Examen Algèbre 1

Responsable : Mr O. DEBARRE

Important : vous pouvez consulter le polycopié et utiliser sans démonstration ses résultats (sauf ceux des exercices ou des TD). Si vous voulez utiliser des résultats hors du cours, il faut les démontrer (sauf mention explicite du contraire).

Exercice 1. Pour chaque entier $n \geq 2$, on considère la forme quadratique

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$$

sur $\mathbf{R}^n$.

a) Pour chaque $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, décomposer f_n en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

b) Déterminer la signature et le rang de f_n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie n, soit V^* son dual, et soit ω un élément de $\bigwedge^2 V^*$.

a) Montrer qu'il existe des éléments $e_1, \dots, e_{2r}$ de V^* formant une famille libre tels que

$$\omega = e_1 \wedge e_2 + \cdots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}$$

(*Indication* : on pourra considérer, en le justifiant, ω comme une forme bilinéaire alternée sur V).

b) En déduire que ω est *décomposable* (c'est-à-dire que ω peut s'écrire $x \wedge y$) si et seulement si

$$\forall \alpha \in \bigwedge^{n-4} V^* \qquad \omega \wedge \omega \wedge \alpha = 0.$$

Exercice 3. On considère la représentation de permutation du groupe $\mathfrak{S}_n$ dans l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$, que l'on décompose en somme de deux sous-représentations : la droite engendrée par le vecteur $(1, \dots, 1)$ et l'hyperplan

$$V_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Il est montré dans le polycopié (on ne le redémontrera donc pas) que V_0 est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$.

Le but de cet exercice est de montrer que si $n \geq 4$, c'est encore une représentation irréductible du groupe alterné $\mathfrak{A}_n$. On procède par contradiction, en supposant qu'il existe un sous-espace vectoriel $W \subset V_0$ stable par $\mathfrak{A}_n$, non nul et distinct de V_0.

a) Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ la transposition (12). Montrer que $W + \tau(W)$ et $W \cap \tau(W)$ sont des sous-espaces stables par $\mathfrak{S}_n$. En déduire $V_0 = W \oplus \tau(W)$.

b) Montrer que si $\dim(W) \geq 2$, il existe un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ non nul dans W tel que $x_1 = x_2$. Conclure.

Exercice 4. Dans tout cet exercice, p est un nombre premier *impair.*

a) Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbf{F}_p$ qui n'est pas un carré.

T.S.V.P.

b) Calculer le cardinal du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$.

c) Exhiber un p-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$.

d) Combien $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ a-t-il de p-sous-groupes de Sylow ?

e) Soit $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ une matrice dont les deux valeurs propres (peut-être confondues) sont dans $\mathbf{F}_p$. Montrer que M est conjuguée, *dans* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$, à l'une des matrices suivantes

$$U(a) := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \ (a \in \mathbf{F}_p) \quad , \quad -U(a) \quad , \quad D(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \ \ (\lambda \in \mathbf{F}_p^\times).$$

f) Montrer que les matrices $D(\lambda)$ et $D(\mu)$ sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ si et seulement si $\mu \in \{\lambda, \lambda^{-1}\}$.

g) Montrer que les matrices $U(a)$ et $U(b)$ sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ si et seulement s'il existe $c \in \mathbf{F}_p^\times$ tel que $b = ac^2$.

h) En déduire que pour les éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ dont les deux valeurs propres sont dans $\mathbf{F}_p$, on obtient au total exactement $\frac{p-3}{2} + 6$ classes de conjugaison distinctes.

i) Pour tout $a, b \in \mathbf{F}_p$ tels que $a^2 - b^2\mu = 1$, on définit un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ en posant

$$M(a,b) := \begin{pmatrix} a & b\mu \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que $M(a,b)$ et $M(a',b')$ sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ si et seulement si $a = a'$ et $b \in \{b', -b'\}$.

j) Montrer qu'on obtient ainsi $\frac{p-1}{2}$ nouvelles classes de conjugaison distinctes.

On admettra qu'on a ainsi obtenu toutes les classes de conjugaison de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ *: il y en a donc au total* $p + 4$.

k) Montrer qu'il existe un morphisme surjectif $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3) \to \mathfrak{A}_4$.

l) En déduire les dimensions de toutes les représentations irréductibles complexes de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_3)$ (on pourra utiliser sans démonstration le résultat de l'exerc. IV.2.17 du polycopié sur les dimensions des représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_4$).

m) Déterminer les dimensions de toutes les représentations irréductibles complexes de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_5)$ (on pourra utiliser la table p. 54 du poly et (sans démonstration) le résultat de l'exerc. IV.2.18 du polycopié sur les dimensions des représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_5$).