Examen du Cours de logique

24 janvier 2013, durée : 3h

Les documents ne sont pas autorisés.

Le sujet est trop long. Je ne m'attends pas à ce que vous traitiez tous les exercices.

Vous pouvez toujours utiliser un résultat d'une question antérieure dans une question ultérieure.

Exercice 1 (Théorie des modèles)

1. Soit T une $\mathcal{L}$-théorie et $\mathcal{L}_P := \mathcal{L} \cup \{P\}$, où P est un nouveau prédicat unaire. Une $\mathcal{L}_P$-structure $\mathfrak{M}$ est une *paire élémentaire de modèles de* T si $\mathfrak{M}\restriction_{\mathcal{L}} \models T$ et si l'ensemble $P^{\mathfrak{M}} \subseteq M$ est l'ensemble de base d'une sous-structure élémentaire de $\mathfrak{M}\restriction_{\mathcal{L}}$.
   Montrer que les paires élémentaires de modèles de T forment une classe axiomatisable de $\mathcal{L}_P$-structures. La $\mathcal{L}_P$-théorie correspondante sera notée T_P.

2. Soit $\mathcal{L}_< = \{<\}$ et $\mathsf{OD} = \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Q}; < \rangle)$. On rappelle le fait suivant vu en TD : OD élimine les quanteurs et est égale à la théorie des ordres (totaux) denses sans extrémités. On note OD_P la théorie des paires élémentaires de modèles de OD (dans le langage $\{<, P\}$).
   On considère la $\{<, P\}$-théorie suivante :
   $$T_{dense} = \mathsf{OD}_P \cup \{\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z < y \wedge Pz))\} \cup \{\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z < y \wedge \neg Pz))\}$$
   (a) Donner un modèle de T_{dense}.
   (b) Montrer que T_{dense} élimine les quanteurs.
   (c) En déduire que T_{dense} est complète.
   (d) Soit $\mathfrak{M} \models T_{dense}$. Montrer que $\mathrm{card}(M) \leq \min\{2^{\mathrm{card}(P^{\mathfrak{M}})}, 2^{\mathrm{card}(\neg P^{\mathfrak{M}})}\}$.
   (e) Montrer que pour tout $\kappa \geq \aleph_0$ il existe un modèle $\mathfrak{M}$ de T_{dense} avec $\mathrm{card}(P^{\mathfrak{M}}) = \mathrm{card}(\neg P^{\mathfrak{M}}) = \kappa$.

3. Revenons à la théorie OD_P.
   (a) Pour $i = 1, 2$, on considère $\mathfrak{M}_i = \langle \mathbb{Q}; <, P^{\mathfrak{M}_i} \rangle \models \mathsf{OD}_P$, où $P^{\mathfrak{M}_1} = \mathbb{Q}_{<0} \cup [1, 2) \cup (3, 4) \cup (5, 6)$ et $P^{\mathfrak{M}_2} = \mathbb{Q}_{<0} \cup [1, 2) \cup [3, 4) \cup (5, 6)$. Montrer que $\mathfrak{M}_1 \not\equiv \mathfrak{M}_2$.
   (b) Montrer que OD_P a $2^{\aleph_0}$ complétions (2-à-2 non-équivalentes).
   (c) En déduire qu'il existe une complétion de OD_P qui est indécidable.
   (d) Exhiber une complétion non récursivement axiomatisable de OD_P.

Exercice 2 (Théorie des ensembles : Schéma de réflexion et non-finie-axiomatisabilité de ZF^-)

1. Soit $\mathcal{U}$ un modèle de ZF^-, et soit $\mathcal{Z} \subseteq \mathrm{Ord} \times \mathcal{U}$ une *hiérarchie continue d'ensembles*, c'est-à-dire une classe fonctionnelle de domaine Ord, notée $\alpha \mapsto Z_\alpha$, qui satisfait aux propriétés suivantes :
   - $\mathcal{Z}$ est croissante : si $\alpha \leq \beta$, alors $Z_\alpha \subseteq Z_\beta$;
   - $\mathcal{Z}$ est continue : si λ est un ordinal limite, alors $Z_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} Z_\beta$.

   On note Z la classe donnée par la formule $\psi(x) = \exists\alpha\exists y(\mathcal{Z}(\alpha, y) \wedge x \in y)$. On a donc "$Z = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} Z_\alpha$".

   Soit $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une formule. On dit que Z_α *reflète* φ si

   $$\mathcal{U} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \big(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \in Z_\alpha \to (\varphi^Z(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{Z_\alpha}(x_1, \ldots, x_n))\big).$$

   (a) Montrer que si φ est une formule sans quanteurs, alors φ se reflète dans tout Z_β.

   (b) Soit φ une formule et I un ensemble non vide d'ordinaux. Montrer que si φ ainsi que toute sous-formule de φ se reflète dans Z_i pour tout $i \in I$, alors φ (ainsi que toute sous-formule de φ) se reflète dans $Z_{\sup I}$.

   (c) Soit α un ordinal et $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une formule. Montrer qu'il existe $\beta > \alpha$ tel que Z_β reflète φ.

2. Le but de cette partie est de montrer que si la théorie ZF^- est consistante, alors elle n'est pas finiment axiomatisable.

   (a) Montrer l'existence d'une *relativisée uniforme* : pour toute formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ il existe une formule $\tilde{\varphi}(y, x_1, \ldots, x_n)$ telle que pour tout $\mathcal{U} \models \mathrm{ZF}^-$, tout $a \in U$ et tous $b_1, \ldots, b_n \in a$ on ait

   $$\langle a; \in\restriction_a \rangle \models \varphi[b_1, \ldots, b_n] \text{ si et seulement si } \mathcal{U} \models \tilde{\varphi}[a, b_1, \ldots, b_n].$$

   Comme au cours, dans ce qui suit nous écrivons $a \models \varphi$ au lieu de $\langle a; \in\restriction_a \rangle \models \varphi$.

   (b) On se place dans un modèle $\mathcal{U} \models \mathrm{ZF}^-$. Montrer que si V_α satisfait à l'axiome des parties pour $\alpha > 0$, alors α est limite.

   Rappelons un résultat du cours : dans $\mathcal{U} \models \mathrm{ZF}^-$, $\mathrm{Ord}(x)$ est absolue pour tout V_β avec β limite. De plus, pour ce qui suit, on admettra que si $V_\beta \models \mathrm{ZF}$, alors la classe fonctionnelle $\alpha \mapsto V_\alpha$ est absolue pour V_β.

   (c) On se place dans un modèle $\mathcal{U} \models \mathrm{ZF}^-$. On suppose que $V_\beta \models \mathrm{ZF}$. Soit χ est un énoncé avec $\mathrm{ZF} \models \chi$. Montrer que $V_\beta \models \tilde{\chi}[V_\alpha]$ pour un $\alpha < \beta$.

   (d) Montrer que si la théorie ZF est consistante, elle n'est pas finiment axiomatisable.
   [Indication : on pourra considérer le plus petit ordinal β tel que $V_\beta \models \mathrm{ZF}$.]

   (e) Conclure : si ZF^- est consistante, alors ZF^- n'est pas finiment axiomatisable.

Exercice 3 (Récursivité)
Dans le cours, la construction des fonctions universelles φ^n dépend d'un codage relativement arbitraire des machines de Turing. Le but de cet exercice est de montrer que ces codages sont en fait sans importance, seuls comptent le fait d'énumérer et le fait de pouvoir paramétriser.

On considère une famille ψ de fonctions récursives partielles $\psi^n \in \mathcal{F}^*_{n+1}$ et on note, pour tout $e \in \mathbb{N}$, $\psi^n_e = \lambda\overline{x}.\psi^n(e,\overline{x})$. On dit que la famille ψ est *acceptable* si elle vérifie :

(Enu) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $e \mapsto \psi^n_e$ est surjective sur l'ensemble des fonctions partielles récursives.

(Par) Pour tous m, $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction récursive totale t^m_n telle que, pout tout $\overline{x} \in \mathbb{N}^n$, $\overline{y} \in \mathbb{N}^m$ et $e \in \mathbb{N}$:

$$\psi^{m+n}_e(\overline{x},\overline{y}) = \psi^m_{t^m_n(e,\overline{x})}(\overline{y}).$$

1. Soit $\{f_n\}$ une famille de fonctions récursives bijectives telles que pour tout n, $e \in \mathbb{N}$ et $\overline{c} \in \mathbb{N}^n$, $\psi^n_e(\overline{x}) = \varphi^n_{f_n(e)}(\overline{x})$. Montrer que ψ est acceptable.

2. Montrer que si ψ est acceptable il existe deux familles de fonctions récursives totales $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ telles que pour tous $e, n \in \mathbb{N}$ on ait
$$\psi^n_e = \varphi^n_{f_n(e)} \text{ et } \varphi^n_e = \psi^n_{g_n(e)}.$$

La suite de cet exercice consiste à montrer que comme dans la question 1), on peut toujours prendre les f_n bijectives (et $g_n = f_n^{-1}$). On suppose donc, par la suite, que ψ est acceptable.

3. On aura besoin du lemme de « bourrage », i.e. pour tout n, il existe une fonction δ_n avec $\delta_n(x) > x$ pour tout x telle que $\psi^n_{\delta_n(e)} = \psi^n_e$.
   (a) Soit $\alpha \in \mathcal{F}_{p+1}$ récursive totale et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale $h \in \mathcal{F}_p$ telle que pour tout $\overline{x}$, on ait :
   $$\psi^n_{\alpha(\overline{x},h(\overline{x}))} = \psi^n_{h(\overline{x})}.$$
   (b) Montrer que pour tout n, il existe une fonction récursive totale $\kappa_n \in \mathcal{F}_1$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\psi^n_{\kappa_n(k)}$ est la fonction constante égale à k.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe une fonction récursive totale $h \in \mathcal{F}_2$ telle que :
   $$\begin{aligned} \psi^n_{h(k,t)} &= \psi^n_{\kappa_n(k)} \text{ si } h(k,t) \leq t \\ &= \psi^n_t \text{ sinon} \end{aligned}$$
   (d) En déduire l'existence de δ_n.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il existe une fonction récursive totale $w \in \mathcal{F}_2$ telle que pour tout x, $l \in \mathbb{N}$, si $l = \langle x_1 \ldots x_k \rangle$ alors $w(x,l) \notin \{x_1 \ldots x_k\}$ et $\psi^n_x = \psi^n_{w(x,l)}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction récursive bijective f_n telle que pour tout $e \in \mathbb{N}$, $\psi^n_e = \varphi^n_{f_n(e)}$.

Solution 1 1. La théorie T_P est donnée par les axiomes suivants

$$T \cup \{\forall \overline{x}(\bigwedge_i P(x_i) \to [\exists y\ \varphi[\overline{x}, y] \to \exists y\ (P(y) \wedge \varphi[\overline{x}, y])]) \mid \varphi[\overline{x}, y]\ \mathcal{L}\text{-formule}\}.$$

Par le test de Tarski, l'ensemble des réalisations de P est bien une sous-structure élémentaire de la $\mathcal{L}$-structure totale.

2. (a) On considère $M = \mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel et on interprète P par $\mathbb{Q}$. On a bien $(M, <) \models \mathsf{OD}$ et $(P^{\mathfrak{M}}, <) \simeq (\mathbb{Q}, <) \models \mathsf{OD}$. Par élimination des quanteurs dans OD, $\mathbb{Q} \prec \mathbb{R}$. De plus, entre deux réels distincts on trouve bien un rationnel et un irrationnel.

   (b) Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ deux modèles de T_{dense} qui contiennent une sous-structure commune A. Toute $\mathcal{L}_P(A)$-formule sans quanteurs de $\mathcal{L}_P$ est équivalente à une disjonction de conjonctions d'atomes de la forme $x = a$, $x < a$, $x > a$, $P(x)$ et $\neg P(x)$ et des atomes ne contenant pas x (en effet tous les autres atomes peuvent se réécrire à partir de ceux-là). Si pour une formule sans quanteurs $\varphi(x, \overline{y})$ on a $\mathfrak{M} \models \varphi[m, \overline{a}]$ pour un uplet $\overline{a}$ extrait de A, on peut supposer qu'une conjonction d'atomes tels que précédemment est vraie. Si cette conjonction contient $x = a$, alors $m \in A \subseteq N$ et on a fini.

   Sinon, on peut considérer que la conjonction contient exactement un atome parmi $P(x)$ et $\neg P(x)$, de plus il existe $b < c \in \overline{a} \cup \{\pm\infty\}$ tels qu'il n'y a pas de $d \in \overline{a}$ entre b et c et tels que $b < m < c$. Il suffit alors de trouver dans N un élément qui soit aussi entre b et c et qui soit dans P si et seulement si $m \in P$, ce qui est possible par les deux axiomes qu'on a rajouté.

   Par le critère du cours, T_{dense} élimine les quanteurs.

   (c) Tout modèle de T_{dense} contient une sous-structure formée d'un singleton qui n'est pas dans P. De plus, deux telles structures sont isomorphes. Comme T_{dense} élimine les quanteurs, c'est donc une théorie complète, par un résultat du cours.

   (d) Montrons tout d'abord qu'on ne peut pas avoir $\text{card}(M) > 2^{\text{card}(P^{\mathfrak{M}})}$. En effet, il y a au plus $2^{\text{card}(P^{\mathfrak{M}})}$ coupures de $P^{\mathfrak{M}}$. Si $\text{card}(M) > 2^{\text{card}(P^{\mathfrak{M}})}$, alors $\text{card}(\neg P^{\mathfrak{M}}) = \text{card}(M) > 2^{\text{card}(P^{\mathfrak{M}})}$, et par le principe des tiroirs, il y aurait deux éléments distincts de $\neg P^{\mathfrak{M}}$ qui réalisent la même coupure sur $P^{\mathfrak{M}}$, c'est-à-dire tels qu'il n'y a aucun élément de $P^{\mathfrak{M}}$ entre eux, mais cela contredit la théorie T_{dense}. De la même manière on montre que $\text{card}(M) \leq 2^{\text{card}(\neg P^{\mathfrak{M}})}$.

   (e) On rajoute au language un ensemble de nouvelles constantes $\{c_i \mid i < \kappa + \kappa\}$ et on considère la théorie suivante $T' = T_{dense} \cup \{c_i \neq c_j \mid i \neq j < \kappa + \kappa\} \cup \{P(c_i) \mid i < \kappa\} \cup \{\neg P(c_i) \mid \kappa \leq i\}$. Par compacité, T' est consistante. Par le théorème de Löwenheim-Skolem, on peut trouver un modèle $\mathfrak{M}$ de cardinal κ de T'. Dans ce modèle $\text{card}(P^{\mathfrak{M}}) = \text{card}(\neg P^{\mathfrak{M}}) = \text{card}(M) = \kappa$.

3. (a) Soit $Limg(x) = P(x) \wedge \forall z\ (z < x \to (\exists y \neg P(y) \wedge z < y < x))$. Dans $\mathfrak{M}_1$ on a $\forall x_1 x_2\ ((Limg(x_1) \wedge Limg(x_2)) \to x_1 = x_2)$ car le seul point de $P^{\mathfrak{M}_1}$ qui est limite à gauche de points de $\neg P^{\mathfrak{M}_1}$ est 1, alors que dans $\mathfrak{M}_2$, il y a 1 et 3.

   (b) Soit $X \subseteq \mathbb{N}$, on considère alors $\mathfrak{M}^X = \langle \mathbb{Q}, <, P^{\mathfrak{M}^X} \rangle$ où $P^{\mathfrak{M}^X} = \mathbb{Q}_{<0} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (2i+1, 2i+2) \cup \{2i+1 \mid i \in X\}$.

   Soit $Bordg(x) = \exists z (z < x \wedge \forall y (z < y < x \to \neg P(y))) \wedge \exists t (x < t \wedge \forall y (x < y < t \to P(y)))$. On définit de plus $Bordg_0(x) = Bordg(x) \wedge \forall y (y < x \to \neg Bordg(y))$, puis inductivement $Bordg_{n+1}(x) = Bordg(x) \wedge \exists t (t < x \wedge Bordg_n(t) \wedge \forall y (t < y < x \to \neg Bordg(y)))$.

   On a alors $\mathfrak{M}^X \models \forall x (Bordg_n(x) \to P(x))$ si et seulement si $n \in X$ et il y a donc bien $2^{\aleph_0}$ complétions de OD_P.

   (c) Comme il n'y a qu'un nombre dénombrable de fonctions récursives, il ne peut pas y avoir $2^{\aleph_0}$ complétions décidables de OD_P car la fonction qui a une théorie associe la fonction récursive qui la décide est injective. Il y a donc forcément des complétions de OD_P qui ne sont pas décidables.

   (d) Soit $X \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble non récursif. La théorie $T = \text{Th}(\mathfrak{M}^X)$ ne peut pas être récursivement axiomatisable. En effet, si T était récursivement axiomatisable, elle serait décidable (car T est complète). Mais comme $\forall x(Bordg_n(x) \wedge P(x)) \in T$ si et seulement si $n \in X$, et que la fonction $n \mapsto \#\forall x(Bordg_n(x) \wedge P(x))$ est récursive primitive, l'ensemble X serait alors récursif, contredisant le choix de X.

Solution 2 1. Rappelons la définition de la relativisée d'une formule φ à une classe X (où X est définie à l'aide d'une formule $F(x)$) : par induction sur la hauteur de φ, on pose $\varphi^X = \varphi$ pour φ atomique, $(\varphi \wedge \psi)^X = (\varphi^X \wedge \psi^X)$, $(\neg\varphi)^X = \neg(\varphi^X)$, et enfin $(\exists x \varphi)^X := \exists x(F(x) \wedge \varphi^X)$.

(a) Il suit de la définition de la relativisée que si φ est sans quanteur, alors $\varphi = \varphi^Z = \varphi^{Z_\beta}$ pour tout β, d'où le résultat.

(b) Soit φ une formule et I un ensemble d'ordinaux. On pose $\alpha = \sup I$, et on suppose que, pour tout $i \in I$, φ ainsi que toute sous-formule de φ se reflète dans Z_i. On veut montrer que φ se reflète dans Z_α. Par induction sur la hauteur, on peut supposer que Z_α reflète toute sous-formule (propre) de φ. Les cas où $\varphi = (\psi \wedge \chi)$ ou $\varphi = \neg\psi$ suivent alors directement de la définition de la relativisée ainsi que de l'hypothèse d'induction.

Soit maintenant $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists x \psi$, et soient $b_1, \ldots, b_n \in Z_\alpha$. Comme $\mathcal{Z}$ est une hiérarchie croissante et continue, il existe $i \in I$ tel que $b_1, \ldots, b_n \in Z_i$. On a

$\mathcal{U} \models \varphi^Z[\bar{b}]$
$\Rightarrow$ $\mathcal{U} \models \varphi^{Z_i}[\bar{b}]$ (car Z_i reflète φ)
$\Rightarrow$ il existe $c \in Z_i$ tel que $\mathcal{U} \models \psi^{Z_i}[c, \bar{b}]$
$\Rightarrow$ $\mathcal{U} \models \exists x(x \in Z_i \wedge \psi^{Z_\alpha})[\bar{b}]$ (car Z_i et Z_α reflètent ψ)
$\Rightarrow$ $\mathcal{U} \models \exists x(x \in Z_\alpha \wedge \psi^{Z_\alpha})[\bar{b}]$
$\Rightarrow$ $\mathcal{U} \models \varphi^{Z_\alpha}[\bar{b}]$

L'implication $\mathcal{U} \models \varphi^{Z_\alpha}[\bar{b}] \Rightarrow \mathcal{U} \models \varphi^Z[\bar{b}]$ est claire.

(c) On montre le résultat par induction sur la hauteur de φ. Le cas où φ est atomique suit de (a). Soient $\psi_1, \ldots, \psi_n$ les sous-formules propres de φ, et soit α donné. Par hypothèse d'induction, on trouve $\beta_n^0 > \ldots \beta_1^0 > \alpha$ tels que $Z_{\beta_j^0}$ reflète ψ_j, pour $j = 1, \ldots, n$. Soit $\gamma_1 = \beta_n^0$. Ayant construit $\gamma_k \geq \alpha$, on trouve $\beta_n^k > \ldots \beta_1^k > \gamma_k$ tels que $Z_{\beta_j^k}$ reflète ψ_j, pour $j = 1, \ldots, n$. Soit $\beta := \sup_k\{\gamma_k\}$. Par construction, on a $\beta = \sup_k\{\beta_j^k\}$ pour tout j. Donc (b) entraîne que Z_β reflète ψ_j pour tout j.

Si φ est de la forme $(\psi_i \wedge \psi_j)$ ou de la forme $\neg\psi_i$, on en déduit en particulier que Z_β reflète φ.

Si φ est de la forme $\exists x \psi_i$, soit α_1 le plus petit ordinal $\geq \beta = \beta_0$ tel que pour tout uplet $(b_1, \ldots, b_n)$ extrait de Z_β, si $\mathcal{U} \models \varphi^Z[\bar{b}]$, il existe $c \in Z_{\alpha_1}$ tel que $\mathcal{U} \models \psi_i^Z[c, \bar{b}]$. Par ce que nous avons vu plus haut, il existe $\beta_1 > \alpha_1$ tel que Z_{β_1} reflète tous les ψ_j. On continue ainsi, en construisant $\alpha < \beta_0 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 \ldots$, tels que Z_{β_k} reflète tous les ψ_j et tels que, pour tout k, α_{k+1} est le plus petit ordinal $\geq \beta_k$ tel que pour tout uplet $(b_1, \ldots, b_n)$ extrait de Z_{β_k}, si $\mathcal{U} \models \varphi^Z[\bar{b}]$, il existe $c \in Z_{\alpha_{k+1}}$ avec $\mathcal{U} \models \psi_i^Z[c, \bar{b}]$.
Par construction, en utilisant (b) à nouveau, on voit que si $\gamma = \sup\{\alpha_k\} = \sup\{\beta_k\}$, alors Z_γ reflète φ (ainsi que toutes les ψ_j).

2. (a) Par induction sur la hauteur de φ.
- Pour $\varphi(\bar{x})$ atomique, la formule $\tilde{\varphi}(y, \bar{x}) := \varphi$ convient.
- Les formules $\widetilde{(\varphi \wedge \psi)} := \tilde{\varphi} \wedge \tilde{\psi}$ ainsi que $\widetilde{\neg\varphi} := \neg\tilde{\varphi}$ conviennent.
- Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists x_0 \psi$, alors $\tilde{\varphi}(y, x_1, \ldots, x_n) := \exists x_0(x_0 \in y \wedge \tilde{\psi}(y, \bar{x}))$ convient.

Dans les trois cas, la vérification est immédiate.

(b) La formule $y = \mathcal{P}(x)$, c'est-à-dire $\forall z \in y(z \subseteq x)$ est Δ_0 et donc absolue pour tout ensemble transitif a, par un résultat du cours. De plus, on a $\mathcal{P}(b) \subseteq a$ pour tout $b \in a$ dans ce cas. Il s'en suit qu'un ensemble transitif a est modèle de l'axiome des parties si et seulement si $b \in a \Rightarrow \mathcal{P}(b) \in a$. Si $a = V_\beta$, ceci est vérifié si et seulement si β est limite.

(c) Si $V_\beta \models$ ZF, β est limite par la questions 2(b), et la formule Ord(x) ainsi que la classe fonctionnelle $\alpha \mapsto V_\alpha$ sont absolues pour V_β. Dans V_β, la hiérarchie de von Neumann est donc donnée par $(V_\alpha)_{\alpha<\beta}$. Par le schéma de réflexion (dans V_β), il existe $\alpha < \beta$ tel que $V_\alpha \models \chi$. Vu la définition de $\tilde{\chi}$, ceci est équivalent à $V_\beta \models \tilde{\chi}[V_\alpha]$.

(d) On choisit $\mathcal{U} \models$ ZF. On a donc $U = V$. Si ZF était finiment axiomatisable, on trouverait un énoncé χ tel que les théories ZF et $\{\chi\}$ soient équivalentes.

Par le schéma de réflexion (dans $\mathcal{U}$) pour la hiérachie V, il existe β tel que $V_\beta \models \chi$. L'ensembe définissable des ordinaux β tels que $\mathcal{U} \models \tilde{\chi}[V_\beta]$ est donc définissable et non-vide, et il existe β minimal avec cette propriété.

Comme χ axiomatise ZF, on a $V_\beta \models$ ZF. Par la question 2(c), il existe $\alpha < \beta$ tel que $V_\alpha \models \chi$, ce qui contredit la minimalité de β.

(e) Si ZF$^-$ est consistante, ZF est consistante aussi, par un résultat du cours. De plus, si ZF$^-$ est finiment axiomatisable, ZF aussi. On conclut donc par le résultat précédent.

Solution 3 1. Tout d'abord il est facile (par composition) de voir que ψ est une famille de fonctions récursives partielles. Montrons ensuite que ψ a la propriété d'énumération (Enu). Soit $f \in \mathcal{F}_n$ une fonction récursive. Il existe i tel que $f = \varphi_i^n$. Posons $e = f_n^{-1}(i)$. On a alors $\psi_e^n = \varphi_i^n = f$.

Enfin montrons que ψ a la propriété de paramétrisation (Par). Pour $e \in \mathbb{N}$, $\overline{x} \in \mathbb{N}^n$ et $\overline{y} \in \mathbb{N}^m$, on a $\psi_e^{m+n}(\overline{x}, \overline{y}) = \varphi_{f_{n+m}(e)}^{m+n}(\overline{x}, \overline{y}) = \varphi_{s_n^m(f_{n+m}(e),\overline{x})}^m(\overline{y})$. Il suffit donc de poser $t_n^m(e, \overline{x}) = f_m^{-1}(s_n^m(f_{n+m}(e), \overline{x}))$, qui est bien une fonction récursive totale.

2. Soit ψ une famille acceptable. Pour tout n, la fonction φ^n est récursive, et il existe donc i tel que $\varphi_e^n(\overline{x}) = \psi_i^{n+1}(e, \overline{x}) = \psi_{t_1^n(i,e)}^n(\overline{x})$. On peut donc prendre $g_n(e) = t_1^n(i, e)$. De même pour f_n en utilisant le fait que φ est aussi acceptable.

3. (a) On considère la fonction $f : z\overline{xy} \mapsto \psi_{\alpha(\overline{x}, t_{p+1}^n(z,z,\overline{x}))}^n(\overline{y})$ qui est récursive. Soit e tel que $\psi_e^{p+n+1} = f$. On a alors $\psi_{\alpha(\overline{x}, t_{p+1}^n(e,e,\overline{x}))}^n(\overline{y}) = \psi_e^{p+n+1}(e, \overline{x}, \overline{y}) = \psi_{t_{p+1}^n(e,e,\overline{x})}^n(\overline{y})$. On peut donc choisir $h(\overline{x}) = t_{p+1}^n(e, e, \overline{x})$.

   (b) La fonction $g : k\overline{x} \mapsto k$ est récursive (c'est juste une projection), il existe donc e tel que $\psi_e^{n+1} = g$. Par paramétrisation, $\psi_{t_1^n(e,k)}^n$ est la fonction constante égale à k. On pose $\kappa_n(k) = t_1^n(e, k)$.

   (c) On considère la fonction $\alpha \in \mathcal{F}_3$ suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(k,t,z) &= \kappa_n(k) \text{ si } z \leq t \\ &= t \text{ sinon} \end{aligned}$$

   En appliquant la question a) à cette fonction, on obtient la fonction h voulue.

   (d) L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid h(k, t) \leq t\}$ est fini car κ_n est une fonction injective. Il s'en suit donc que pour tout t il existe k tel que $h(k, t) > t$. On pose alors $d_n(t) = \mu k\ h(k, t) > t$ et $\delta_n(t) = h(d_n(t), t)$ qui sont toutes les deux récursives totales. On a bien $\delta_n(t) > t$ et $\psi_{\delta_n(t)}^n = \psi_{h(d_n(t),t)}^n = \psi_t^n$.

4. On peut définir une fonction récursive (primitive) $mem(x, l)$ qui vaut 1 si x appartient à la liste codée par l et 0 sinon. En effet (avec le codage choisi dans le cours), il suffit de rajouter 1 à l, de diviser par $\pi(\lg(l))$ et de vérifier qu'il existe $n \leq l$ tel que $\pi(n)^x$ divise l mais $\pi(n)^{x+1}$ ne divise pas l.

   On note dans ce qui suit $\delta_n^{(t)}(x)$ la fonction δ_n itérée t fois à partir de x. C'est bien une fonction récursive totale en (t, x). On pose alors $v(x, l) = \mu t\ \neg mem(\delta_n^{(t)}(x), l)$ et $w(x, l) = \delta_n^{(v(x,l))}(x)$.

5. Soient f_n et g_n les fonctions de la question 2). On choisit w une fonction comme dans la question précédente, et u son équivalent pour la famille φ. L'idée est alors de rendre f_n et g_n bijectives par un va-et-vient. C'est-à-dire, on construit deux familles cohérentes de fonctions injectives h_i et k_i qui approximent la bijection que l'on cherche, dont le domaine sont les entiers strictement plus petits que i et telles que si $h_j(i) < j$, $k_j(h_j(i)) = i$ (et symétriquement). Les seules valeurs qu'il faut définir sont $h_{i+1}(i)$ et $k_{i+1}(i)$. Pour ce qui est de $h_{i+1}(i)$, si i est dans l'image de k_i, on pose $h_{i+1}(i) = k_i^{-1}(i)$.

Sinon, on pose $h_{i+1}(i) = u(f_n(i), \mathrm{Im}(h_i) \cup \mathrm{dom}(k_i))$. Pour $k_{i+1}(i)$, si i est dans l'image de h_{i+1}, on pose $k_{i+1}(i) = h_{i+1}^{-1}(i)$. Sinon, on pose $k_{i+1}(i) = w(g_n(i), \mathrm{Im}(k_i) \cup \mathrm{dom}(h_{i+1}))$.

Les fonctions h et k sont définies par une récursion mutuelle généralisée, mais via un encodage des paires et des listes, ce schéma est admissible. Montrons, par induction, que h_{j+1} est injective et que si $i \leq j$ et $h_{j+1}(i) \leq j$, $k_j(h_j(i)) = i$ (et symétriquement). Pour ce qui est de l'injectivité, le seul cas qui pourrait poser problème est si $h_{j+1}(j) = k_j^{-1}(j)$ (dans l'autre cas on choisit l'image de j hors de l'image de h_j). Mais, pour que h_{j+1} ne soit pas injective, il faut que $u = k_j^{-1}(j) \in \mathrm{Im}(h_j)$, i.e. il existe $v < j$ tel que $h_j(v) = u$. Mais on a alors, par induction, $v = k_j(h_j(v)) = i$ ce qui est absurde.

Pour ce qui est de la deuxième affirmation, si $u = h_{j+1}(i) < i$, on a $u \in \mathrm{dom}(k_i)$ et donc on doit avoir $u = h_j(i) = k_i^{-1}(i)$ (car dans l'autre cas, $h_j(i)$ n'est pas dans le domaine de k_i), c'est-à-dire $i = k_i(u) = k_{j+1}(h_{j+1}(i)))$. De même, si $i \leq u$, on a $i \in \mathrm{dom}(h_{u+1})$ et donc $v = k_{j+1}(h_{j+1}(i))) = k_{u+1}(u) = h_{u+1}^{-1}(u)$ et donc $h_{j+1}(v) = h_{u+1}(v) = u = h_{j+1}(i)$, par injectivité de h_{j+1}, on a bien $v = i$. Les propriétés symétriques pour k se prouvent de la même manière.

On pose enfin $l_n(x) = k_{x+1}(x)$ qui répond à la question.