Examen du Cours de logique

17 janvier 2012, durée : 3h

Les documents ne sont pas autorisés.

Le sujet est trop long. Je ne m'attends pas à ce que vous traitiez tous les exercices.

Exercice 1 (Théorie des ensembles)
On travaille dans un modèle $\mathcal{U}$ de ZFC. On rappelle que la *clôture transitive de* x, notée $ct(x)$ est le plus petit ensemble transitif contenant x comme sous-ensemble.

Pour tout cardinal infini κ, $\mathcal{H}_\kappa$ désigne la collection des ensembles x tels que $|ct(x)| < \kappa$.

Un cardinal κ est dit *fortement limite* si $2^\lambda < \kappa$ dès que $\lambda < \kappa$.

1. Montrer que $\mathcal{H}_\kappa$ est un ensemble transitif tel que $\mathcal{H}_\kappa \subseteq V_\kappa$.
2. Montrer que $\kappa \subseteq \mathcal{H}_\kappa$.
3. Montrer que si $x, y \in \mathcal{H}_\kappa$ alors $\bigcup x$ et $\{x, y\}$ sont dans $\mathcal{H}_\kappa$.
4. Montrer (proprement) que la structure $(\mathcal{H}_\kappa; \in\restriction_{\mathcal{H}_\kappa \times \mathcal{H}_\kappa})$ satisfait l'axiome de l'union et l'axiome d'extensionalité.
5. Montrer que $\mathcal{H}_\omega = V_\omega$.
6. Montrer que $\mathcal{P}(\omega) \in V_{\aleph_1} \setminus \mathcal{H}_{\aleph_1}$.
7. Soit κ un cardinal régulier. Montrer que pour tout x les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $x \in \mathcal{H}_\kappa$;
   (b) $x \subseteq \mathcal{H}_\kappa$ et $|x| < \kappa$.
8. Montrer que $\mathcal{H}_\kappa = V_\kappa$ pour tout cardinal régulier et fortement limite κ.
   [Indication : On pourra commencer par montrer que si $\alpha \in \kappa$ alors $|V_\alpha| < \kappa$.]
9. Soit κ un cardinal régulier. Montrer que $(\mathcal{H}_\kappa; \in\restriction_{\mathcal{H}_\kappa \times \mathcal{H}_\kappa})$ satisfait l'axiome des parties si et seulement si κ est fortement limite.

Exercice 2 (Théorie des modèles)
Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et T une $\mathcal{L}$-théorie consistante. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{L}$-structures et soit $A \subseteq M$. Une fonction $\sigma : A \mapsto N$ est un *isomorphisme partiel* si pour tous $a_1, \ldots, a_n \in A$ et formule $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}$, on a :

$$\mathcal{M} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathcal{N} \models \phi[\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)].$$

La structure $\mathcal{M}$ est dite *homogène* si pour tout $A \subset M$ fini, tout isomorphisme partiel $\sigma : A \to M$ et tout $B \subset M$ fini contenant A, il existe un isomorphisme partiel $\sigma' : B \to M$ tel que $\sigma'|_A = \sigma$.

On pose $\mathcal{L}_0 = \{<, s\}$ où $<$ est un symbole de relation binaire et s un symbole de fonction unaire.

Soit T_0 la $\mathcal{L}_0$-théorie stipulant que :

– $<$ définit un ordre total (strict) ;
– la fonction s est une bijection de l'univers dans lui-même ;
– pour tout x, $s(x)$ est le successeur de x au sens de l'ordre $<$, formellement :

$$\forall x (x < s(x) \wedge \forall y (y > x \rightarrow y \geq s(x))).$$

Soit $\mathcal{Z}$ la $\mathcal{L}_0$-structure d'univers $\mathbb{Z}$, où $<$ et s sont interprétés respectivement comme l'ordre et la fonction successeur naturels de $\mathbb{Z}$. La structure $\mathcal{Z}$ est clairement un modèle de T_0.
On admettra que la théorie T_0 admet l'élimination des quanteurs dans le langage $\mathcal{L}_0$.

1. Montrer que $\mathcal{Z}$ se plonge dans tout modèle de T_0. En utilisant l'élimination des quanteurs, en déduire que T_0 est complète.

2. Montrer que $\mathcal{Z}$ est homogène.

3. Soit $\mathcal{Z}_2$ la structure d'univers $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$ où $<$ est interprété par l'ordre lexicographique inverse et $s((n,t)) = (n+1,t)$. C'est un modèle de T_0 (on ne demande pas de le vérifier). Montrer que $\mathcal{Z}_2$ n'est pas homogène.

   Pour les questions 4 à 8, on travaille de nouveau avec un langage $\mathcal{L}$ dénombrable quelconque.

4. Soit $(\mathcal{M}_n : n < \omega)$ une suite de $\mathcal{L}$-structures tels que $\mathcal{M}_n \preccurlyeq \mathcal{M}_{n+1}$ pour tout n. Soit $\mathcal{M}_\omega$ la $\mathcal{L}$-structure d'univers $\bigcup_{n<\omega} M_n$ définie de manière naturelle (comme dans le cours).

   (a) Montrer qu'on a $\mathcal{M}_n \preccurlyeq \mathcal{M}_m$ pour tout $n \leq m < \omega$.

   (b) Montrer que pour tout $n < \omega$, on a $\mathcal{M}_n \preccurlyeq \mathcal{M}_\omega$.
   [Indication : On pourra raisonner par induction sur les formules.]

5. (**Cette question est plus difficile. On pourra l'admettre pour continuer.**) Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure dénombrable, $A \subset M$ un sous-ensemble fini et $\sigma : A \to M$ un isomorphisme partiel. Soit $B \subset M$ fini contenant A. Montrer qu'il existe une extension élémentaire dénombrable $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$ et un isomorphisme partiel $\sigma' : B \to N$ tel que $\sigma'|_A = \sigma$.

6. Montrer que l'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

7. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-structure dénombrable $\mathcal{N}' \succcurlyeq \mathcal{M}$ ayant la propriété suivante :
   (+) Pour tout isomorphisme partiel $\sigma : A \to M$, avec $A \subset M$ fini et tout $B \subset M$ fini contenant A, σ s'étend en un isomorphisme partiel $\sigma' : B \to N'$.

8. Montrer qu'il existe une $\mathcal{L}$-structure dénombrable $\mathcal{N}_* \succcurlyeq \mathcal{M}$ qui soit homogène.

9. (*) Déterminer une structure $\mathcal{N}_*$ dans le cas où $\mathcal{M} = \mathcal{Z}_2$; montrer que $\mathcal{N}_*$ est unique dans cette situation.

Exercice 3 (Décidabilité)
Soit $\mathcal{L} = \{P, c\}$, où P est un prédicat unaire et c une constante.

1. Déterminer les $\mathcal{L}$-structures finies et dénombrables à isomorphisme près.
2. En déduire : deux $\mathcal{L}$-structures $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont élémentairement équivalentes si et seulement si
   - $\mathfrak{M} \models Pc$ ssi $\mathfrak{N} \models Pc$, et
   - $\mathfrak{M} \models \exists^{\geq k} x\, Qx$ ssi $\mathfrak{N} \models \exists^{\geq k} x\, Qx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $Q \in \{P, \neg P\}$.

3. Donner une description de l'ensemble des $\mathcal{L}$-théories complètes.

4. Montrer qu'un $\mathcal{L}$-énoncé φ est universellement valide ssi $\mathfrak{M} \models \varphi$ pour toute $\mathcal{L}$-structure finie.

5. Montrer que la $\mathcal{L}$-théorie vide est décidable.
   [Indication : On pourra d'abord montrer que la théorie d'une $\mathcal{L}$-structure finie est décidable.]

Exercice 4 (Interprétation et indécidabilité)
Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux langages, et T une $\mathcal{L}$-théorie. Une *interprétation* $\mathcal{I}_T(\mathcal{L}')$ de $\mathcal{L}'$ dans T est la donnée

- d'une $\mathcal{L}$-formule $\phi_{\mathrm{dom}} = \phi_{\mathrm{dom}}(x)$ telle que $T \vdash \exists x \phi_{\mathrm{dom}}$;
- pour toute relation n-aire $R' \in \mathcal{L}'$, d'une $\mathcal{L}$-formule $\phi_{R'}(x_1, \ldots, x_n)$ telle que

$$T \vdash \forall x_1, \ldots x_n \left(\phi_{R'}(\overline{x}) \to \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_{\mathrm{dom}}(x_i) \right);$$

- pour toute constante $c' \in \mathcal{L}'$, d'une $\mathcal{L}$-formule $\phi_{c'}(x)$ telle que $T \vdash \forall x(\phi_{c'}(x) \to \phi_{\mathrm{dom}}(x)) \wedge \exists^{=1} x \phi_{c'}(x)$, et
- pour toute fonction n-aire $f' \in \mathcal{L}'$, d'une $\mathcal{L}$-formule $\phi_{f'}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ telle que

$$T \vdash \forall x_1, \ldots x_{n+1} \left(\phi_{f'}(\overline{x}) \to \bigwedge_{i=1}^{n+1} \phi_{\mathrm{dom}}(x_i) \right) \wedge \forall x_1, \ldots, x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_{\mathrm{dom}}(x_i) \to \exists^{=1} x_{n+1} \phi_{f'}(\overline{x}) \right).$$

Ainsi, de manière naturelle, à tout modèle $\mathfrak{M} \models T$ est associée une $\mathcal{L}'$-structure $\mathfrak{M}' = \langle M'; \ldots \rangle$ telle que $M' = \phi_{\mathrm{dom}}[\mathfrak{M}]$, $R'^{\mathfrak{M}'} = \phi_{R'}[\mathfrak{M}]$, $\{c'^{\mathfrak{M}'}\} = \phi_{c'}[\mathfrak{M}]$ et $\mathrm{graph}(f'^{\mathfrak{M}'}) = \phi_{f'}[\mathfrak{M}]$, pour les relations, constantes et fonctions de $\mathcal{L}'$, respectivement.

1. Montrer :
   (a) À toute $\mathcal{L}'$-formule $\psi'(x_1, \ldots, x_n)$ est associée une $\mathcal{L}$-formule $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ telle que

   $$T \vdash \forall x_1, \ldots x_n \left(\psi(\overline{x}) \to \bigwedge_{i=1}^{n} \phi_{\mathrm{dom}}(x_i) \right)$$

   et telle que pour tout $\overline{a} \in M'^n$ on ait $\mathfrak{M}' \models \psi'[\overline{a}]$ si et seulement si $\mathfrak{M} \models \psi[\overline{a}]$.

   (b) Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont finis, on peut choisir les formules ψ de manière à ce que $\ulcorner \psi' \urcorner \mapsto \ulcorner \psi \urcorner$ soit donné par une fonction primitive récursive. [Des brèves justifications suffiront.]

2. On considère $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ens} = \{\in\}$ et $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{ar}$. Le but de cette partie est d'établir certains résultats d'indécidabilité dans $\mathcal{L}_{ens}$.

   (a) Donner une $\mathcal{L}$-formule $\phi_{\mathrm{dom}}[x]$ telle que pour tout $\mathfrak{M} \models \mathrm{ZFC}$ on ait $\phi_{\mathrm{dom}}[\mathfrak{M}] = \omega \subseteq M$, c'est-à-dire ϕ_{dom} est satisfaite précisément par les ordinaux finis dans $\mathfrak{M}$.

   On définit naturellement une interprétation $\mathcal{I}_{\mathrm{ZFC}}(\mathcal{L}_{ar}) = \langle \phi_{\mathrm{dom}}; \phi_0, \phi_S, \ldots \rangle$ de $\mathcal{L}_{ar}$ dans ZFC, en utilisant les opérations d'addition, multiplication et successeur usuels sur les ordinaux (de même pour 0 et $<$). Observer que pour tout $\mathfrak{M} \models \mathrm{ZFC}$ on a $\mathfrak{M}' \models \mathcal{P}$. [On ne demande pas de le justifier.]

   (b) En déduire que ZFC est indécidable. [On suppose que ZFC est consistante.]

   (c) Montrer qu'il existe une sous-théorie finie $T_0 \subseteq \mathrm{ZFC}$ telle que les mêmes formules $\phi_{\mathrm{dom}}, \phi_0, \phi_S, \ldots$ définissent une interprétation de $\mathcal{L}_{ar}$ dans T_0 et telle que $\mathfrak{M} \models T_0 \Rightarrow \mathfrak{M}' \models \mathcal{P}_0$.

   (d) Déduire de la question précédente que la $\mathcal{L}_{ens}$-théorie vide est indécidable.

3. Soit $\mathcal{L}$ un langage (fini) contenant au moins un symbole de relation n-aire ou un symbole de fonction n-aire, pour un $n \geq 2$. Montrer que la $\mathcal{L}$-théorie vide est indécidable.