Examen du cours d'intégration-probabilités

Le 25 janvier 2016

Durée: 3 heures. Aucun document n'est autorisé.

Question de cours. Citer le théorème de Radon Nikodym pour les mesures complexes.

Exercice I. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soient X_n et $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, des variables aléatoires $\mathscr{F}$-mesurables.

1) Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que si $X_n \to X$ dans L^p, alors $X_n \to X$ en probabilité.

2) Montrer que si $X_n \to X$ $\mathbf{P}$-presque sûrement, alors $X_n \to X$ en probabilité.

3) Trouver un exemple de suites de variables aléatoires réelles convergeant en probabilité mais qui ne converge ni dans L^1 ni presque sûrement.

Exercice II. Étudier la limite éventuelle de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donnée par

$$w_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x \sin(\pi x^2/4)}{1 + x^{n+3}} \, dx \, .$$

Exercice III. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité; soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. $\mathscr{F}$-mesurable dont la fonction de répartition est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \tfrac{3}{5} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \big(1 - e^{-x}\big) + \tfrac{2}{5} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) (1 - 3^{-\lfloor x \rfloor - 1})$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. Calculer explicitement $\mathbf{E}[\cos(uY)]$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. (*Indication: on calculera d'abord la loi de Y pour calculer $\mathbf{E}[e^{iuY}]$.*)

Exercice IV. Soit $(G, *, e)$, un groupe commutatif ($*$ est la loi de composition et e l'élément neutre). On munit G d'une topologie localement compacte à base dénombrable telle que $(x, y) \in G^2 \longmapsto x * y \in G$ soit continue ainsi que $x \in G \longmapsto x^{-1} \in G$. On note $\mathscr{B}(G)$ la tribu des Boréliens de G.

1) Soient $A \in \mathscr{B}(G)$ et $x \in G$. On pose $x * A = \{x * y;\ y \in A\}$. Montrer que $x * A \in \mathscr{B}(G)$.

Une mesure positive $\mu : \mathscr{B}(G) \to [0, \infty]$ est une *mesure de Haar* si c'est une mesure de Radon telle que $\mu(U) > 0$, pour tout ouvert non-vide $U \subset G$ et telle que pour tout $x \in G$ et tout $A \in \mathscr{B}(G)$, $\mu(x * A) = \mu(A)$.

2) Soit μ, une mesure de Haar sur G.

2a) Montrer que pour tout $x \in G$ et pour toute toute fonction $f : G \to [0, \infty]$ qui est $\mathscr{B}(G)$-mesurable, $\int_G f(x * y) \, \mu(dy) = \int_G f \, d\mu$.

2b) On note $I : x \in G \mapsto x^{-1} \in G$, le passage à l'inverse, qui est une application continue. On note μ_I la mesure image de μ par I. Montrer que μ_I est une mesure de Haar.

2c) Soient μ et ν deux mesures de Haar sur G. Montrer qu'elles sont sigma-finies. Soit $f:G^2\to\mathbb{R}_+$, une fonction $\mathscr{B}(G)^{\otimes 2}$-mesurable. Montrer que

$$\int_G \mu(dx)\int_G \nu(dy)\, f(x*y,y)= \int_G \mu(dx)\int_G \nu(dy)\, f(x,y)= \int_G \nu(dx)\int_G \mu_I(dy)\, f(x,y)\ .$$

Expliquer pourquoi cela implique que $\mu\otimes\nu = \nu\otimes\mu_I$. En déduire l'existence d'une constante $c\in\,]0,\infty[$ telle que $\nu = c\mu$ puis montrer que $\mu=\mu_I$ (c'est-à-dire que μ est invariante par passage à l'inverse).

3) On pose $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\backslash\{0\}$, muni de la topologie relative du plan complexe. Trouver les mesures de Haar du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

Exercice V. Soit $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soient $A_n\in\mathscr{F}$, $n\in\mathbb{N}$, des événements supposés indépendants. On pose $a_n=\mathbf{P}(A_n)$, $b_n=\sum_{0\leq k\leq n} a_k$ et $S_n=\sum_{0\leq k\leq n}\mathbf{1}_{A_k}$. On suppose de plus que $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$.

1) Montrer que $S_n/b_n\to 1$ dans L^2.

2) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on pose $p_k=\inf\{n\in\mathbb{N} : b_n\geq k^2\}$. Montrer que p_k est bien défini, que $k^2\leq b_{p_k}<k^2+1$ et que $\mathbf{P}$-p.s. $S_{p_k}/b_{p_k}\to 1$ lorsque $k\to\infty$ (*Indication: ce dernier point peut être le fruit d'une collaboration franco-italo-russe*).

3) Soit un entier $n\in[p_k,p_{k+1}]$; encadrer S_n/b_n à l'aide de b_{p_k}, $b_{p_{k+1}}$, S_{p_k} et $S_{p_{k+1}}$. En déduire, à l'aide de **2)**, que $\mathbf{P}$-p.s. $S_n/b_n\to 1$ lorsque $n\to\infty$.

Exercice VI. Soit $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soit $U_n:\Omega\to[0,1]$, $n\geq 1$, une suite i.i.d. de variables $\mathscr{F}$-mesurables uniformes. Pour tout entier $k\geq 1$, on note ℓ_k la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^k$.

1) On pose $D_k=\{(x_1,\ldots,x_k)\in[0,1]^k : \max(x_1,\ldots,x_{k-1})<x_k\}$. Calculer $\ell_k(D_k)$. Soient $k_p>k_{p-1}>\ldots>k_1\geq 1$, p entiers. Calculer $\ell_{k_p}\big(D_{k_1}\cap D_{k_2}\cap\ldots\cap D_{k_p}\big)$.

2) Montrer que $\mathbf{P}$-p.s. $\overline{\{U_n;n\geq 1\}}=[0,1]$ (cette question est indépendante des autres).

3) On dit que le temps k est un U-*record* si $U_k=\max(U_1,\ldots,U_k)$. On note R_n le nombre de U-records entre les instants 1 et n. Calculer $\mathbf{P}(k$ est un U-record$)$; montrer que les événements $\{k$ est un U-record$\}$, $k\geq 1$, sont indépendants.

4) À l'aide de **Exercice V**, montrer que $\mathbf{P}$-p.s. $R_n/\log n\to 1$ lorsque $n\to\infty$.

5) Soient $X_n:\Omega\to\mathbb{R}$, $n\geq 1$, des v.a. $\mathscr{F}$-mesurables i.i.d. de loi diffuse. On note $\mathbb{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1,\ldots,n\}$. Montrer que $\mathbf{P}$-p.s. les v.a. X_n sont distinctes. Montrer ensuite que pour tout $n\geq 1$, il existe des permutations aléatoires $\sigma_n:\Omega\to\mathbb{S}_n$ uniformes et telles que $\mathbf{P}$-p.s. $X_{\sigma_n(1)}<X_{\sigma_n(2)}<\ldots<X_{\sigma_n(n)}$.

6) On dit que k est un X-*record* si $X_k=\max(X_1,\ldots,X_k)$. On note R'_n le nombre de X-records entre les instants 1 et n. Montrer que les n événements $\{k$ est un X-record$\}$, $1\leq k\leq n$, ne dépendent que de σ_n. En déduire (par des arguments très précis) que $\mathbf{P}$-p.s. $R'_n/\log n\to 1$ lorsque $n\to 1$.