
3. On considère le nœud $f_1 : S^1 \hookrightarrow S^3$ donné par $f_1(z) = (z, 0)$.
   (a) Montrez que $S^1 \times D^2 \setminus \operatorname{Im} f_1$ se rétracte par déformation sur $S^1 \times S^1$.
   (b) Déduisez en que $S^3 \setminus \operatorname{Im} f_1$ se rétracte par déformation sur $D^2 \times S^1$ et calculez le groupe $G_1 := \pi_1(S^3 \setminus \operatorname{Im} f_1, *)$.
4. On considère le nœud $f_2 : S^1 \hookrightarrow S^3$ donné par $f_2(z) = (z^2, z^3)$.
   (a) On note $T := \operatorname{Im} \phi$ et $\operatorname{int} T := \phi(S^1 \times] - \epsilon, \epsilon[\times] - \epsilon, \epsilon[)$, avec $\phi : S^1 \times [-\epsilon, \epsilon] \times [-\epsilon, \epsilon] \to S^3$ l'application définie par

   $$\phi(z, \theta, h) = (z^2 e^{i\theta}(1 - \max\{0, h\}), z^3(1 + \min\{0, h\})) .$$

   Montrez que si ϵ est suffisamment petit, l'application ϕ est un plongement, et que $S^3 \setminus \operatorname{Im} f_2$ se rétracte par déformation sur $S^3 \setminus \operatorname{int} T$.

   (Interprétation géométrique : T est un voisinage en forme de tube autour de $\operatorname{Im} f$.)

   (b) Calculez le groupe fondamental de $S^3 \setminus \operatorname{int} T$, et déduisez-en que le groupe $G_2 := \pi_1(S^3 \setminus \operatorname{Im} f_2, *)$ est isomorphe à $< a, b \,|\, a^2 b^{-3} >$.

On souhaite maintenant montrer que les groupes G_1 et G_2 sont non isomorphes.

5. Expliquez pourquoi si $f, g : S^1 \hookrightarrow S^3$ sont deux nœuds, on ne peut pas utiliser l'abélianisé pour distinguer les groupes fondamentaux de $S^3 \setminus \operatorname{Im} f$ et de $S^3 \setminus \operatorname{Im} g$.
6. Montrez que le groupe des isométries d'un triangle équilatéral est un quotient du groupe G_2, et déduisez-en que G_1 et G_2 ne sont pas isomorphes.

Problème 3 : Mapping Tores

Soient $f_0, f_1 : X \to Y$ deux applications continues. On note T_{f_0,f_1} le quotient

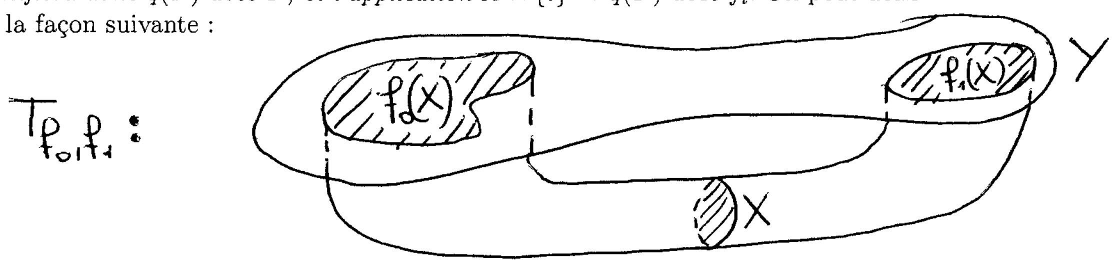
$$T_{f_0,f_1} := (Y \sqcup X \times I) / \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par les identifications $(x,0) \sim f_0(x)$ et $(x,1) \sim f_1(x)$. On note $q : Y \sqcup X \times I \to T_{f_0,f_1}$ l'application quotient.

1. Justifiez que q induit un homéomorphisme de Y sur le sous-espace $q(Y) \subset T_{f_0,f_1}$, et que pour $i = 0$ ou 1, l'application f_i est égale à la composée

$$X \times \{i\} \xrightarrow{q} q(X \times \{i\}) \hookrightarrow q(Y) \xrightarrow[\approx]{q^{-1}} Y .$$

Dans la suite on identifiera donc $q(Y)$ avec Y, et l'application $X \times \{i\} \xrightarrow{q} q(Y)$ avec f_i. On peut donc représenter T_{f_0,f_1} de la façon suivante :



2. On introduit $V := (X \times [0, 1/3[) \sqcup (X \times]2/3, 1])$ le sous espace de $X \times I$ et $W := q(Y \sqcup V)$ le sous-espace de T_{f_0,f_1}.
   (a) Montrez que V se rétracte par déformation sur $X \times \partial I$ et que W se rétracte par déformation sur Y.
   (b) En comparant les suites exactes longues des paires, montrez que l'inclusion $(X \times I, X \times \partial I) \hookrightarrow (X \times I, V)$ induit un isomorphisme en homologie relative.
   (Par le même raisonnement, $(T_{f_0,f_1}, Y) \hookrightarrow (T_{f_0,f_1}, W)$ induit un isomorphisme en homologie relative.)
   (c) A l'aide du théorème d'excision, montrez que l'application $q : (X \times I, V) \to (T_{f_0,f_1}, W)$ induit un isomorphisme en homologie relative.
   (d) Déduisez-en que $q : (X \times I, X \times \partial I) \to (T_{f_0,f_1}, Y)$ induit un isomorphisme en homologie relative.

3. On considère le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont les suites exactes longues de paires

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X \times I, X \times \partial I) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H_{n+1}(q)"] & H_n(X \times \partial I) \arrow[r, "\phi_n"] \arrow[d, "H_n(q)"] & H_n(X \times I) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(q)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(T_{f_0,f_1}, Y) \arrow[r, "\partial"] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(T_{f_0,f_1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

   (a) Montrez que ϕ_n est surjective, puis montrez que pour tout $n \geq 0$, il existe un isomorphisme $\psi_n : H_n(X) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Ker} \phi_n$, tel que la composée suivante est égale à $H_n(f_1) - H_n(f_0)$:

$$H_n(X) \xrightarrow{\psi_n} \operatorname{Ker} \phi_n \hookrightarrow H_n(X \times \partial I) \xrightarrow{H_n(q)} H_n(Y) .$$

   (b) Montrez qu'il existe une suite exacte longue :

$$\cdots \to H_{n+1}(T_{f_0,f_1}) \xrightarrow{\delta} H_n(X) \xrightarrow{H_n(f_1) - H_n(f_0)} H_n(Y) \to H_n(T_{f_0,f_1}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$