

Du groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe libre

Sylvain Carpentier, Camille Horbez

Sous la direction de Frédéric Paulin

18 juin 2010

Table des matières

1	Introduction	2
2	Groupes libres	2
3	Transformations de Nielsen et description algébrique de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$	5
4	Résultats préliminaires de topologie algébrique	11
4.1	Groupe fondamental	12
4.2	Propriété fonctorielle du groupe fondamental	14
4.3	Revêtements	18
5	L'outre-espace	19
5.1	Définition en termes de graphes métriques marqués	20
5.2	Définition en termes d'actions sur des arbres	24
6	Contractibilité de l'outre-espace	26
7	Réalisations ferroviaires et points fixes des éléments de $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$	38
7.1	Réalisations ferroviaires	39
7.2	Une démonstration d'une conjecture de Scott	46
8	Étude des sous-groupes finis de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$	55
9	Références	61

1 Introduction

Lorsqu'il prononça son célèbre discours d'entrée à l'université d'Erlangen en 1872, Félix Klein dévoila le rapport étroit entre algèbre et géométrie. Dans le but d'unir les différentes avancées de la géométrie du XIX^e siècle, il proposa comme point de convergence l'existence d'un groupe de transformations associé à tout objet géométrique. "Dis-moi, espace, quel groupe agit joliment sur toi, et je te dirai qui tu es." Aujourd'hui, le lien entre groupe et objet géométrique est devenu très naturel, et l'on n'hésite plus à compléter ainsi ce qui aurait pu être le mot d'ordre de Klein : "Dis-moi, groupe, sur quel espace tu agis joliment, et je te dirai qui tu es."

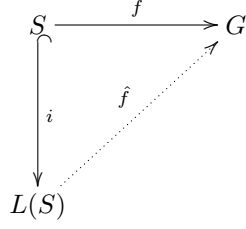
C'est dans cette optique que nous nous proposons d'étudier les groupes des automorphismes extérieurs des groupes libres. L'étude des groupes libres, groupes universels dont tous les groupes sont quotients, s'est faite d'abord au début du XX^e siècle dans le cadre d'une étude combinatoire des groupes, avec notamment les travaux de J. Nielsen. Puis, s'inspirant de travaux de W. Thurston sur les groupes modulaires de surfaces (que nous ne traiterons pas ici), M. Culler et K. Vogtmann ont proposé une étude de nature topologique des groupes libres et de leurs automorphismes, avec la découverte d'un espace sur lequel $Out(\mathbb{F}_n)$ agit naturellement, l'outre-espace.

Nous nous proposons donc, après avoir présenté les groupes libres (partie 2) et donné une description algébrique des groupes de leurs automorphismes extérieurs, en exhibant une partie génératrice (partie 3), d'introduire différents outils de nature topologique pour les étudier, en particulier l'outre-espace de Culler-Vogtmann (partie 5), dont la propriété géométrique essentielle est la contractibilité (partie 6), ou encore les réseaux ferroviaires introduits par M. Bestvina et M. Handel pour répondre notamment à une conjecture de Scott sur les points fixes de l'action de $Out(\mathbb{F}_n)$ sur \mathbb{F}_n (partie 7). Enfin, nous étudierons dans une dernière partie le cardinal des sous-groupes finis de $Out(\mathbb{F}_n)$ (partie 8).

Nous tenons à remercier Frédéric Paulin pour la disponibilité dont il a fait preuve et sa relecture attentive de notre travail.

2 Groupes libres

Définition 2.1. : Soit S un ensemble. On appelle *groupe libre* sur S tout groupe $L(S)$ contenant S tel que pour tout groupe G , toute application $f : S \rightarrow G$ se prolonge de manière unique en un morphisme de groupes $\hat{f} : L(S) \rightarrow G$, autrement dit tel que le diagramme suivant commute :



où i désigne l'inclusion de S dans $L(S)$.

Proposition 2.2. : (Unicité) Soit F_1 et F_2 deux groupes libres sur des ensembles de mêmes cardinaux. Alors F_1 est isomorphe à F_2 . De plus, deux groupes libres sur un même ensemble S sont isomorphes par un unique isomorphisme valant l'identité sur S .

Démonstration : Soit S_1 et S_2 deux ensembles de même cardinal, et σ une bijection entre S_1 et S_2 . Soit F_1 et F_2 des groupes libres sur ces ensembles, et i_1 (resp. i_2) l'injection canonique de S_1 dans F_1 (resp. de S_2 dans F_2). Par la propriété universelle, $i_2 \circ \sigma$ se prolonge de manière unique en un morphisme de groupes $\widehat{i_2 \circ \sigma}$ de F_1 dans F_2 , de même $i_1 \circ \sigma^{-1}$ se prolonge en $\widehat{i_1 \circ \sigma^{-1}}$. Pour $s \in S_1$, on vérifie que $\widehat{i_1 \circ \sigma^{-1}} \circ \widehat{i_2 \circ \sigma}(s) = s$, donc par unicité du prolongement, $\widehat{i_1 \circ \sigma^{-1}} \circ \widehat{i_2 \circ \sigma} = \text{id}_{F_1}$. De même $\widehat{i_2 \circ \sigma} \circ \widehat{i_1 \circ \sigma^{-1}} = \text{id}_{F_2}$. Donc $\widehat{i_2 \circ \sigma}$ est un isomorphisme entre F_1 et F_2 .

La deuxième propriété découle immédiatement de la propriété universelle avec $G = F_2$, $L(S) = F_1$ et f l'inclusion de S dans F_2 . □

La proposition suivante montre l'existence d'un tel groupe en en proposant une construction explicite.

Proposition 2.3. : Soit S un ensemble. L'ensemble des mots sur $S \sqcup S^{-1}$ sans sous-mot ss^{-1} ni $s^{-1}s$ où $s \in S$ est un groupe pour la loi de concaténation-réduction (la réduction consistant à supprimer tous les facteurs de ce type, de gauche à droite, après concaténation). C'est le groupe libre sur S .

Démonstration : Le mot vide est élément neutre et l'inverse d'un mot $u_1 \dots u_n$ est donné par $u_n^{-1} \dots u_1^{-1}$. Le seul point un peu plus délicat est l'associativité de la loi.

Soient u , v et w trois mots réduits. On va distinguer deux cas suivant qu'il y ait ou pas recouvrement des simplifications.

Premier cas : Supposons données des écritures réduites $u = u'a^{-1}$, $v = abc$, $w = c^{-1}w'$, alors

$$(uw)w = (u'bc)(c^{-1}w') = u'bw'$$

et par ailleurs

$$u(vw) = (u'a^{-1})(abw') = u'bw'$$

Deuxième cas : Supposons données des écritures réduites $u = u'(ab)^{-1}$, $v = abc$, $w = (bc)^{-1}w'$, alors

$$(uv)w = (u'c)(c^{-1}b^{-1}w') = u'b^{-1}w'$$

et par ailleurs

$$u(vw) = (u'b^{-1}a^{-1})(aw') = u'b^{-1}w'$$

L'associativité de la loi est donc bien vérifiée dans les deux cas. □

Il y a donc existence et unicité (à isomorphisme près) d'un groupe libre d'un cardinal donné, et on en connaît une présentation de nature combinatoire. Dans le cas d'un cardinal fini, on notera \mathbb{F}_n un groupe libre à n éléments. On peut alors améliorer le résultat démontré en remarquant :

Proposition 2.4. : *Deux groupes libres sur des ensembles S_1 et S_2 sont isomorphes si et seulement si $|S_1| = |S_2|$.*

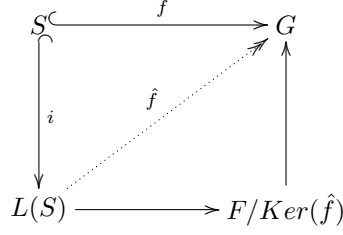
Démonstration : Soient F un groupe libre sur un ensemble S et N le sous-groupe de F engendré par les carrés des éléments de F . Alors N est un sous-groupe caractéristique de F , en particulier c'est un sous-groupe distingué.

Tout élément $x \in F/N$ vérifie $x^2 = 1$, et il est clair que images dans F/N des éléments de S ne sont pas des carrés (un carré est de longueur paire en les symboles de S puisqu'à chaque réduction, on supprime deux symboles), qu'elles engendrent F/N , et qu'elles sont deux à deux distinctes. Ainsi F/N est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(S)}$, qui est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel de dimension le cardinal de S . Comme deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension, ceci achève la démonstration. □

Un groupe libre F est donc caractérisé à isomorphisme près par le cardinal d'une famille génératrice libre, que l'on appellera *rang* de F (noté $\text{Rang}(F)$).

Proposition 2.5. : *Tout groupe est quotient d'un groupe libre.*

Démonstration : Soit G un groupe et S une partie génératrice de G (qui existe toujours, puisqu'on peut choisir G tout entier). On a alors le diagramme suivant, en utilisant successivement la définition du groupe libre et la factorisation du morphisme \hat{f} obtenu (qui est surjectif, puisque S engendre G) :



la flèche entre $F/Ker(\hat{f})$ et G étant un isomorphisme. □

Ceci nous amène à proposer une description des groupes de nature combinatoire, en termes de générateurs et relations (le lecteur pourra consulter par exemple [9] pour plus d'informations).

Définition 2.6. : Soit G un groupe. On appelle *présentation* de G un couple (S, R) , où

- S est un ensemble muni d'une application $i : S \rightarrow G$ telle que $i(S)$ soit une partie génératrice de G .
- R est une partie du groupe libre $L(S)$, telle que le sous-groupe distingué engendré par R (i.e. le plus petit sous-groupe distingué de $L(S)$ contenant R), noté $\langle\langle R \rangle\rangle$, soit le noyau du morphisme canonique $L(S) \rightarrow G$.

Remarque : En particulier, G est isomorphe au groupe quotient $L(S)/\langle\langle R \rangle\rangle$.

Remarque : Étant donné A et B deux groupes, on définit leur *produit libre* $A \star B$ comme l'ensemble des mots $a_1 b_1 \dots a_n b_n$ où $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $a_i \in A, b_i \in B$ tels que si $b_i = 1$ alors $i = n$ et si $a_i = 1$ alors $i = 1$, muni de la loi de concaténation-simplification. On vérifie là encore que c'est un groupe et que le produit libre est associatif à isomorphisme près. Par exemple, on remarque que \mathbb{F}_1 est isomorphe à \mathbb{Z} et que, plus généralement, \mathbb{F}_n est isomorphe à $\mathbb{Z} \star \dots \star \mathbb{Z}$ (n fois). Étant donné F et G deux groupes, on dit que G est un *facteur libre* de F s'il existe un groupe H tel que F soit isomorphe à $G \star H$.

Pour plus d'information sur ce sujet, on renvoie le lecteur à [11], pp. 70-72.

3 Transformations de Nielsen et description algébrique de $Out(\mathbb{F}_n)$

On définit $Out(\mathbb{F}_n) := Aut(\mathbb{F}_n)/Int(\mathbb{F}_n)$, où $Int(\mathbb{F}_n)$ est le groupe des automorphismes intérieurs de \mathbb{F}_n , c'est à dire de la forme $g \mapsto hgh^{-1}$ pour un certain $h \in \mathbb{F}_n$. On se propose d'en exhiber une partie génératrice par une méthode combinatoire développée par Nielsen ([9],

pp. 120-136).

Soit S un ensemble, F le groupe libre sur S et R une partie de $F - \{1\}$. Soit H le sous-groupe de F engendré par R . On distingue deux longueurs pour un élément V de H : sa longueur comme mot réduit sur S notée L_S et sa longueur comme mot réduit sur R qu'on note L_R .

Définition 3.1. : On dit que R est *réduit au sens de Nielsen* sur S s'il satisfait :

(i) Pour tout mot réduit sur R de la forme $V = W_1^{\epsilon_1} \cdot W_2^{\epsilon_2} \dots W_r^{\epsilon_r}$ où pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, $W_k \in R$ et $\epsilon_k \in \{1, -1\}$, dans la réduction de V sur S , il y a pour tout k au moins une lettre de $W_k^{\epsilon_k}$ qui n'est pas supprimée. En particulier, $L_R(V) \leq L_S(V)$.

(ii) En reprenant les notations précédentes, on a pour $k \in 1, \dots, r$, $L_S(W_k) \leq L_S(V)$.

Exemple : Il est clair que S est une partie réduite au sens de Nielsen sur S qui engendre F . On note qu'une telle partie est nécessairement de la forme $\{s^{\epsilon_s}/s \in S\}$ où $\epsilon_s = \pm 1$.

Nous donnons maintenant un critère plus pratique pour déterminer si une famille de mots est réduite au sens de Nielsen. Introduisons d'abord un peu de terminologie .

Définition 3.2. : Soit R un ensemble de mots réduits non triviaux sur S . On entend par *R-symbole* soit un élément de R , soit son mot inverse. Un segment initial d'un *R-symbole* est *isolé* s'il n'apparaît pas comme segment initial dans un autre *R-symbole*. Si W est un mot réduit, le *grand segment initial* de W est le segment initial I de W tel que $\frac{1}{2} L_S(W) < L_S(I) \leq \frac{1}{2} L_S(W) + 1$, et le *petit segment initial* de W est le segment initial I' de W tel que $\frac{1}{2} L_S(W) - 1 \leq L_S(I') < \frac{1}{2} L_S(W)$. On définit de même les segments terminaux isolés, le *grand segment terminal* et le *petit segment terminal* de W .

Lemme 3.3. : Une famille de mots réduits est réduite au sens de Nielsen si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)' le grand segment initial et le grand segment terminal de chaque *W-symbole* sont isolés.
- (ii)' Pour chaque *W-symbole* dont la longueur est paire, sa moitié gauche ou sa moitié droite est isolée.

Démonstration : Supposons R réduit au sens de Nielsen. Si (i)' n'est pas vérifiée, il existe W_1, W_2 dans R et $\epsilon = \pm 1$ tels que $W_1 = AB, W_2^\epsilon = AC$ où A est le grand segment initial de W_1 . Alors on contredit (ii) en considérant $W_1^{-1}W_2^\epsilon$. De même, si (ii)' n'est pas satisfaite, il existe un *R-symbole* W_0 de longueur paire, qui s'écrit UV^{-1} tel que ni U ni V n'est isolé ($L_S(V) = L_S(U)$). Si $W_1 = UA$ et $W_2 = VB$ sont des *R-symboles* avec $A \neq V$ et $B \neq U^{-1}$, alors on contredit (i) avec le mot $W_1^{-1}W_0W_2$ qui est réduit sur R .

Pour la réciproque, on définit une condition supplémentaire :

(iii) Soit $V = W_1^{\epsilon_1} \cdot W_2^{\epsilon_2} \dots W_r^{\epsilon_r}$ un mot réduit sur R ($\epsilon_k = \pm 1$ pour $k \in 1, \dots, r$). Alors lors de la réduction de V sur S , soit le grand segment terminal de $W_r^{\epsilon_r}$, soit la moitié droite de ce symbole (lorsqu'elle est définie) est préservée. (Remarquons qu'alors, ce segment terminal préservé est isolé).

Soit V un mot réduit sur R , de longueur en les R -symboles $L_R(V) = r$. Montrons par récurrence sur r que V vérifie les conditions définies par (i), (ii) et (iii).

On note que si tous les mots réduits sur R satisfont (iii) alors par passage à l'inverse, ils vérifient aussi la propriété symétrique pour $W_1^{\epsilon_1}$.

Le cas où $r = 1$ est immédiat.

Supposons que (i), (ii), (iii) sont vérifiées pour tous les V tels que $L_R(V) = n$ et considérons $V = W_1^{\epsilon_1} \dots W_n^{\epsilon_n} W_{n+1}^{\epsilon_{n+1}}$. Soit IT la forme réduite de $V' = W_1^{\epsilon_1} \dots W_n^{\epsilon_n}$ où T est le segment terminal de $W_n^{\epsilon_n}$ garanti par (iii). Alors $(IT) \cdot W_{n+1}^{\epsilon_{n+1}} = I \cdot (T \cdot W_{n+1}^{\epsilon_{n+1}})$. Puisque T est isolé, on peut écrire $T \cdot W_{n+1}^{\epsilon_{n+1}} = T_1 Y \cdot Y^{-1} U$, avec $T_1 \neq 1$ et $T_1 U$ réduit. De plus, le grand segment initial de $W_{n+1}^{\epsilon_{n+1}}$ étant isolé, on a : $L_S(Y) \leq \frac{1}{2} L_S(W_{n+1})$. Si l'inégalité est stricte, U contient le grand segment terminal de $W_{n+1}^{\epsilon_{n+1}}$, de sorte que U est isolé. Sinon, Y^{-1} est la moitié gauche de $W_{n+1}^{\epsilon_{n+1}}$, et n'est pas isolée, si bien que c'est U qui doit l'être. La forme réduite de V est $IT_1 U$ donc (i) et (iii) sont satisfaits. Enfin, $L_S(V) = L_S(IT_1 Y) + L_S(Y^{-1} U) - 2L_S(Y)$. Comme $L_S(Y) \leq \inf(\frac{1}{2} L_S(W_n), \frac{1}{2} L_S(W_{n+1}))$ et $L_S(W_n) \leq L_S(V')$ on a $L_S(V) \geq \sup(L_S(V'), L_S(W_{n+1}))$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à V' on a (ii). \square

Définition 3.4. : On appelle *transformations de Nielsen élémentaires de rang m* les transformations suivantes agissant sur un m -uplet de mots réduits (W_1, \dots, W_m) .

- (1) Permuter les mots et prendre l'inverse de certains d'entre eux.
- (2) Laisser W_j inchangé pour $j \neq i$, remplacer W_i par $W_i W_k^\eta$ où i et k sont fixés ainsi que η qui vaut 1 ou -1 .
- (3) Laisser W_j inchangé pour $j \neq i$, remplacer W_i par $W_k^\eta W_i$ où i et k sont fixés ainsi que η qui vaut 1 ou -1 .

Il est clair que le m -uplet obtenu par une transformation de Nielsen élémentaire engendre le même sous-groupe que le m -uplet initial. Enfin, si $W = (W_1, \dots, W_m)$, on appelle *longueur de W* l'entier $L_S(W) = \sum_{k=1}^m L_S(W_k)$.

Proposition 3.5. : Soit $W = (W_1, \dots, W_m)$ un m -uplet de mots réduits sur S .

Alors on peut trouver une suite finie (τ_1, \dots, τ_k) de transformations de Nielsen élémentaires telle que :

$$(4) L_S(W) \geq L_S(\tau_1 W) \geq \dots \geq L_S(\tau_k \dots \tau_1 W);$$

(5) $\tau_k \dots \tau_1 W = (W_1', \dots, W_m')$ où il existe $t \in \{1, \dots, m\}$ tel que (W_1', \dots, W_t') soit réduite au sens de Nielsen et $W_{t+1}' = \dots = W_m' = 1$.

Démonstration : Il est clair qu'on peut diminuer strictement la longueur de W s'il ne vérifie pas (i)', en lui appliquant une transformation de type (2) ou (3) bien choisie. Soit W^* un m -uplet minimisant $L_S(W^*)$ parmi ceux pouvant être obtenus en appliquant une suite finie de transformations τ_1, \dots, τ_p , de sorte que (4) soit vérifiée. Alors d'après ce qui précède (i)' est satisfaite, et ce pour tout sous-ensemble de W^* . Grâce à (1), on peut réarranger les mots non triviaux, W_1^*, \dots, W_t^* , par longueur croissante. On procède maintenant par récurrence pour obtenir (5).

Supposons que $\tilde{W} = (W_1^*, \dots, W_{r-1}^*)$ vérifie (ii)'. Quitte à remplacer certains mots par leurs inverses, on peut également supposer que la moitié droite de chaque mot de longueur paire est isolée dans \tilde{W} .

On isole ensuite les moitiés droites des mots de \tilde{W} de W_r^* et de son inverse : si $W_i^* = U_i V_i$ où $1 \leq i \leq r$ et $W_r^* = S_1 V_i$, où $L_S(U_i) = L_S(V_i)$, on remplace W_r^* par $W_r^* W_i^{*-1} = S_1 U_i^{-1}$, qui est un mot réduit car on ne peut pas réduire strictement la longueur totale de \tilde{W} . La moitié droite de W_i^* n'est donc pas un segment terminal de W_r^* . Si W_r^* contient comme segment terminal la moitié droite d'un W_j^* , où $1 \leq j \leq r$ ($W_j^* = U_j V_j$) alors V_j contient proprement U_i^{-1} car V_j ne peut être un segment terminal de W_i^{*-1} . Par conséquent, $W_r^* = S_2 V_j$ avec $L_S(S_2) < L_S(S_1)$. On remplace alors W_r^* par $W_r^* W_j^{*-1}$. La moitié droite de W_i^* et celle de W_j^* ne sont donc pas des segments terminaux de W_r^* . En répétant ce procédé on obtient W_r^* qui ne se termine par aucune moitié droite d'un W_i^* de longueur paire avec $i < r$. Cependant ce n'est pas nécessairement le cas pour W_r^{*-1} . On répète donc la méthode précédente à W_r^{*-1} en sachant que ces deux procédés sont indépendants. En effet, $L_S(W_r^*) \geq L_S(W_l^*)$ pour tout $l < r$. Donc on ne modifie dans le premier cas (au plus) que le petit segment terminal (resp. la moitié droite) de W_r^* si sa longueur est impaire (resp. paire). Et, dans le second cas, c'est-à-dire quand on traite W_r^{*-1} , on ne modifie (au plus) que le petit segment terminal (resp. la moitié gauche) de W_r^* si sa longueur est impaire (resp. paire). Ainsi, ni W_r^* ni W_r^{*-1} ne se terminent par une moitié droite d'un W_i^* avec $i < r$. Si W_r^* a une longueur impaire, alors (W_1^*, \dots, W_r^*) satisfait (ii)'. Sinon, $W_r^* = U_r V_r$. Si U_r et V_r sont isolés, on a de nouveau que (W_1^*, \dots, W_r^*) satisfait (ii)'. Si ni l'un ni l'autre n'est isolé, alors ils doivent être des moitiés de \tilde{W} -symboles (toujours parce que la longueur de W_r^* est maximale). Le mot V_r ne peut être la moitié droite d'un W_l^* ($1 \leq l \leq r$), car la moitié droite d'un W_l^* ne

peut être un segment terminal de W_r^* . De même, U_r ne peut être la moitié gauche d'un W_l^{*-1} . Par conséquent il existe i et j dans $1, r$ tels que $U_r = U_i$ et $V_r = U_j^{-1}$. On modifie maintenant \tilde{W} de la façon suivante : pour $1 \leq k \leq r$, si $U_k = U_i$, on remplace W_k^* par $W'_k = U_j V_k$. Sinon, on pose $W'_k = W_k^*$.

La famille $W' = (W'_1, \dots, W'_{r-1}, W_r^*)$ satisfait (ii)'. En effet, soit $l < r$ et V_l la moitié droite de W'_l et donc de W_l^* . Le mot V_l ne peut être un segment terminal d'un mot de longueur impaire (ni de son inverse) puisque les mots de longueur impaire n'ont pas été modifiés en passant de \tilde{W} à W' , et que \tilde{W} est réduit au sens de Nielsen. Par construction, V_l n'est pas non plus un segment terminal de W_t^* ou de son inverse. Si maintenant V_l est un segment terminal de $W_q^{\epsilon'}$ ($1 \leq q \leq k$), c'est un segment terminal de la moitié droite de $W_q^{\epsilon^*}$ (puisque W' vérifie (i)'). Par conséquent, V_l est un segment terminal de V_q, U_q^{-1} , ou U_i^{-1} . Mais alors V_l est un segment terminal de W_q^* , de W_q^{*-1} ou de W_i^{*-1} , ce qui ne peut pas être car \tilde{W} satisfait (ii)'. La moitié droite de W'_l est donc isolée dans W' pour $l < r$. Enfin, U_j^{-1} , moitié droite de W_r^* , est également isolé dans W' : il ne peut être un segment terminal d'un mot de longueur impaire (ni de son inverse) dans W' . Si U_j^{-1} est un segment terminal de $W_q^{\epsilon'}$, $q < t$, U_j^{-1} doit être la moitié droite de $W_q^{\epsilon'}$. Il est impossible que $\epsilon = 1$ car la moitié droite de $W_q^{\epsilon'}$ ne peut être un segment terminal de W_t^* . L'autre cas est également impossible puisque qu'on contredirait la construction de W'_l pour $l < r$. La famille W' est donc bien réduite au sens de Nielsen.

L'initialisation de la récurrence est immédiate car tout singleton est réduit au sens de Nielsen. \square

Corollaire 3.6. : *Soit H un sous-groupe de type fini du groupe libre F sur S . Alors H est libre, et si $\{W_1, \dots, W_t\}$ est une famille génératrice de H réduite au sens de Nielsen, sa longueur est minimale parmi toutes les familles génératrices de H .*

Démonstration : D'après la proposition précédente, si H est engendré par m mots réduits, il est également engendré par t ($t \leq m$) mots réduits au sens de Nielsen. Par (i), H est alors isomorphe à \mathbb{F}_t .

On note W_1, \dots, W_t une famille réduite au sens de Nielsen qui engendre H et V_1, \dots, V_m une autre famille génératrice de H . Il existe une suite finie de transformations élémentaires telles que $\tau_k \dots \tau_1 V = (V'_1, \dots, V'_m)$ où $V' = (V'_1, \dots, V'_t)$ est réduite au sens de Nielsen et $V_{t+1}' = \dots = V_m' = 1$ (par unicité du rang d'un groupe libre). Il suffit donc de montrer que $L_S(V') \geq L_S(W)$. Soit H_k le sous-groupe de H engendré par tous les mots de H de longueur inférieure à k . Par (ii), H_k est engendré par les mots de longueur inférieure à k dans V' ou dans W . Par unicité du rang, V' et W ont le même nombre de mots de longueur inférieure à k pour tout k donc le même nombre de mots de longueur k pour tout k . Ceci conclut la preuve. \square

En fait, on peut montrer :

Théorème 3.7. (Nielsen-Schreier) : *Tout sous-groupe de \mathbb{F}_n est libre.*

On donne une preuve algébrique de ce résultat, due à Nielsen. Schreier en a proposé une preuve topologique faisant appel à des notions que nous traiterons dans la partie 4.

Démonstration : Soit H un sous-groupe de \mathbb{F}_n . On note H_k comme ci-dessus. Le sous-groupe H_k est de type fini et $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$. Etant donné un t -uplet (W_1, \dots, W_t) réduit au sens de Nielsen qui engendre H_k , on peut l'étendre en une famille réduite au sens de Nielsen génératrice de H_{k+1} . En effet, soit V_1, \dots, V_s une famille réduite au sens de Nielsen qui engendre H_{k+1} . Par (ii), H_k est engendré par les V_i de longueur inférieure à k , disons par V_1, \dots, V_t . Par conséquent, $W_1, \dots, W_t, V_{t+1}, \dots, V_s$ a la même longueur que V_1, \dots, V_s et peut servir de W^* dans le procédé de réduction du théorème. Puisque $L_S(W_i) \leq k < L_S(V_j)$ si $i \leq t$ et $j > t$, et puisque (W_1, \dots, W_t) est réduit au sens de Nielsen, on remarque que dans le procédé de réduction du théorème, W_1, \dots, W_t (aux inverses près) ne seront pas modifiés. Par conséquent, on peut construire une suite croissante d'ensembles W^k telle que W^k est une famille génératrice de H_k réduite au sens de Nielsen. Il suit que $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} W^k$ est une famille génératrice de H qui est réduite au sens de Nielsen. Donc H est libre. \square

Remarque : On peut donc classer les sous-groupes de \mathbb{F}_n à isomorphisme près. Comme un groupe libre, à isomorphisme près, est déterminé par son rang, il suffit de donner la liste exacte des rangs des sous-groupes de \mathbb{F}_n .

Dans le cas $n = 1$, $\mathbb{F}_1 = \mathbb{Z}$, donc ses sous-groupes sont de la forme $k\mathbb{Z}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et sont donc tous triviaux ou isomorphes à \mathbb{F}_1 .

Dans le cas $n \geq 2$, en fixant une partie libre a, b de \mathbb{F}_2 , on peut considérer, pour $k \in \mathbb{N}$ donné, les mots $aba^{-1}, a^2ba^{-2}, \dots, a^kba^{-k}$. Ils sont tous de longueur impaire. Comme la famille de ces mots vérifie (i)', elle est réduite au sens de Nielsen. Donc le sous-groupe engendré par ces mots est isomorphe à \mathbb{F}_k , et on peut de même trouver un sous-groupe isomorphe au groupe libre sur un ensemble dénombrable (on ne peut faire mieux, puisque \mathbb{F}_n est dénombrable). En particulier, le rang d'un sous-groupe de \mathbb{F}_n n'est pas toujours inférieur à n , il peut au contraire prendre toutes les valeurs entières ou valoir \aleph_0 .

Nous allons maintenant utiliser ces résultats dans l'étude du groupe des automorphismes de \mathbb{F}_n .

L'image d'une partie génératrice libre par un élément de $Aut(\mathbb{F}_n)$ est encore une partie génératrice libre de \mathbb{F}_n . Par ailleurs, toute application d'une partie génératrice libre S de \mathbb{F}_n dans une famille W de mots réduits sur S induit un morphisme de \mathbb{F}_n dans lui-même. Le groupe

$Aut(\mathbb{F}_n)$ agit transitivement sur les parties génératrices libres.

À chaque automorphisme de \mathbb{F}_n , nous pouvons associer une transformation des n -uplets de mots réduits. Si $\{a_i\}$ ($1 \leq i \leq n$) est une famille génératrice libre de \mathbb{F}_n , et si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha(a_i) = V_i(\{a_j\})$, alors on définit la *transformation de Nielsen de rang n* , que l'on note N_α , par $(W_1, \dots, W_n) \mapsto (\dots, V_k(W_1, \dots, W_n), \dots)$. Ceci n'est pas un endomorphisme des n -uplets mais on a la propriété suivante : $N_\alpha N_\beta = N_{\beta\alpha}$. L'application $\alpha \mapsto N_\alpha$ est une bijection. Les *automorphismes élémentaires de \mathbb{F}_n* sont ceux qui correspondent à une transformation de Nielsen élémentaire par cette bijection.

Théorème 3.8. (Nielsen) : *Le groupe $Aut(\mathbb{F}_n)$ est engendré par les automorphismes élémentaires. En particulier, il est de type fini.*

Démonstration : Soit $\alpha \in Aut(\mathbb{F}_n)$ et N_α la transformation de Nielsen correspondante. Supposons que $N_\alpha(a_1, \dots, a_n) = (Y_1, \dots, Y_n)$, où les Y_i sont des mots réduits en la famille $\{a_i\}$. La proposition 3.2 nous donne une suite $N_{\alpha_1}, \dots, N_{\alpha_k}$ de transformations de Nielsen élémentaires telles que $N_{\alpha_k} \dots N_{\alpha_1}(Y_1, \dots, Y_n)$ est réduit au sens de Nielsen et dans lequel aucun mot trivial n'apparaît. Or, comme nous l'avions remarqué au début de cette partie, un n -uplet réduit au sens de Nielsen qui engendre \mathbb{F}_n s'écrit $N_\beta(a_1, \dots, a_n)$ où N_β est de type (1). On a donc :

$$N_{\alpha_k} \dots N_{\alpha_1}(Y_1, \dots, Y_n) = N_\beta(a_1, \dots, a_n)$$

$$N_\alpha(a_1, \dots, a_n) = N_{\alpha_1}^{-1} \dots N_{\alpha_k}^{-1} N_\beta(a_1, \dots, a_n).$$

Par conséquent, $N_\alpha = N_{\beta\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1}}$. Par la bijection précédente, $\alpha = \beta\alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1}$. □

Dans le cas où $n \geq 2$, on peut être plus précis et exhiber une partie génératrice de $Aut(\mathbb{F}_n)$: le groupe $Aut(\mathbb{F}_n)$ est engendré par $\{\tau, c, I, P\}$ où :

- $\tau(a_1) = a_2, \tau(a_2) = a_1$ et pour tout $i \in \{3, \dots, n\}, \tau(a_i) = a_i$;
- pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}, c(a_i) = a_{i+1}$, et $c(a_n) = a_1$;
- $I(a_1) = a_1^{-1}$ et pour tout $i \in \{2, \dots, n\}, I(a_i) = a_i$;
- $p(a_1) = a_1 a_2$ et pour tout $i \in \{2, \dots, n\}, I(a_i) = a_i$.

En particulier, ceci fournit par passage au quotient par $Int(\mathbb{F}_n)$ une partie génératrice finie de $Out(\mathbb{F}_n)$.

4 Résultats préliminaires de topologie algébrique

Dans cette partie, on propose une présentation de nature topologique des groupes libres.

4.1 Groupe fondamental

On commence par rappeler quelques notions d'homotopie.

Définition 4.1. : Soient X et Y deux espaces topologiques.

- Deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $h(\cdot, 0) = f$ et $h(\cdot, 1) = g$. Une telle fonction h est alors appelée *homotopie* entre f et g .

- Soit A une partie de X . On dit que f et g sont *homotopes relativement à A* si de plus $h(x, \cdot) = x$ pour tout $x \in A$.

- On dit que X est *contractile* s'il est non vide et si l'application identité de X est homotope à une application constante.

- On dit qu'une application continue $f : X \rightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application continue $g : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ g$ soit homotope à id_Y et $g \circ f$ soit homotope à id_X . On dit alors que g est un *inverse homotopique* de f .

- Un *chemin* dans X est une application continue $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$. Son *origine* est $x = \alpha(0)$ et son *extrémité* est $y = \alpha(1)$.

- On dit que deux chemins α et β sont *homotopes* si les applications continues α et β le sont relativement aux extrémités de $[0, 1]$.

- Un *lacet en x dans X* est un chemin dans X d'origine et d'extrémité x .

- Si $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ et $\beta : [0, 1] \rightarrow X$ sont deux chemins dans X tels que $\alpha(1) = \beta(0)$, leur *concaténation* $\alpha.\beta$ est le chemin

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow X \\ x &\mapsto \begin{cases} \alpha(2x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2x - 1) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

On appelle *chemin inverse* de α le chemin $\bar{\alpha}(x) = \alpha(1 - x)$.

- Deux lacets sont *homotopes* s'ils le sont en tant que chemins.

- L'espace X est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et si tout lacet dans X est homotope à un point.

Proposition 4.2. : Soient X un espace topologique et $x \in X$. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble $L(X, x)$ des lacets en x dans X , d'ensemble quotient noté $\pi_1(X, x)$. La relation de concaténation des lacets dans $L(X, x)$ passe au quotient en une application qui munit $\pi_1(X, x)$ d'une structure de groupe.

Démonstration : Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre lacets en x dans X , tels que α soit homotope à β (on appelle h une homotopie entre α et β), et γ à δ (on appelle k une homotopie entre γ et δ). Alors

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} h(2t, s) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ k(2t - 1, s) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie entre $\alpha.\gamma$ et $\beta.\delta$, donc ces deux lacets sont homotopes. Donc la relation de concaténation des lacets passe au quotient dans $\pi_1(X, x)$.

Montrons qu'elle munit $\pi_1(X, x)$ d'une structure de groupe.

Associativité : Soient α, β, γ trois lacets en x dans X . Alors l'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{1+s}) & \text{si } t \in [0, \frac{1+s}{4}] \\ \beta(4t - s - 1) & \text{si } t \in [\frac{1+s}{4}, \frac{2+s}{4}] \\ \gamma(\frac{4t-s-2}{2-s}) & \text{si } t \in [\frac{2+s}{4}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie entre $(\alpha.\beta).\gamma$ et $\alpha.(\beta.\gamma)$.

Élément neutre : La classe du lacet constant égal à x , noté c_x , est élément neutre pour la loi de concaténation. En effet, soit α un lacet en x dans X , l'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{1+s}) & \text{si } t \in [0, \frac{1+s}{2}] \\ x & \text{si } t \in [\frac{1+s}{2}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie entre $\alpha.c_x$ et α , et l'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} x & \text{si } t \in [0, \frac{1-s}{2}] \\ \alpha(t(2-s) + (s-1)) & \text{si } t \in [\frac{1-s}{2}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie entre $c_x.\alpha$ et α .

Inverse d'un élément de $\pi_1(X, x)$: Soit $[\alpha]$ une classe dans $\pi_1(X, x)$, alors $\bar{\alpha}$ ne dépend pas du choix d'un représentant de $[\alpha]$. En effet, si α et β sont deux lacets en x dans X homotopes, et h une homotopie entre α et β , alors $(t, s) \mapsto h(1-t, s)$ est une homotopie entre $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$.

On montre alors que $[\bar{\alpha}]$ est l'inverse de $[\alpha]$ pour la relation de concaténation. En effet, l'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} x & \text{si } t \in [0, \frac{s}{2}] \\ \alpha(2t - s) & \text{si } t \in [\frac{s}{2}, \frac{1}{2}] \\ \alpha(2 - 2t - s) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, \frac{2-s}{2}] \\ x & \text{si } t \in [\frac{2-s}{2}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie entre $\alpha.\bar{\alpha}$ et c_x , et la même application écrite en remplaçant α par $\bar{\alpha}$ est une homotopie entre c_x et $\alpha.\bar{\alpha}$. \square

On appelle $\pi_1(X, x)$ le *groupe fondamental de X en x* .

Propriétés : • Si X est connexe par arcs, alors $\pi_1(X, x)$ est indépendant de $x \in X$ à isomorphisme près.

• Si X et Y sont connexes par arcs et ont même type d'homotopie, alors $\pi_1(X, x)$ est isomorphe à $\pi_1(Y, y)$ pour tous $x \in X$ et $y \in Y$.

Démonstration : • Soient $x, y \in X$ et c un chemin dans X d'origine y et d'extrémité x . Montrons que l'application

$$\begin{aligned} \Phi_c : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(X, y) \\ [\alpha] &\rightarrow [c.\alpha.\bar{c}] \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes entre $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$.

En effet, $\Phi_c([c_x]) = [c.\bar{c}] = [c_y]$, et pour α, β deux lacets en x dans X ,

$$\begin{aligned} \Phi_c([\alpha].[\beta]) &= [c.\alpha.\beta.\bar{c}] \\ &= [c.\alpha.\bar{c}].[c.\beta.\bar{c}] \quad . \\ &= \Phi_c([\alpha])\Phi_c([\beta]) \end{aligned}$$

L'application Φ_c est donc un morphisme de groupes, qui est de plus bijectif, d'inverse $\Phi_{\bar{c}}$.

• Vu le premier point, il suffit pour le deuxième point de montrer que si $x \in X$ et f est une équivalence d'homotopie entre X et Y , alors $\pi_1(X, x)$ est isomorphe à $\pi_1(Y, f(x))$, ce que nous ferons dans le paragraphe suivant (propriété fonctorielle du groupe fondamental).

Dans ce qui suit, on appellera R_n le graphe formé d'un sommet et de n arêtes.

4.2 Propriété fonctorielle du groupe fondamental

Soient X, Y des espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application continue.

Soit c un chemin joignant x à y , alors $f \circ c$ est un chemin joignant $f(x)$ à $f(y)$, qui vérifie :

• si α et β sont des lacets en $x \in X$ homotopes dans X , alors $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$ sont des lacets en $f(x) \in Y$ homotopes dans Y (en effet, si h réalise la première homotopie, alors $f \circ h$ réalise la seconde) ;

- $f \circ (\alpha.\beta) = (f \circ \alpha).(f \circ \beta)$
- f induit donc un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} f_\star : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(Y, f(x)) \\ [\alpha] &\mapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

En particulier, $\text{id}_\star = \text{id}_{\pi_1(X, x)}$ et $(g \circ f)_\star = g_\star \circ f_\star$.

(Autrement dit, $f \mapsto f_*$ est un foncteur covariant de la catégorie des espaces topologiques pointés dans la catégorie des groupes.)

Remarque : Si f est un homéomorphisme, alors f_* est un isomorphisme.

(En effet, si g est un inverse continu de f , alors g_* est un inverse de f_*).

En fait, il n'est pas nécessaire que f soit un homéomorphisme pour avoir un tel résultat : une équivalence d'homotopie suffit. Toutefois, on ne peut pas conclure aussi simplement que précédemment, puisqu'il faut traiter le cas où il y a changement de point base. Pour montrer cela, on énonce d'abord la proposition suivante :

Proposition 4.3. : Soient X, Y deux espaces topologiques et $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications homotopes. Alors pour tout $x \in X$, il existe un isomorphisme $u : \pi_1(Y, g(x)) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ tel que $u \circ g_* = f_*$, autrement dit tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(Y, f(x)) & \\
 & \nearrow f_* & \uparrow u \\
 \pi_1(X, x) & & \pi_1(Y, g(x)) \\
 & \searrow g_* & \\
 & &
 \end{array}$$

Démonstration : Soit $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ une homotopie entre f et g .

Soit $c : s \mapsto h_s(x) = h(x, s)$.

Soit $u : [\beta] \mapsto [c.\beta.\bar{c}]$. Par les propriétés du groupe fondamental énoncées à la partie précédente c 'est un isomorphisme de groupes entre $\pi_1(Y, g(x))$ et $\pi_1(Y, f(x))$. Montrons que $f_* = u \circ g_*$, c'est-à-dire que pour tout lacet α d'origine x dans X , $c.(g \circ \alpha).\bar{c}$ est homotope à $f \circ \alpha$.

Soit, pour $s \in [0, 1]$, c_s le chemin (continu) dans Y défini par $c_s(t) = h(x, st)$, et $\Phi : (t, s) \mapsto c_s.(h_s \circ \alpha).\bar{c}_s(t)$. Alors Φ est continue, $\Phi(\cdot, 0)$ est homotope à $f \circ \alpha$ et $\Phi(\cdot, 1)$ vaut $c.(g \circ \alpha).\bar{c}$. \square

Corollaire 4.4. : Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration : Soit $g : Y \rightarrow X$ un inverse homotope de f .

Comme $g \circ f$ est homotope à id_X , la proposition précédente fournit un isomorphisme de groupes u entre $\pi_1(X, g \circ f(x))$ et $\pi_1(X, x)$ tel que $u \circ (g \circ f)_* = id_*$. Comme u et id_* sont inversibles, il en est de même de $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Donc f_* est injective. De même, la surjectivité de

f_* se déduit de l'inversibilité de $uo(fog)_*$. Donc f_* est bijective. \square

On peut énoncer une réciproque à ce théorème :

Proposition 4.5. : Soient X, Y deux graphes connexes, $x \in X$ et $y \in Y$, tels que $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(Y, y)$ soient isomorphes à \mathbb{F}_n , et ϕ un automorphisme extérieur de \mathbb{F}_n . Alors il existe une équivalence d'homotopie $f : X \rightarrow Y$ telle que $f_* = \phi$ et $f(x) = y$.

Démonstration : Premier cas : $X = Y = R_n$. Il suffit de le vérifier pour chacun des différents types de générateurs de $Aut(\mathbb{F}_n)$. C'est clair pour les permutations et pour les inversions. Le seul cas à étudier est donc, en identifiant canoniquement $\pi_1(R_n, x)$ à \mathbb{F}_n :

$$\begin{aligned} [\alpha] &\mapsto [\alpha.\beta] \\ [\beta] &\mapsto [\beta], \end{aligned}$$

d'inverse

$$\begin{aligned} [\alpha] &\mapsto [\alpha.\beta^{-1}] \\ [\beta] &\mapsto [\beta]. \end{aligned}$$

On vérifie que dans ce cas, l'application envoyant linéairement chaque lacet sur le lacet image convient.

Cas général : Comme $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(Y, y)$ sont isomorphes à \mathbb{F}_n , la démonstration de la proposition 4.2 montre qu'il existe une équivalence d'homotopie ρ_X de R_n dans X telle que $\rho_X(*) = x$, et une équivalence d'homotopie ρ_Y de R_n dans Y telle que $\rho_Y(*) = y$. Soit alors $f : R_n \rightarrow R_n$ une équivalence d'homotopie telle que $f(*) = *$ et $f_* = \rho_Y^{-1}\phi\rho_X$, alors $\rho_Y \circ f \circ \rho_X^{-1}$ convient. \square

Proposition 4.6. : Le groupe libre \mathbb{F}_n est isomorphe au groupe fondamental de R_n (en choisissant [par exemple] pour point base l'unique sommet). Plus généralement, le groupe fondamental de tout graphe connexe, pour un point base quelconque fixé dans ce graphe, est un groupe libre.

La démonstration de ce résultat repose sur le théorème dit du relèvement :

Théorème 4.7. (du relèvement) : • Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ une application continue. Alors il existe une unique application $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\theta(0) \in [0, 1[$ et $f(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

• Si $h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ est une homotopie entre deux lacets, alors il existe une unique application $\psi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\psi(0, 0) \in [0, 1[$ et $h(s, t) = e^{2i\pi\psi(s, t)}$ pour tout $t \in [0, 1]^2$.

Démonstration de la proposition : On commence par montrer que $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}$.

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ un lacet en 1 dans \mathbb{S}^1 . Par le théorème du relèvement, il existe une unique application $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $\theta(0) = 0$. Posons $\phi(\gamma) := \theta(1)$.

L'application ϕ passe au quotient en une application (que l'on notera encore ϕ dans la suite) de $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ dans \mathbb{Z} . En effet, soit γ_0 et γ_1 deux lacets en 1 homotopes dans \mathbb{S}^1 , et $h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une homotopie entre γ_0 et γ_1 , donc telle que $\gamma_0(t) = h(t, 0)$ et $\gamma_1(t) = h(t, 1)$. Alors h se relève en une application $\psi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(s, t) = e^{2i\pi\psi(s, t)}$ pour tout $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Comme $h(1, \cdot) = 1$, $\psi(1, \cdot)$ est à valeurs dans \mathbb{Z} . Étant continue elle est constante, donc $\phi(\gamma_0) = \phi(\gamma_1)$.

Montrons que ϕ est un isomorphisme de groupes entre $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ et \mathbb{Z} .

Nous avons $\phi(c_1) = 0$ (où la classe de c_1 , le lacet constant égal à 1, dans $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ est l'élément neutre de ce groupe). De plus, si γ_1 (resp. γ_2) se relève par θ_1 (resp. θ_2) où $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$, alors le lacet concaténé $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ se relève (par unicité dans le théorème du relèvement) par l'application continue qui vaut $\theta_1(2x)$ si $x \in [0; \frac{1}{2}]$ et $\theta_2(2x - 1) + \theta_1(1)$ si $x \in [\frac{1}{2}; 1]$. Cette application vaut $\theta_1(1) + \theta_2(1)$ en 1. Donc ϕ est un morphisme de groupes.

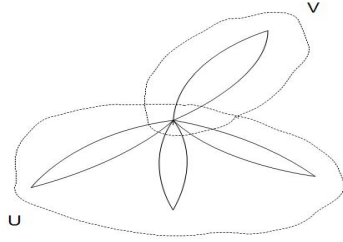
Il reste à vérifier la bijectivité de cette application. Elle est surjective car $\gamma(t) := e^{2i\pi nt}$ vérifie $\phi(\gamma) = n$. Montrons l'injectivité. Soit $\gamma(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$ un lacet en 1 dans \mathbb{S}^1 tel que $\theta(1) = 0$. Alors θ est un lacet en 0 dans \mathbb{R} qui est contractile, donc θ est homotope au lacet nul de \mathbb{R} . Soit h une homotopie entre ces deux lacets, alors $e^{2i\pi h}$ (application continue) est une homotopie entre γ et le lacet constant égal à 1 dans \mathbb{S}^1 . Dans $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$, on a donc $[\gamma] = 0$.

Pour le cas d'un graphe connexe, on donne une preuve dans le cas d'un graphe fini (le lecteur pourra se reporter à [9], p. 84 pour une généralisation au cas d'un graphe infini). On commence par remarquer qu'un arbre est contractile. Remarquons qu'un arbre maximal dans un graphe contient tous les sommets de ce graphe. En effet, sinon, il existe un sommet x dans $G - T$ qui est relié à un sommet de T par une arête, et en ajoutant cette arête à T on obtient encore un arbre : contredit la maximalité de T . On peut donc, quitte à écraser un arbre maximal du graphe sur un de ses points par une équivalence d'homotopie, se ramener au cas d'un bouquet de cercles. On utilise alors le théorème suivant (admis, voir par exemple [11], pp. 75-76 pour une démonstration de ce résultat) :

Théorème 4.8. (*van Kampen*) : Soient X un espace topologique, U et V deux ouverts connexes par arcs de X tels que $U \cup V = X$ et $U \cap V$ soit simplement connexe, et $x \in U \cap V$. Alors $\pi_1(X, x)$ est isomorphe à $\pi_1(U, x) \star \pi_1(V, x)$.

(La définition du produit libre de groupes a été donnée à la fin de la partie 2).

Fin de la démonstration : On procède alors par récurrence sur le nombre n de cercles du bouquet de cercles. Le cas $n=1$ a déjà été traité.



Dans R_{n+1} , soient U et V les ouverts représentés sur la figure ci-dessus. Ils sont connexes par arcs, d'intersection simplement connexe (leur intersection est un arbre). L'ouvert U a le même type d'homotopie que R_n , et V a le même type d'homotopie que R_1 . Par le théorème de van Kampen, $\pi_1(R_{n+1}, x)$ est isomorphe à $\pi_1(R_n, x) \star \mathbb{Z}$ don aussi à $\mathbb{F}_n \star \mathbb{Z}$ (par hypothèse de récurrence), soit par la remarque $\pi_1(R_{n+1}, x)$ est isomorphe à \mathbb{F}_{n+1} , ce qui achève la récurrence. \square

On dira qu'un graphe est de rang n si son groupe fondamental est isomorphe à \mathbb{F}_n , autrement dit (vu la démonstration ci-dessus) s'il a même type d'homotopie que R_n .

4.3 Revêtements

Définition 4.9. : Soient X et B deux espaces topologiques, et $f : X \rightarrow B$ une application continue.

On dit que f est un *revêtement* si pour tout $y \in B$, il existe un voisinage V de y dans B , un espace discret D non vide et un homéomorphisme $h : V \times D \rightarrow f^{-1}(V)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V \times D & \xrightarrow{h} & f^{-1}(V) \\ & \searrow pr_1 & \downarrow f \\ & & V \end{array}$$

On dit que B est la *base* de f , X l'*espace total* de f , $f^{-1}(y)$ la *fibres* de f au-dessus de y , V un *voisinage distingué* de y pour f , h une *trivialisatoin locale* de f au-dessus de V .

Définition 4.10. : Soient $f : X \rightarrow B$ et $f' : X' \rightarrow B$ deux revêtements ayant même base.

Un *morphisme de revêtements* de f sur f' est une application continue $\Phi : X \rightarrow X'$ telle que $f = f' \circ \Phi$, i.e. tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Phi} & X' \\
 & \searrow f & \swarrow f' \\
 & & B
 \end{array}$$

Un *isomorphisme de revêtements* est un morphisme de revêtements bijectif.

Soit X un graphe connexe. Un *revêtement universel* de X est un revêtement $\tilde{\pi}$ d'espace total simplement connexe, donc un arbre.

Proposition 4.11. : *Tout graphe connexe admet un revêtement universel, unique à isomorphisme de revêtements près.*

Démonstration : Existence : Soient X un graphe connexe et $x \in X$. Soit \tilde{X} l'ensemble des classes d'homotopie des chemins d'origine x et soit

$$\begin{aligned}
 \tilde{\pi} : \tilde{X} &\rightarrow X \\
 [\beta] &\mapsto \beta(1)
 \end{aligned}$$

l'application quotient de l'application d'évaluation en 1. Comme X est un graphe connexe, X est connexe par arcs, donc $\tilde{\pi}$ est surjective.

On munit l'ensemble des chemins dans X d'origine x de la topologie compacte-ouverte. Comme l'application d'évaluation en un point est continue pour la topologie compacte-ouverte, et par définition de la topologie quotient, $\tilde{\pi}$ est continue.

Le groupe discret $\pi_1(X, x)$ agit de manière continue et libre sur \tilde{X} par $[\alpha].[\beta] = [\alpha.\beta]$. Les orbites de cette action sont les fibres de $\tilde{\pi}$.

Si $p : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}/G$ est la projection canonique, alors l'application $\tilde{\pi}$ induit par passage au quotient une application $f : \tilde{B}/G \rightarrow B$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{B} & & \\
 \downarrow p & \searrow \tilde{\pi} & \\
 \tilde{B}/G & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

et f est continue et bijective.

Unicité : Nous renvoyons à [11],p. 51 pour une démonstration de l'unicité.

□

5 L'outre-espace

Dans cette section, on définit un espace géométrique sur lequel $Out(\mathbb{F}_n)$ agit. On en propose deux définitions (équivalentes), l'une en termes de graphes métriques marqués, et l'autre en termes d'actions de groupes sur des arbres.

5.1 Définition en termes de graphes métriques marqués

Définition 5.1. : On fixe $n \geq 2$.

On dit qu'un espace métrique X est *géodésique* si pour tous $x, y \in X$, il existe une isométrie d'un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} dans X envoyant a sur x et b sur y .

On appelle *graphe métrique* un graphe G dont tous les sommets sont de valence supérieure à 3, muni d'une distance géodésique. Ainsi chaque arête e est munie d'une longueur $\ell(e)$ strictement positive, de sorte que e soit localement isométrique à un intervalle de \mathbb{R} .

On appelle *graphe métrique marqué* tout couple (G, ρ) où :

- G est un graphe métrique
- $\rho : R_n \rightarrow G$ est une équivalence d'homotopie (qu'on appelle *marquage*).

On appelle *outre-espace* (ou *espace de Culler-Vogtmann*) de rang n l'ensemble des graphes métriques marqués par \mathbb{F}_n quotienté par la relation \sim , où $(G_1, \rho_1) \sim (G_2, \rho_2)$ s'il existe une homothétie $h : G_1 \rightarrow G_2$ telle que $h \circ \rho_1$ soit homotope à ρ_2 . Nous noterons par la suite $[G, \rho]$ la classe d'équivalence d'un graphe métrique marqué (G, ρ) .

Remarque : Un graphe métrique marqué est un graphe fini (ce sera une conséquence d'un résultat que nous utiliserons lors de la représentation de l'outre-espace dans le cas $n = 2$).

Action de $Out(\mathbb{F}_n)$ sur l'outre-espace

Pour tout $\Phi \in Out(\mathbb{F}_n)$, choisissons une équivalence d'homotopie $f_\Phi : R_n \rightarrow R_n$ fixant le sommet de R_n telle que la classe de $(f_\Phi)_*$ dans $Out(\mathbb{F}_n)$ soit Φ . Le groupe $Out(\mathbb{F}_n)$ agit à droite sur l'outre-espace par $(G, \rho)\Phi = (G, \rho \circ f_\Phi)$.

Topologie sur l'outre-espace

On peut munir l'outre-espace d'une topologie, appelée *topologie faible*, comme suit.

Étant donné $[G, \rho] \in CV_n$, on définit le simplexe ouvert $\mathring{C}(G, \rho)$ de $[G, \rho]$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des graphes métriques marqués (G', ρ') où G' est un graphe métrique obtenu à partir de G en faisant varier la longueur des arêtes, et ρ' et ρ définissent la même application sur les graphes G' et G considérés sans leur distance. Si G possède k arêtes, on identifie le simplexe de $[G, \rho]$ avec la partie de l'hyperplan $\sum x_i = 1$ de \mathbb{R}^k avec $x_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.

On définit les simplexes fermés $C(G, \rho)$ en autorisant la longueur d'une arête à valoir 0 si l'application ψ d'écrasement de cette arête en un de ses points est telle que $\psi \circ \rho$ soit encore une équivalence d'homotopie $R_n \rightarrow G$. Cela revient à autoriser $x_i = 0$ pour certains i dans l'hyperplan

précédent. On définit une relation d'équivalence \sim sur l'union disjointes des simplexes fermés par $[G, \rho] \sim [G', \rho']$ si et seulement si ces deux classes de graphes métriques marqués sont égaux dans CV_n .

On munit l'outre-espace de la topologie quotient de la somme disjointe des simplexes fermés par cette relation d'équivalence. Les ouverts de la topologie faible sont alors caractérisés par : une partie U de CV_n est ouverte si son intersection avec chaque simplexe fermé est ouverte dans ce simplexe.

Cherchons à donner une représentation de l'outre-espace dans le cas $n = 2$. Pour cela, on commence par déterminer les différents graphes ayant même type d'homotopie que R_2 , à homéomorphisme près. On s'appuie sur les résultats suivants.

Proposition 5.2. : *Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit G un graphe connexe fini ayant même type d'homotopie que R_n . Notons e le nombre d'arêtes dans G , v le nombre de sommets dans G . Alors $e - v = n - 1$.*

Démonstration : Premier cas : Le graphe G est un arbre (ce qui équivaut à $n = 0$).

Raisonnons par récurrence sur v . Si $v = 1$, alors le graphe est un point, $e = 0$ et on a le résultat. Si $v \geq 1$, soit x un sommet de G . Considérons le sous-graphe G' de G obtenu en retirant x et toutes les arêtes ouvertes ayant x pour sommet. Soient G'_1, \dots, G'_k les composantes connexes de G' . Comme G est un arbre, k est le nombre d'arêtes enlevées. Chacune de ces composantes connexes G'_i est un arbre ayant $v(i)$ sommets avec $v(i) \leq v - 1$ (car G' possède $v - 1$ sommets), donc par l'hypothèse de récurrence, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, G'_i possède $v(i) - 1$ arêtes. Le graphe G possède donc $k + \sum(v(i) - 1) = k + v - 1 - k = v - 1$ arêtes.

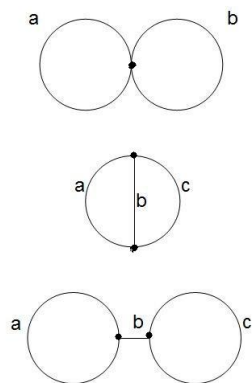
Cas général : Soit T un arbre maximal dans G , alors on a vu que T contient tous les sommets de G . En écrasant T sur un point, on obtient un graphe à un sommet et n arêtes, et il y a une bijection entre ces arêtes et les arêtes de $G - T$. Donc $e = n + e_T$ où e_T est le nombre d'arêtes dans T , égal à $v - 1$ d'après le premier cas. Cela conclut.

Proposition 5.3. : *Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit G un graphe connexe homotope à R_n , dont tous les sommets sont de valence supérieure à 3. Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, v_i le nombre de sommets de valence i alors G . Alors $2(r - 1) = \sum(i - 2)v_i$*

Démonstration : En effet, on a d'une part $\sum v_i = v$, et d'autre part, puisque chaque arête a deux extrémités qui sont des sommets, $\sum iv_i = 2e$. Le lemme précédent entraîne alors le résultat souhaité. \square

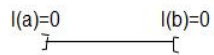
Exemple : Le cas $n = 2$

Il y a alors, à homéomorphisme près, trois graphes finis connexes sans sommet de valence 1 ou 2, ayant même type d'homotopie que R_2 .

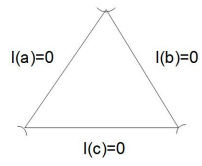


Pour chacun de ces graphes, on représente le simplexe associé, en précisant pour chaque bord quelle est l'arête que l'on écrase :

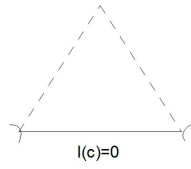
Pour un graphe du premier type :



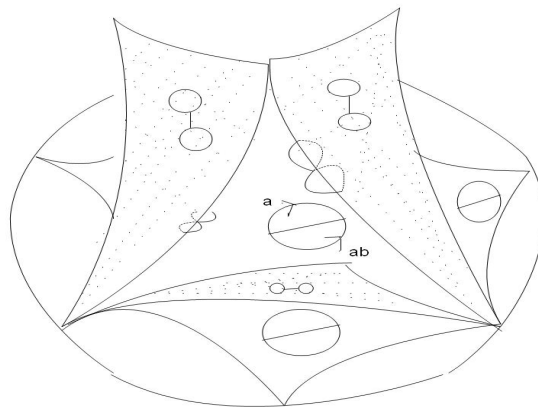
Pour un graphe du deuxième type :



Pour un graphe du troisième type :



On peut donc proposer une représentation de l'outre-espace :



5.2 Définition en termes d'actions sur des arbres

Proposition 5.4. : Soient (G, x) un graphe métrique connexe pointé et $\tilde{\pi} : \tilde{G} \rightarrow G$ un revêtement universel de G (qui est un arbre). Soit $\tilde{x} \in \tilde{\pi}^{-1}(x)$. Alors

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\tilde{\pi}) &\rightarrow \pi_1(G, x) \\ g &\mapsto [\tilde{\pi} \circ \tilde{\alpha}_g] \end{aligned}$$

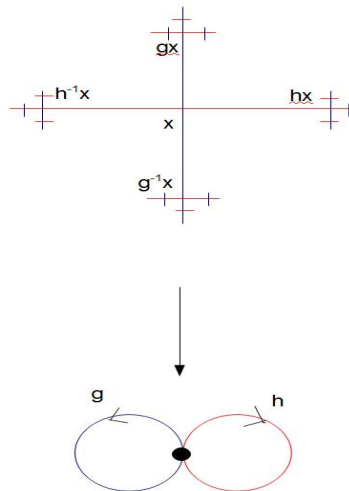
(où $\tilde{\alpha}_g$ est un chemin dans \tilde{G} entre \tilde{x} et $g\tilde{x}$) est un isomorphisme de groupes, d'inverse

$$\begin{aligned} \pi_1(G, x) &\rightarrow \text{Aut}(\tilde{\pi}) \\ \gamma &\mapsto g_\gamma \end{aligned}$$

où g_γ est l'unique élément de $\text{Aut}(\tilde{\pi})$ tel que $g_\gamma(\tilde{x}) = \tilde{\gamma}(1)$, avec $\tilde{\gamma}$ l'unique relèvement (continu) de γ d'origine \tilde{x} .

On renvoie le lecteur à [11], p. 39 pour une preuve de ce résultat.

Exemple : On représente le revêtement universel de la rose R_2 en faisant figurer l'action de \mathbb{F}_n :



Définition 5.5. : On appelle *arbre métrique* un graphe métrique simplement connexe. On dit qu'un arbre métrique muni d'une action isométrique d'un groupe est *minimal* s'il ne contient pas de sous-arbre invariant propre.

On peut donc énoncer une deuxième définition de l'outre-espace, qui définit un ensemble en bijection $Out(\mathbb{F}_n)$ -équivariante avec celui défini précédemment :

Définition 5.6. : On appelle *outre-espace* (encore noté CV_n) l'ensemble des classes d'homothéties équivariantes d'arbres métriques munis d'une action isométrique libre minimale de \mathbb{F}_n . On notera $C\tilde{V}_n$ l'ensemble des classes d'isométries équivariantes d'arbres métriques munis d'une action isométrique libre minimale de \mathbb{F}_n .

Notation : On notera $[T]$ la classe d'équivalence d'un tel arbre T dans $C\tilde{V}_n$.

Ainsi, CV_n est le quotient de $C\tilde{V}_n$ par les homothéties.

Action de $Out(\mathbb{F}_n)$ sur l'outre-espace

Soient $\Phi \in Out(\mathbb{F}_n)$, et ϕ un représentant de Φ dans $Aut(\mathbb{F}_n)$. Pour $[T] \in CV_n$, muni de l'action ρ , on pose $[T]\Phi$ la classe de l'arbre T muni de l'action $\rho \circ \phi$.

Exhibons la bijection $Out(\mathbb{F}_n)$ -équivariante entre les deux définitions de l'outre-espace. Si $[G, \rho]$ est la classe d'un graphe métrique marqué, on lui associe la classe de $[\tilde{G}]$, où $\tilde{\pi} : \tilde{G} \rightarrow G$ est un revêtement universel de G , qu'on munit de l'action naturelle de $Aut(\tilde{\pi})$ identifié à \mathbb{F}_n grâce à ρ_* (par la composition des morphismes évidents

$$\mathbb{F}_n \rightarrow \pi_1(R_n) \rightarrow \pi_1(G) \rightarrow Aut(\tilde{\pi}),$$

la deuxième flèche étant donnée par ρ_* et la troisième par la proposition 5.4).

Réciproquement, si $[T]$ est la classe d'un arbre métrique muni d'une action isométrique, libre et minimale de \mathbb{F}_n , on pose G le graphe T/\mathbb{F}_n . Soient T_0 un revêtement universel de R_n , et \tilde{x} un relèvement du sommet de R_n dans T_0 . Soit y un point quelconque de T . On pose $\tilde{f}(\tilde{x}) = y$, puis on prolonge cette définition aux sommets de T_0 par \mathbb{F}_n -équivariance (ce qui est possible car l'action de \mathbb{F}_n est transitive sur T_0). On envoie enfin linéairement toute arête $[\alpha\tilde{x}, \beta\tilde{x}]$ de T_0 (où $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_n$) sur le segment $[\alpha y, \beta y]$. L'application \tilde{f} passe au quotient par \mathbb{F}_n en une équivalence d'homotopie de R_n dans G , qui est le marquage que l'on associe à G .

Il existe sur $C\tilde{V}_n$ une topologie naturelle introduite par F. Paulin dans [7]. On munit alors CV_n de la topologie quotient.

Proposition 5.7. : Soit $[T] \in C\tilde{V}_n$. Soit K une partie finie dans T , P une partie finie de \mathbb{F}_n et $\epsilon > 0$. Soit $V_T(K, P, \epsilon)$ l'ensemble des éléments $[T']$ de CV_n tels qu'il existe K' une partie finie de T' munie d'une bijection $x \mapsto x'$ de K dans K' tels que :

$$\forall x, y \in K, \forall g \in P, |d_T(x, gy) - d_{T'}(x', gy')| < \epsilon.$$

Alors les $V_T(K, P, \epsilon)$ forment une base d'une topologie sur CV_n appelée topologie de Gromov équivariante.

Démonstration : Soit $T'' \in V_X(K, P, \epsilon) \cap V_{X'}(K', P', \epsilon')$. Soit C (resp. C') une partie finie de T'' telle qu'il existe une bijection comme dans l'énoncé entre K et C (resp. C'). On note λ (resp. λ') le réel intervenant dans la définition de la bijection. Soit $\eta > 0$ tel que $\sup\{|d(x, y) - d(c, d)| / x, y \in K, c, d \in C\} < \epsilon - \eta$ (ceci est possible puisque $K \times C$ est une partie finie de $T \times T''$, et que par définition de $V_X(K, P, \epsilon)$, le maximum de $|d(x, y) - d(c, d)|$ est strictement inférieur à ϵ). On définit de même η' . Alors $V_T(K, P, \epsilon) \cap V_{T'}(K', P', \epsilon')$ contient $V_T''(C \cup C', P \cup P', \inf(\eta, \eta'))$. \square

Remarque : En fait, les deux topologies définies sur l'outre-espace sont les mêmes.

6 Contractibilité de l'outre-espace

Théorème 6.1. (*M. Culler - K. Vogtmann*) : Pour tout entier $n \geq 2$, l'outre-espace de rang n est un espace topologique contractile.

Le lecteur pourra trouver la preuve originelle de M. Culler et K. Vogtmann dans leur article [5]. Nous nous appuyerons ici sur les deux articles de V. Guirardel et G. Levitt ([6] pp. 7-15, [7] pp. 22-24 et 28) qui proposent une preuve reposant sur une méthode due à R. Skora. (La preuve qu'ils proposent s'applique à des espaces plus généraux que le seul outre-espace de Culler-Vogtmann, nous nous limiterons ici à la présenter dans ce cas précis.)

Schéma de la preuve : On va exhiber une application $\rho : C\tilde{V}_n \times [0, \infty] \rightarrow CV_n$ telle que pour tout $[T] \in CV_n$, $\rho([T], \infty) = [T]$ et $\rho(CV_n, 0)$ contenu dans un sous-ensemble contractile. Fixons $[T_0]$ dans l'outre-espace. On a défini dans la partie 5 le simplexe ouvert \mathring{C}_0 contenant $[T_0]$, qui est manifestement contractile. On va associer à $[T] \in CV_n$, un élément $[T_0](T) \in \mathring{C}_0$ et un morphisme (voir la définition plus loin) $f_T : T_0(T) \rightarrow T$. Nous verrons que f_T dépend continûment de T pour une topologie à préciser. Ce morphisme nous permettra de construire $\rho : CV_n \times [0, \infty] \rightarrow CV_n$ telle que $\rho([T], \infty) = [T]$ et $\rho([T], 0) = [T_0(T)]$, et $\rho(x, t) = x$ pour tout $x \in \mathring{C}_0$. Il restera alors à voir que ρ est continue.

Définition 6.2. : Soient T et T' deux arbres métriques. Une application $f : T \rightarrow T'$ est un *morphisme* si elle est \mathbb{F}_n -équivariante et si tout segment $[a, b] \subset T$ peut être subdivisé en un nombre fini de sous-segments (fermés), en restriction auxquels f est une isométrie.

Remarque : Tout morphisme est continu. En particulier, lorsque $[T'] \in CV_n$, un morphisme est surjectif (puisque son image, qui est connexe, est un sous-arbre, non vide car $T \neq \emptyset$, invariant

sous l'action de \mathbb{F}_n et qu'on a supposé les actions minimales).

Avant de faire la démonstration de la contractibilité de l'outre-espace, on énonce quelques résultats généraux relatifs aux actions libres par isométries sur des arbres métriques.

Lemme 6.3. : 1) Soit $g \in \mathbb{F}_n$. Alors il existe un axe A_g dans T (appelé axe de translation de g) tel que

- $x \in A_g \Leftrightarrow d(x, gx) = \inf d(y, gy) := \ell(g)$.
- $\forall x \in T d(x, gx) = \ell(g) + 2.d(x, A_g)$. En fait, pour tout $x \in T$, le segment $[x, gx]$ a une intersection avec l'axe de g de longueur $\ell(g)$.

2) Soit $g, h \in \mathbb{F}_n$ ne commutant pas. Alors l'intersection des deux axes est un compact de T (qui peut être vide). La longueur de cette intersection est majorée strictement par $\ell(g) + \ell(h)$.

3) Soit $g \in \mathbb{F}_n$. Alors l'application $C\tilde{V}_n \rightarrow \mathbb{R}$, $[T] \mapsto \ell(g)$ est continue. De même, l'application $C\tilde{V}_n \rightarrow \mathbb{R}$, $[T] \mapsto d(A_g, A_h)$ est continue.

Démonstration : 1) On renvoie le lecteur à [] pour une démonstration de ces résultats.

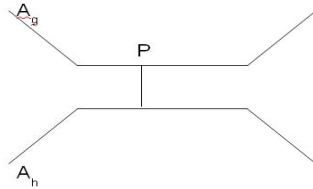
2) Si la longueur de l'intersection est supérieure à $\ell(g) + \ell(h)$, on trouve un point fixe pour $[g, h]$ (g agit comme une translation de longueur $\ell(g)$ sur l'axe et g et g^{-1} on même axe de translation avec $\ell(g^{-1}) = \ell(g)$).

3) Soit $\epsilon > 0$ et $T_0 \in C\tilde{V}_n$. On note $\ell(g)$ la longueur de la translation associée à T_0 . Soit v_0 sur l'axe de translation de T_0 et v_1 sur $[v_0, gv_0]$, tel que $d(v_0, v_1) = \epsilon$. Soit maintenant T' dans $V_{T_0}(\{v_0, v_1\}, \{1, g\}, \frac{\epsilon}{6})$. Supposons que la distance de v'_0 (provenant de la définition du voisinage) à l'axe de translation de g dans T' soit supérieure à 2ϵ . On note e l'arc reliant v'_0 et son projeté sur l'axe de translation. Enfin notons a l'arc reliant v'_1 à e . On a alors $|d(v_1, gv_0) - d(v'_1, gv'_0)| < \frac{\epsilon}{6}$. Or $d(v_1, gv_0) = \ell(g) - \epsilon$. D'autre part, $d(v'_1, gv'_0) = d(v'_0, gv'_0) - d(v'_0, v'_1) + 2|a|$. Sachant que $T' \in V_{T_0}(\{v_0, v_1\}, \{1, g\}, \frac{\epsilon}{6})$ (écrire les quatre équations) on obtient que $|a| < \frac{\epsilon}{4}$. Par conséquent, $|d(v'_0, gv'_0) - d(v'_1, gv'_0)| > \epsilon$. Cela constitue une contradiction car $|d(v'_0, gv'_0) - d(v'_1, gv'_0)| \leq |d(v'_0, gv'_0) - d(v_0, gv_0)| + |d(v_1, gv_1) - d(v'_1, gv'_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ (rappelons que v_1 appartient à l'axe de translation). Donc $d(v'_0, A'_g) < 2\epsilon$. Aussi $|\ell(g)' - d(v'_0, gv'_0)| < 4\epsilon$. Or $|\ell(g) - d(v'_0, gv'_0)| = |d(v_0, gv_0) - d(v'_0, gv'_0)| < \frac{\epsilon}{6}$. Donc $|\ell(g)' - \ell(g)| < 5\epsilon$.

Supposons que l'axe de translation de g et celui de h s'intersectent dans T_0 . Soit v_0 un point dans cette intersection. On sait qu'il existe un voisinage W de T_0 tel que les grandeurs $\ell(g)$ et $\ell(h)$ sont distantes de leur valeur en T_0 d'au plus $\frac{\epsilon}{2}$. Enfin considérons le voisinage de T_0 suivant : $V := W \cap V_{T_0}(v_0, \{1, g, h\}, \epsilon)$. Si $T' \in V$, $|d(v'_0, gv'_0) - \ell(g)'| < \frac{3\epsilon}{2}$. Donc $d(v'_0, A'_g) < \frac{3\epsilon}{4}$. Par conséquent $d(A'_g, A'_h) < \frac{3\epsilon}{2}$. On montre de même que cette distance est continue en un point où elle n'est pas nulle. \square

Construction de f_T : Soit T_0 un revêtement universel de R_n . On identifie F_n au groupe des automorphismes de revêtement de T_0 , ce qui fournit une action naturelle de F_n sur T_0 . La classe de l'arbre T_0 munie de cette action est un élément de l'outre-espace. L'action de F_n est transitive sur les sommets de T_0 . Soit v_0 un sommet de T_0 . Si T est un élément de l'outre-espace, on commence par construire un point base $P = P_T$ dans T . On pose $f_T(v_0) = P$ puis on prolonge par équivariance f_T à tous les sommets de T_0 . On prolonge enfin f_T à T_0 tout entier envoyant linéairement toute arête $[s, t]$ de T_0 sur le segment $[f_T(s), f_T(t)]$, qui n'est pas réduit à un point, car $t = \gamma s$ pour un $\gamma \in F_n - \{1\}$ et F_n agit librement sur T . Pour obtenir un morphisme, il suffit de munir chaque arête de T_0 de la longueur du chemin image. On obtient ainsi l'arbre $T_0(T)$, sur lequel F_n agit par isométries. En effet, soient $x, y \in T_0$. Quitte à subdiviser le segment $[x, y]$ en sous-segments en restriction auxquels f_T est une isométrie, on peut supposer que x et y sont tels que f_T soit une isométrie en restriction à $[x, y]$. Si $g \in F_n$, alors $d_0(gx, gy) = d(f_T(gx), f_T(gy)) = d(g.f_T(x), g.f_T(y)) = d(f_T(x), f_T(y)) = d_0(x, y)$. Il reste à définir P . Fixons g et h deux éléments de F_n ne commutant pas ($n \geq 2$). On notera A_g (resp. A_h) l'axe de translation de g (resp. de h) dans T . Si leur intersection est vide, on définit P comme le point de A_g réalisant le minimum de la distance à A_h . Si les deux axes s'intersectent on sait, car g et h ne commutent pas et l'action de T sur F_n est libre, que cette intersection est un segment. On pose alors P l'extrémité de ce segment dans le sens induit par g .

Cas où l'intersection des axes est vide



Cas où l'intersection des axes est non vide



Continuité de f_T : On a vu qu'un système fondamental de voisinages pour un arbre T était

donné par les ensembles $V_T(X, P, \epsilon)$ avec $X \subset T$ et $P \subset \mathbb{F}_n$ des ensembles finis, et $\epsilon > 0$.

Considérons maintenant l'ensemble $Mor(\mathbb{F}_n)$ des morphismes \mathbb{F}_n -équivariants entre deux classes d'isométrie équivariante d'arbres métriques munis d'une action isométrique minimale de \mathbb{F}_n . Un morphisme f sera proche de f' si le graphe de f et celui de f' sont proches dans l'espace produit. Un système fondamental de voisinages pour $f : T \rightarrow T_\infty$ est donné par $W_f(X, P, \epsilon)$, avec $f' : T' \rightarrow T'_\infty$ dans ce voisinage si et seulement s'il existe une application $x \mapsto x'$ comme précédemment, avec l'hypothèse supplémentaire $|d(f(x), f(gy)) - d(f'(x'), f'(gy'))| < \epsilon$. Alors l'application Φ qui à un morphisme f associe son domaine de définition est continue. En effet, si on se donne $f : T \rightarrow T_\infty$ et si $f' \in V_f(X, A, \epsilon)$ alors T' , le domaine de définition de T' est dans $V_T(X, A, \epsilon)$. De même, on montre que l'application Ψ qui à un morphisme f associe son espace d'arrivée est continue.

Au regard de la topologie de Gromov sur $\tilde{C}\tilde{V}_n$ et de celle qu'elle induit sur les morphismes, on peut affirmer que f_T dépend continûment de T si et seulement si pour tout couple (v, w) de sommets de T_0 , l'application

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}\tilde{V}_n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ T & \mapsto & d(f_T(v), f_T(w)) \end{array}$$

est continue. Il existe $g, h \in \mathbb{F}_n$ tels que $v = gv_0$ et $w = hv_0$. Par conséquent, si l'on pose $a = g^{-1}h$, $d(f_T(v), f_T(w)) = d(P_T, aP_T)$. Il suffit donc de vérifier le lemme suivant :

Lemme 6.4. : Soit $a \in \mathbb{F}_n$. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}\tilde{V}_n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ T & \mapsto & d(P, aP) \end{array}$$

est continue.

Démonstration : On note $\ell(g) = \inf d(x, gx)$. On a alors la formule $d(x, gx) = \ell(g) + 2d(x, A_g)$. Le point P est caractérisé par les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad & d(P, gP) = \ell(g) \\ (2) \quad & d(P, hP) = \ell(h) + 2D \\ (3) \quad & d(gP, hP) = \ell(g) + \ell(h) + 2D \\ (4) \quad & d(gP, h^{-1}P) = \ell(g) + \ell(h) + 2D. \end{aligned}$$

où D est la distance de A_g à A_h .

Ce système d'équations est stable, au sens où, si Q vérifie les équations à ϵ près il est à une distance inférieure à $C\epsilon$ de P pour une constante C fixée. D'autre part, le second membre des

équations varie continûment avec T . Fixons $\epsilon > 0$. En choisissant bien un voisinage \mathcal{V} de T au sens de Gromov, on a pour tout $T \in \mathcal{V}$, le point P' correspondant à T vérifie les quatre équations à ϵ près pour T' dans ce voisinage. On peut aussi demander aux éléments de \mathcal{V} de vérifier $|d(P', aP') - d(P, aP)| < \epsilon$. En notant $Q = P_{T'}$ le point base de T' , on obtient $d(P', Q) < C\epsilon$. Donc $|d(Q, aQ) - d(P, aP)| < (2C + 1)\epsilon$. \square

Construction de ρ :

On suppose donné un morphisme f entre T_0 et T , et on note d_0 et d les distances de ces arbres. On cherche à construire des arbres intermédiaires $T_t, t \in [0, +\infty]$, et des morphismes $\phi_t : T_0 \rightarrow T_t$ et $\psi_t : T_t \rightarrow T$ qui factorisent f .

Construction ensembliste

Pour $a, b \in T_0$, on pose $\tau(a, b) = \max_{[a, b]} d(f(x), f(a))$.

On définit des relations d'équivalence \sim_t par $a \sim_t b \iff (f(a) = f(b) \text{ et } \tau(a, b) \leq t)$.

On pose $T_t := T_0 / \sim_t$.

Comme $a \sim_t b$ entraîne que $f(a) = f(b)$, on peut alors factoriser f par des applications ϕ_t et ψ_t , où ϕ_t est la projection canonique $T_0 \rightarrow T_t$, de sorte à avoir :

$$\begin{array}{ccc} T_0 & \xrightarrow{f} & T \\ & \searrow \phi_t & \nearrow \psi_t \\ & T_t & \end{array}$$

Lorsque $t = \infty$, deux éléments distincts de T_∞ sont images par ϕ_t de deux éléments a et b de T_0 vérifiant $f(a) \neq f(b)$ (par définition de \sim_∞). Donc ψ_t est injective. Elle est de plus surjective car f l'est, puisque c'est un morphisme. Donc ψ_t est une bijection de T_∞ dans T .

Distance sur T_t

Soit $a, b \in T_0$ et $t \geq 0$. Une t -subdivision σ entre a et b est une suite $(a = y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, x_{n+1} = b)$ telle que $y_i \sim_t x_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq n$. La *longueur* de σ est $|\sigma| = \sum_i d_0(x_i, y_i)$. Une t -subdivision est dite *directe* si tous les points de la suite sont dans $[a, b]$ et si on les rencontre dans l'ordre de la subdivision en allant de a vers b . La *complexité* d'une t -subdivision est $c(\sigma) = (|\sigma|, \sum_i d_0(y_i, x_{i+1}))$, où $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est muni de l'ordre lexicographique.

Remarque : Nous avons $|\sigma| \geq d(f(a), f(b))$. En effet, comme $f(y_i) = f(x_{i+1})$, dans T , la concaténation des $f([x_i, y_i])$ fournit un chemin joignant $f(a)$ à $f(b)$ dans T , et on peut subdiviser $[a, b]$

en sous-segments en restriction auxquels f est une isométrie, donc 1-lipschitzienne.

Proposition 6.5. : Soient $a, b \in T_0$ et $t \in \mathbf{R}_+$. Alors il existe une t -subdivision de complexité minimale (en particulier de longueur minimale) entre a et b , qui peut être choisie directe.

Démonstration : **Étape 1** : Soit K un sous-arbre de T_0 ayant un nombre fini de sommets et contenant a et b (K est un sous-arbre compact). On commence par montrer que parmi les t -subdivisions entre a et b contenues dans K , il y en a une (que l'on notera σ_K) de complexité minimale.

Soit σ une t -subdivision entre a et b contenue dans K .

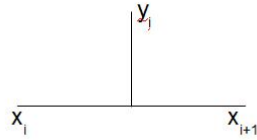
Comme f_T est un morphisme, on peut découper K en un nombre fini M_K d'arcs qui s'injectent dans T (qui seront appelés arcs d'injectivité).

Soient α, β deux points non consécutifs de σ appartenant au même arc d'injectivité. On considère la subdivision μ de $[\alpha, \beta]$ contenue dans celle de $[a, b]$ (en posant $y_0 = \alpha$ et $x_{n+1} = \beta$). Par la remarque, $|\mu| \geq d_\infty(f(\alpha), f(\beta)) = d_0(\alpha, \beta)$. Donc en supprimant les points apparaissant entre α et β dans σ (en ne conservant que α et β), on diminue strictement la longueur de la subdivision, donc on en diminue (strictement) la complexité. On peut donc supposer que deux termes appartenant au même arc d'injectivité sont consécutifs dans σ . En particulier, on peut se limiter à considérer des subdivisions entre a et b constituées d'au plus $2M_K$ points.

L'ensemble $\coprod_{i=1}^{2M_K} K^i$ est un compact de $\coprod_{i=1}^{2M_K} T_0^i$, munie de la topologie somme disjointe des topologies produits sur T_0^i . Comme f est continue, \sim_t est une relation d'équivalence fermée, donc l'ensemble des t -subdivisions constituées d'au plus $2M_K$ points est compact dans cet ensemble, pour cette topologie. De plus, par continuité de la distance, l'application qui à une telle subdivision associe sa longueur est continue, donc atteint un minimum m . L'ensemble des telles subdivisions de longueur m est alors encore un compact, sur lequel l'application continue qui à σ associe $\sum d(y_i, x_{i+1})$ atteint un minimum. Il existe donc une subdivision σ_K de complexité minimale parmi les subdivisions contenues dans K .

Étape 2 : Montrons que σ_K est directe.

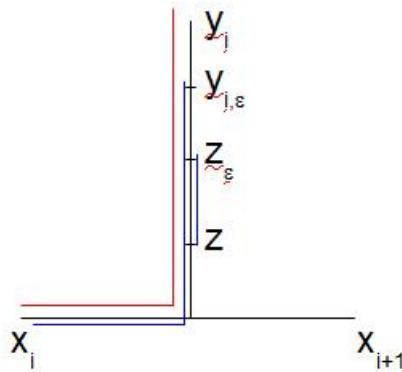
Sinon (quitte à échanger a et b) on peut supposer qu'il existe i tel que les segments $[x_i; y_i]$ et $[y_i; x_{i+1}]$ se chevauchent comme suit :



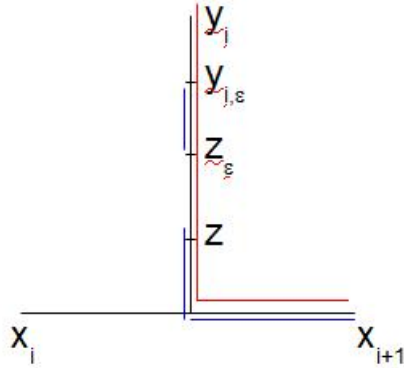
Comme $f(x_{i+1}) = f(y_i) := p$, et comme f est un morphisme, on peut définir z comme le point de $[x_{i+1}; y_i]$ le plus proche de y_i tel que $f(z) = p$. En particulier, $z \sim_t x_{i+1}$ car $\tau(z, x_{i+1}) \leq \tau(y_i, x_{i+1}) \leq t$.

Comme f est continue, $f(]y_i; z])$ est connexe (par arcs), donc inclus dans une composante connexe de $T - \{p\}$. Comme f est un morphisme, on peut découper $[z; y_i]$ en un nombre fini de sous-segments, de taille uniformément minorée par un réel noté η , en restriction auxquels f est une isométrie. Donc pour $\epsilon < \eta$, en notant z_ϵ (resp. $y_{i,\epsilon}$) le point de $[z; y_i]$ situé à une distance ϵ de z (resp. y_i), $y_{i,\epsilon} \sim_t z_\epsilon$.

Soit σ_ϵ la subdivision obtenue en remplaçant $(\dots, x_i, y_i, x_{i+1}, \dots)$ par $(\dots, x_i, y_{i,\epsilon}, z_\epsilon, z, x_{i+1}, \dots)$. On vérifie alors que $|\sigma_\epsilon| = |\sigma_K|$ (sur le schéma, la somme des longueurs des segments en bleu est égale à la longueur du segment en rouge) :



et que $c(\sigma_\epsilon) < c(\sigma_K)$ (sur le schéma, la somme des longueurs des segments en bleu est strictement inférieure à la longueur du segment en rouge) :



D'où une contradiction.

Donc σ_K est directe.

Étape 3 : Soit σ_0 minimisant la complexité parmi toutes les subdivisions contenues dans le compact $[a, b]$ (σ_0 existe par le premier point de la démonstration). Soit σ une subdivision quelconque, et K un compact qui la contient (par exemple l'enveloppe convexe des points qui la constituent).

Alors la complexité de $c(\sigma) \geq c(\sigma_K)$ (par le premier point) et $c(\sigma_K) \geq \sigma_0$ (car par le deuxième point, σ_K est contenue dans $[a, b]$).

La subdivision σ_0 vérifie donc les conditions recherchées. \square

On peut donc définir sur T_0 la pseudo-distance $\delta_t(a, b) = \inf |\sigma|$ où la borne inférieure est prise sur les t -subdivisions entre a et b (l'inégalité triangulaire provient du fait que la concaténation d'une subdivision entre a et b et d'une subdivision entre b et c est une subdivision entre a et c).

On a de plus $\delta_t(a, b) = 0 \iff a \sim_t b$.

La pseudo-distance δ_t induit donc une distance sur T_t définie par $d_t(\phi_t(a), \phi_t(b)) = \delta_t(a, b)$ (cette définition est bien indépendante du choix de a et b car si a' et b' vérifient $\phi_t(a') = \phi_t(a)$ et $\phi_t(b') = \phi_t(b)$, alors on peut remplacer la subdivision (a, x_1, \dots, y_n, b) par $(a, a', a', x_1, \dots, y_n, b', b', b)$ sans en changer la longueur.

Lemme 6.6. : *L'espace métrique T_t est un arbre métrique.*

Démonstration : Soit $t > 0$. On commence par vérifier que T_t est un arbre. Puisque T_t est connexe (par arcs), il suffit de voir que l'inégalité 0-hyperbolique suivante :

$$\delta_t(a, b) + \delta_t(c, d) \leq \max(\delta_t(a, c) + \delta_t(b, d), \delta_t(a, d) + \delta_t(b, c))$$

est vérifiée pour tout quadruplet (a, b, c, d) de T_t . En effet, sinon, on peut trouver un quadruplet (a, b, c, d) de points reliés par une boucle (c'est-à-dire un lacet localement injectif reliant dans cet ordre les points a, b, c et d), et on contredit l'inégalité 0-hyperbolique avec ces points.

Si ce n'est pas le cas on peut trouver $\theta > 0, a_0, b_0, c_0, \text{ et } d_0 \in T_0$ satisfaisant l'équation suivante :

$$\delta_t(a_0, b_0) + \delta_t(c_0, d_0) = \theta + \max(\delta_t(a_0, c_0) + \delta_t(b_0, d_0), \delta_t(a_0, d_0) + \delta_t(b_0, c_0)) \quad (1).$$

Parmi tous les quadruplets vérifiant (1) contenus dans l'enveloppe convexe de $\{a_0, b_0, c_0, d_0\}$, choisissons celui dont la longueur totale de l'enveloppe convexe est minimale, $Q = (a, b, c, d)$. On peut supposer que a est un point extrémal de $C(Q)$, l'enveloppe convexe de Q . Considérons trois subdivisions admissibles (a, x_1, y_1, \dots) entre a et les trois autres points. Chacune de ces subdivisions a une longueur strictement positive car (1) force a, b, c, d à avoir des images distinctes dans T_t . On peut donc supposer que le segment $[x_1, y_1]$ est non-dégénéré dans les trois subdivisions. De plus, $x_1 \neq a$ dans au moins une des trois subdivisions sinon on pourrait diminuer la longueur de $C(Q)$ en déplaçant a (sans perdre (1)). Ainsi $a \sim_t a'$ pour un $a' \neq a$ dans $C(Q)$. Puisque (a', b, c, d) satisfait (1) en diminuant la longueur de $C(Q)$ on obtient une contradiction.

Montrons désormais que T_t est un arbre métrique pour tout t . Par hypothèse, c'est vrai pour $t = 0$ et pour $t = \infty$. Soit $t > 0$. Soit S_∞ le sous-ensemble de T_∞ constitué des sommets de T_∞ et des points situés à distance t d'un sommet. Soit S_0 (resp. S_t) la préimage de S_∞ par f (resp. ψ_t). Comme T_∞ est un arbre métrique, S_∞ est discret, donc fermé dans T_∞ . Par continuité de f et de ψ_t (qui est même 1-lipschitzienne), S_0 (resp. S_t) est fermé dans T_0 (resp. dans T_t), et ces ensembles rencontrent tout sous-arbre qui possède un nombre fini de sommets en un nombre fini de points.

Montrons pour finir que tout sommet de T_t est contenu dans S_t . Soient donc $u \in T_t - S_t$, et $x, y \in T_0$, dont l'image par ϕ_t est u (ce qui est possible car ϕ_t est surjective comme projection canonique). Alors $\tau(x, y) \leq t$. Supposons que $\tau(x, y) = t$. Soit $p \in T_\infty$, appartenant à $f([x, y])$ et à distance t de $f(x)$. Comme f n'est pas localement injective au voisinage de p (sinon on pourrait trouver un point p' dans $[x, y]$ tel que $d_\infty(f(x), f(p')) > t$), p est un sommet de T_∞ , donc $f(x) = \psi_t(u)$ est à distance t d'un sommet de T_∞ , ce qui contredit $u \in T_t - S_t$. Donc $\tau(x, y) < t$, et il existe donc des voisinages ouverts de x et de y dans T_0 qui ont la même image par ϕ_t . Comme ceci est vérifié pour tout choix de x et y , u n'est pas un sommet. \square

Lemme 6.7. : *Les applications $\phi_t : T_0 \rightarrow T_t$ et $\psi_t : T_t \rightarrow T_\infty$ sont des morphismes.*

Démonstration : L'application Φ_t est surjective car c'est une projection canonique, l'application Ψ_t l'est car f l'est (c'est une conséquence du fait que f soit un morphisme). Soit I un arc sur lequel f est isométrique. Puisque ϕ_t et ψ_t sont 1-lipschitziennes, ϕ_t est isométrique en restriction à I , et ψ_t est isométrique en restriction à $\phi_t(I)$. Ceci implique que ϕ_t est un morphisme. Enfin, ψ_t est également un morphisme car tout arc de T_t est contenu dans une union finie d'ensembles de la forme $\phi_t(I)$ pour des arcs I . \square

On définit deux applications Φ et Ψ de $Mor(\mathbb{F}_n) \times [0, +\infty]$ dans $Mor(\mathbb{F}_n)$ par $\Phi(f, t) = \phi_t$ et $\Psi(f, t) = \psi_t$.

Proposition 6.8. : *Les applications Φ et Ψ sont continues.*

Lemme 6.9. : *Soit $f \in Mor(\mathbb{F}_n)$, $\epsilon > 0$, $t \in [0, \infty[$ et $a, b \in T$. Alors il existe $\alpha > 0$ et un ensemble fini $F \subset [a, b]$ contenant a et b , tel que si $f' \in W_f(F, 1, \alpha)$ et $|s - t| < \alpha$ alors $|\delta_s(a', b') - \delta_t(a, b)| < \epsilon$ (où a' et b' sont les images de a et b par la bijection dans la définition de la topologie de Gromov équivariante).*

Le lemme implique directement la continuité de Φ sur $Mor(\mathbb{F}_n) \times [0, \infty[$. La continuité pour $t = \infty$ découle du fait que, si $f' \in W_f(\{a, b\}, 1, \alpha)$, alors $\delta_s(a', b')$ est constant dès que $t \geq \frac{1}{2}(d(a, b) + \alpha)$. La continuité de Ψ est claire une fois qu'on a celle de Φ . Il reste donc à prouver le lemme.

Démonstration : Comme $\delta_t(a, b)$ est déterminé uniquement par la restriction de f à $[a, b]$ (rappelez qu'il existe une subdivision de complexité minimale incluse dans $[a, b]$), on peut supposer que $T = [a, b]$. Le groupe \mathbb{F}_n n'intervenant pas dans ce lemme, on notera plus simplement le voisinage $W_f(F, \alpha)$. Soit E consistant en a, b , et tous les points de T (c'est-à-dire $[a, b]$) où f se replie. Considérons $f' \in W_f(E, \alpha)$.

Soit $x \rightarrow \bar{x}$ l'application linéaire envoyant T sur $[a', b']$ (en particulier $\bar{a} = a'$ et $\bar{b} = b'$). Cette application préserve la distance à α près ($|d(x, y) - d(\bar{x}, \bar{y})| < \alpha$). Nous avons

$$|d(f'(\bar{x}), f'(\bar{y})) - d(f(x), f(y))| < C\alpha \quad \forall x \in T \quad \forall y \in T \quad (1)$$

E est un ensemble fini donc $\exists C_1, d(x', \bar{x}) < C_1\alpha \quad \forall x \in E$. De plus $|d(f'(x'), f'(y')) - d(f(x), f(y))| < \alpha \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E$ car $f' \in W_f(E, \alpha)$. Comme $d(f'(c), f'(d)) < d(c, d)$ (f' est un morphisme) (1) est vérifiée pour les couples de E avec la constante $(1 + 2C_1)$. Enfin c'est vrai pour tout couple dans T car $x \rightarrow f'(\bar{x})$ augmente les distances d'au plus $C_2\alpha$ sur tout intervalle où f ne se replie pas. Nous pouvons supposer que $C \geq 1$.

Nous prouvons d'abord le lemme quand $\delta_t(a, b)$ et aucun point de $]a, b[$ n'a la même image dans T_∞ que a ou b . Dans ce cas on pose $F = E$. Choisissons θ tel que la boule de centre $f(a)$ et de rayon θ ne contienne aucun sommet du sous-arbre fini $f([a, b])$ différent de $f(a)$ et aucune image d'un point où f se replie. Enfin soit α tel que $10C\alpha < \epsilon$ et $4C\alpha < \theta$. Considérons $f' \in W_f(F, \alpha)$

et $s \geq t - \alpha$.

En voyant $[a, b]$ comme un sous-intervalle de \mathbb{R} , nous avons $f(a + \beta) = f(b - \beta)$ pour $0 \leq \beta \leq \theta$. Les intervalles $I = [a + 2C\alpha, a + 4C\alpha]$ et $J = [b - 4C\alpha, b - 2C\alpha]$ s'injectent de façon isométriques dans le même arc de T_∞ . En utilisant (1), on peut trouver $a_1 \in \overset{\circ}{I}$ et $b_1 \in \overset{\circ}{J}$ avec $f'(\bar{a}_1) = f'(\bar{b}_1)$. Notons que $f([a_1, b_1])$ est disjoint de $f([a, a + 2C\alpha])$. En particulier, comme $\tau(a, b) \leq t$, tout point de $f([a_1, b_1])$ est dans la boule de centre $f(a_1)$ et de rayon $(t - 2C\alpha)$. Par (1) nous avons que $\tau(\bar{a}_1, \bar{b}_1) \leq (t - 2C\alpha) + C\alpha \leq s$ et par conséquent $\delta_s(\bar{a}, \bar{b}) \leq \delta_s(\bar{a}, \bar{a}_1) + \delta_s(\bar{a}_1, \bar{b}_1) + \delta_s(\bar{b}_1, \bar{b}) \leq 10C\alpha < \epsilon$ puisque $\delta_s(\bar{a}, \bar{a}_1) \leq d(\bar{a}, \bar{a}_1) \leq d(a, a_1) + \alpha \leq 5C\alpha$. Ce qui achève la preuve dans ce cas.

Quand $a \sim_t b$ mais $A = f^{-1}(f(a))$ n'est pas réduit à $\{a, b\}$, nous prenons $F = E \cup A$ et on obtient le résultat souhaité en appliquant l'argument précédent à chaque sous-intervalle de $[a, b]$ borné de points de A .

Dans le cas général on fixe une t -subdivision admissible $\sigma = (a, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, b)$ entre a et b . Définissons F comme l'union de E et des préimages $f^{-1}(f(x))$ pour tout point de σ . Soit $f' \in W_f(F, \alpha)$ et $s \in]t - \alpha, t + \alpha[$. On aura $|\delta_s(a', b') - \delta_t(a, b)| < \epsilon$ en choisissant α suffisamment petit.

Nous avons $\delta_t(a, b) = \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i)$, et $\delta_s(\bar{a}, \bar{b}) \leq \sum_{i=1}^n d(\bar{x}_i, \bar{y}_i) + \sum_{i=0}^n d(\bar{y}_i, x_{i+1}^-)$. Par ailleurs, $d(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \leq d(x_i, y_i) + \alpha$. Puisque $y_i \sim_t x_{i+1}$, on peut pour α assez petit (d'après le premier cas) avoir $\delta_s(\bar{y}_i, x_{i+1}^-) \leq \frac{\epsilon}{2}(n + 1)$. Si de plus $n\alpha < \frac{\epsilon}{2}$ on obtient $\delta_s(\bar{a}, \bar{b}) \leq \delta_t(a, b) + \epsilon$.

Nous trouvons maintenant une borne inférieure pour $\delta_s(\bar{a}, \bar{b})$. Nous pouvons supposer que f ne se replie pas sur $I_i = [x_i, y_i]$ (quitte à subdiviser σ si $t = 0$). Le segment $[(\bar{x}_i)_s, (\bar{y}_i)_s] \subset T'_s$ a donc une longueur supérieure à $|I_i| - C\alpha$. Comme ci-dessus, on choisit α de telle sorte que $(\bar{x}_i)_s$ et $(\bar{y}_{i+1})_s$ sont à une distance inférieure à $\frac{\epsilon}{2(n+1)}$.

Nous prouvons maintenant que l'intersection de $[(\bar{x}_i)_s, (\bar{y}_i)_s]$ et $[(x_{i+1}^-)_s, (y_{i+1}^-)_s]$ a une longueur plus petite que $3C\alpha$. Si cela est vérifié, pour ϵ et $C\alpha$ petits par rapport à $\min |I_i|$ on peut écrire $\delta_s(\bar{a}, \bar{b}) \geq \sum_{i=1}^n (|I_i| - C\alpha) - \sum_{i=0}^n (\frac{\epsilon}{2(n+1)} + 3C\alpha) \geq \delta_t(a, b) - 4(n+1)C\alpha - \frac{\epsilon}{2}$ ce qui conclut si on impose $\alpha < \frac{\epsilon}{8C(n+1)}$.

Si l'intersection est de longueur plus grande que $3C\alpha$, on peut trouver $\bar{u} \in [(\bar{x}_i)_s, (\bar{y}_i)_s]$ et $\bar{v} \in [(x_{i+1}^-)_s, (y_{i+1}^-)_s]$ avec $\bar{u}_s = \bar{v}_s$ et $d(\bar{u}, \bar{y}_i), d(\bar{v}, x_{i+1}^-)$ toutes deux plus grandes que $3C\alpha$. Soit $p = f(y_i) = f(x_{i+1}) \in T_\infty$.

Nous avons $d(f(u), p) = d(u, y_i) \geq 3C\alpha - \alpha \geq 2C\alpha$. De même pour v . D'autre part, $d(f(u), f(v)) \leq C\alpha$. Ceci implique que les arcs $f(I_i)$ et $f(I_{i+1})$ appartiennent à l'adhérence de la même composante B de $T_\infty - \{p\}$. En particulier, les points $y_i - \gamma$ et $x_{i+1} + \gamma$ ont la même image dans T_∞ pour γ petit. Puisqu'ils n'ont pas la même image dans T_t , il existe $z \in [y_i, x_{i+1}]$ tel que $f(z)$ est à une distance t de p , et dans une composante de $T_\infty - \{p\}$ autre que B . Par conséquent la distance de $f(u)$ à $f(z)$ est au moins de $t + C\alpha$. Par (1), $f'(z)$ est à une distance supérieure à $t + C\alpha$ de $f'(\bar{u}) = f'(\bar{v})$. Mais $\bar{u}_s = \bar{v}_s$, donc $s \leq t + C\alpha \leq t + \alpha$, ce qui constitue notre contradiction. Ceci

achève la preuve du lemme et donc celle de la proposition. \square

On sait que f_T dépend continûment de T . On vient par ailleurs de voir que $T(f, t)$, le domaine de définition de $\Psi(f, t)$, dépend continûment de f et de t . De plus, l'action de \mathbb{F}_n sur $T(f, t)$ est libre et par isométrie. Si elle n'est pas minimale, on peut toujours remplacer $T(f, t)$ par un sous-arbre sur lequel l'action est minimale. Donc l'application $\tilde{\rho} : C\tilde{V}_n \times [0, \infty] \rightarrow C\tilde{V}_n$, $(T, t) \rightarrow T(f_T, t)$ est continue. Or ρ commute aux homothéties. Par conséquent, l'application $\tilde{\rho}$ passe au quotient en une application continue $\rho : CV_n \times [0, +\infty] \rightarrow CV_n$. Donc CV_n est contractile.

Nous proposons pour conclure cette partie une application de ce résultat sur la nature géométrique de l'outre-espace à un résultat sur le groupe $Out(\mathbb{F}_n)$:

Théorème 6.10. : *Le groupe $Out(\mathbb{F}_n)$ est de présentation finie.*

Nous ne donnerons pas les démonstrations des résultats énoncés ici qui établissent le lien entre ce résultat de nature algébrique et la contractibilité de l'outre-espace sur lequel $Out(\mathbb{F}_n)$ agit.

Définition 6.11. : On dit qu'un groupe est *virtuellement sans torsion* s'il possède un sous-groupe d'indice fini qui est sans torsion, c'est-à-dire dont aucun élément autre que l'élément neutre n'est d'ordre fini.

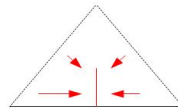
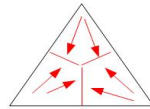
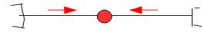
Proposition 6.12. : *Soit G un groupe virtuellement sans torsion qui admet une action simpliciale propre sur un complexe simplicial localement fini (par exemple un arbre) et contractile, de quotient compact, alors G est de présentation finie.*

Proposition 6.13. : *$Out(\mathbb{F}_n)$ est virtuellement sans torsion.*

Une démonstration de ce résultat consiste à remarquer qu'il y a une application naturelle de $Out(\mathbb{F}_n)$ dans $GL_n(\mathbb{Z})$, car un automorphisme ϕ de \mathbb{F}_n induit un isomorphisme de \mathbb{Z}^n (car il envoie une base de \mathbb{Z}_n vue comme famille génératrice libre de \mathbb{Z}^n sur une autre famille génératrice libre de \mathbb{F}_n dont l'image dans \mathbb{Z}^n est une famille génératrice de cardinal n , et comme \mathbb{Z}^n est abélien, cette application se factorise par $Int(\mathbb{F}_n)$). De plus cette application est surjective car l'image de la partie génératrice de $Out(\mathbb{F}_n)$ exhibée en partie 3 est une partie génératrice de $GL_n(\mathbb{Z})$. On montre alors que le noyau de cette application est sans torsion (voir [2]) et que $GL_n(\mathbb{Z})$ est virtuellement sans torsion (voir [13], p. 154). Ceci permet de conclure car $Out(\mathbb{F}_n)$ est isomorphe au produit du noyau de cette application par $GL_n(\mathbb{Z})$.

Le quotient de l'outre-espace par l'action de $Out(\mathbb{F}_n)$ est un nombre fini de simplexes. En effet, il existe à homéomorphisme près un nombre fini de graphes métriques de rang donné sans

sommets de valence 1 ou 2. Pour obtenir un espace compact, on rétracte par déformation forte l'outre-espace sur un sous-espace dont le quotient par $Out(\mathbb{F}_n)$ est compact. On en donne une représentation dans le cas où $n = 2$:



Enfin, ce sous-espace, qui a même type d'homotopie que l'outre-espace, est contractile. Les hypothèses de la proposition sont satisfaites. Le groupe $Out(\mathbb{F}_n)$ est donc de présentation finie. En particulier, on retrouve le résultat de la partie 3 : $Out(\mathbb{F}_n)$ est de type fini.

7 Réalisations ferroviaires et points fixes des éléments de $Aut(\mathbb{F}_n)$

L'objectif de cette partie est de fournir une interprétation topologique de $Out(\mathbb{F}_n)$ introduite par M. Bestvina et M. Handel dans [1], en introduisant les réalisations ferroviaires, ce qui nous permettra de montrer une conjecture de Scott sur le rang du sous-groupe des points fixes des éléments de $Aut(\mathbb{F}_n)$. On montrera cette conjecture dans le cas d'automorphismes dont la classe dans $Out(\mathbb{F}_n)$ est irréductible au sens suivant :

Définition 7.1. : Soit $\alpha \in Out(\mathbb{F}_n)$. On dit que α est *réductible* s'il existe des facteurs libres $\mathbb{F}_{n_i}, 1 \leq i \leq k, n_1 < n$ tels que $\mathbb{F}_{n_1} \star \dots \star \mathbb{F}_{n_k}$ soit un facteur libre de \mathbb{F}_n , et α induise une permutation circulaire des \mathbb{F}_{n_i} . On dit que α est *irréductible* sinon.

Notation : Étant donné un graphe G , on notera EG l'ensemble de ses arêtes et VG l'ensemble de ses sommets.

7.1 Réalisations ferroviaires

Définition 7.2. : Un *représentant topologique* d'un élément $\alpha \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est un triplet (G, ρ, f) (noté par abus f) où (G, ρ) est un graphe marqué (on n'impose plus ici de condition sur la valence des sommets) par \mathbb{F}_n et $f : G \rightarrow G$ est une équivalence d'homotopie, de sorte que la classe de $\rho_*^{-1} f_* g_*$ dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ soit égale à α . Une *réalisation ferroviaire* est un représentant topologique tel que $f|_{G-VG}^k$ soit localement injectif pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La *matrice de transition* associée à f est la matrice $(a_{i,j})_{i,j \in EG}$ de coefficient $a_{i,j}$ égal au nombre de fois que l'image par f de la j -ème arête rencontre la i -ème arête. Une matrice positive entière est *irréductible* si, pour tout indice de ligne i et pour tout indice de colonne j , il existe n tel que le coefficient (i, j) de M^n soit strictement positif. Une matrice est *complètement irréductible* si chacune de ses puissances l'est.

Exemple : La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est irréductible, mais pas complètement irréductible puisque son carré est la matrice identité.

Définition 7.3. : Un sous-graphe d'un graphe G est *non trivial* s'il n'est pas inclus dans VG . Un représentant topologique f est *irréductible* si son graphe ne contient aucun sous-graphe invariant par f non trivial. Cela équivaut au fait que sa matrice de transition soit irréductible.

Une *forêt* est un espace topologique non trivial dont toutes les composantes connexes sont contractiles.

Proposition 7.4. : *Un automorphisme extérieur est irréductible si et seulement si tous ses représentants topologiques, pour lesquels G n'a pas de sommets de valence 1 ni de forêt invariantes, sont irréductibles.*

Nous renvoyons le lecteur à [1], pp. 5-6 et 18, pour une démonstration de ce résultat.

À partir d'une équivalence d'homotopie $f : G \rightarrow G$ tel que la classe de f_* dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ soit α on peut construire un représentant topologique de α , irréductible si α l'est :

On dit qu'une équivalence d'homotopie $f : G \rightarrow G$ est *tendue* si pour toute arête e de G , soit $f(e)$ est un sommet, soit $f|_{\text{int}(e)}$ est localement injective. On peut tendre une équivalence d'homotopie $f : G \rightarrow G$ par une homotopie relativement à VG .

Supposons que $f : G \rightarrow G$ soit une équivalence d'homotopie tendue et que $G_0 \subset G$ soit une forêt invariante. On définit $G_1 = G/G_0$ le graphe quotient obtenu en écrasant chaque composante connexe de la forêt en un de ses points par une homotopie. Si $\pi : G \rightarrow G_1$ est la projection canonique, on définit $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ comme l'équivalence d'homotopie $\pi f \pi^{-1}$ (qui est bien définie car $f(G_0) \subset G_0$). On vérifie que f_1 est également tendue. La matrice de transition de f_1 s'obtient à partir de celle de f en enlevant les lignes et les colonnes associées aux arêtes de G_0 .

On retient deux procédés d'écrasement de forêts :

Une forêt est *prétriviale* pour f s'il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $f^\ell(G_0) \subset VG$. Soit G_0 une forêt prétriviale maximale pour f . On observe alors que cette forêt est invariante par f , car s'il existe $x \in G_0$ tel que $f(x) \notin G_0$, alors la forêt considérée en ajoutant $f(x)$ à G_0 est encore prétriviale, ce qui contredit la maximalité de G_0 . De plus, une arête de G est contenue dans G_0 si et seulement si elle est, pour une certaine itérée de f , envoyée sur un point. Écrasons G_0 pour obtenir f_1 . On dit que f_1 est obtenue à partir de f en écrasant une forêt prétriviale maximale. Si f est tendue, f_1 l'est également. De plus elle n'envoie aucune arête sur un point donc c'est un représentant topologique.

Pour le second type d'écrasement, considérons une forêt invariante maximale G_0 de G pour f . On obtient ainsi f_1 en écrasant une forêt invariante maximale. Comme G_0 est maximale, G_1 ne contient aucune forêt f_1 -invariante. Aussi, si G ne contient pas de sommets de valence 1, et si $f : G \rightarrow G$ représente un automorphisme extérieur irréductible O , alors f_1 est irréductible.

Théorème 7.5. (*Perron-Frobenius*) : *Supposons que M est une matrice à coefficients entiers et positifs ou nuls, irréductible. Alors il existe un unique vecteur propre \vec{w} de norme 1 à coordonnées strictement positives associé à la valeur propre $\lambda \geq 1$. Si $\lambda = 1$, alors M est une matrice de permutation transitive. Enfin, si \vec{v} est un vecteur strictement positif et $\mu > 0$ satisfait $(M\vec{v})_i \leq \mu v_i$ pour tout i et $(M\vec{v})_j < \mu v_j$ pour un certain j , alors $\lambda < \mu$.*

Démonstration : Soit $S = \{(x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}_+)^m, x_1 + \dots + x_m \geq 1 \text{ et } x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq 1\}$. L'ensemble S est un fermé borné de \mathbb{R}^m , donc un compact ; c'est un convexe comme intersection de convexes. L'application $f : S \rightarrow S, \vec{v} \mapsto \frac{M\vec{v}}{|M\vec{v}|}$ est bien définie, et continue. D'après le théorème du point fixe de Brouwer, il existe \vec{v} dans S tel que $f(\vec{v}) = \vec{v}$. \square

Remarque : La valeur propre de Perron-Frobenius est indépendante du choix d'un représentant topologique f d'un élément $\alpha \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$. On renvoie le lecteur à [1], p. 9, pour une démonstration de ce résultat.

À chaque représentant topologique de α on associe la valeur propre de Perron-Frobenius de sa matrice de transition.

Un *tournant* dans G est une paire non-ordonnée d'arêtes orientées de G ayant un sommet commun. Il est *non dégénéré* si les deux arêtes sont distinctes, *dégénéré* dans le cas contraire. Une application $f : G \rightarrow G$ induit une application Df des arêtes de G dans elles-mêmes en envoyant une arête e sur la première arête apparaissant dans $f(e)$. Ceci induit une application Tf des tournants dans eux-mêmes.

Un tournant est *illégal* relativement à $f : G \rightarrow G$ si son image par une itérée de Tf est dégénérée. On réserve dans cette partie le mot *chemin* aux applications continues $\alpha : [0, 1] \rightarrow G$ qui sont soit constantes (chemin trivial) soit localement injectives. Toute application continue $\sigma : [0, 1] \rightarrow G$ est homotope relativement aux extrémités à un chemin $[\sigma]$. Si α est non-trivial, les points de $\alpha^{-1}(V)$ subdivisent α en une concaténation de sous chemins $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_k$, où chaque α_i est envoyé dans une arête E_i . On peut donc voir un chemin comme une concaténation d'arêtes $E_1 \dots E_k$. On peut donc associer à un chemin les tournants $\{\overline{E_i}, E_{i+1}\}$. On dira qu'un chemin est *légal* s'il ne contient aucun tournant illégal.

Le représentant topologique f est une réalisation ferroviaire si et seulement si $f(e)$ est un chemin légal pour toute arête e .

Théorème 7.6. : *Tout automorphisme extérieur α de \mathbb{F}_n est représenté topologiquement par une réalisation ferroviaire irréductible f . En fait, tout représentant topologique dont la valeur propre est minimale est une réalisation ferroviaire. Si la valeur propre de Perron-Frobenius associée à f vaut 1, alors f est un homéomorphisme d'ordre fini.*

Pour montrer ce théorème, on commence par étudier quatre opérations sur les graphes que l'on sera amené à utiliser.

Supposons que w n'est pas un sommet de G mais que $f(w)$ en est un. Sans changer l'espace sous-jacent de G on peut lui donner une nouvelle structure de graphe G_1 en rajoutant un sommet w_1 de valence 2. On dit que $f_1 = f : G_1 \rightarrow G_1$ est obtenue à partir de f par *subdivision*.

Lemme 7.7. : *Si $f : G \rightarrow G$ est un représentant topologique irréductible de α et $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ est obtenue à partir de $f : G \rightarrow G$ par subdivision, alors $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ est un représentant topologique irréductible de α et les valeurs propres associées sont égales.*

Démonstration : On peut supposer que les arêtes de G sont e_1, \dots, e_m et que e_m est subdivisée en deux arêtes, e'_m et e'_{m+1} . Si $M = (a_{i,j})$ et $N = (b_{i,j})$ sont les matrices de transition associées à f et f_1 , on a :

$$b_{i,j} = a_{i,j} \text{ pour } 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq (m-1).$$

$b_{i,m+1} + b_{i,m} = a_{i,m}$ pour $1 \leq i \leq m$.

$b_{m+1,j} = b_{m,j}$ pour $1 \leq j \leq (m+1)$.

Soit \vec{w} un vecteur propre strictement positif de M pour la valeur propre λ . En définissant \vec{v} par $v_i = w_i$ si $i \leq m$ et $v_{m+1} = v_m$ alors on obtient un vecteur propre de N pour la même valeur propre λ . D'après le théorème de Perron-Frobenius, il reste donc à voir que N est une matrice irréductible. Soit Γ le graphe associé à M . On rappelle que c'est un graphe à m sommets tel qu'il existe $a_{i,j}$ arêtes reliant le sommet i au sommet j . On définit le graphe Γ_1 associé à N de la même façon. Ce nouveau graphe est obtenu à partir de Γ en remplaçant le sommet m , par une paire de sommets (y, z) . Chaque arête pointant vers m correspond à une paire d'arêtes de même point initial. On vérifie que pour toute paire de sommets de Γ_1 , il existe un chemin reliant le premier sommet au second. Donc N est irréductible. \square

Supposons que $f : G \rightarrow G$ est un représentant topologique de α et que v est un sommet de G de valence 1 appartenant à l'arête e . Soit $G(1)$ le sous-graphe de G obtenu en écrasant e et $\pi_1 : G \rightarrow G_1$ la projection canonique. Enfin soit $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ le représentant topologique de α obtenu à partir de $\pi_1 f|_{G(1)} : G(1) \rightarrow G(1)$ par écrasement d'une forêt prétriviale maximale (après avoir tendu l'application). On dit que f_1 est obtenue à partir de f par une *homotopie de valence 1*. On notera que G_1 a moins de sommets que G .

Lemme 7.8. : *Si $f : G \rightarrow G$ est un représentant topologique irréductible et $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ est un représentant topologique irréductible obtenu à partir de f par une suite fine d'homotopies de valence 1, alors les valeurs propres associées vérifient $\lambda_1 < \lambda$.*

Démonstration : La matrice de transition de f_1 , de taille k , s'obtient à partir de la matrice de transition de f , M (de taille n), en effaçant les lignes et les colonnes correspondant à certaines arêtes de G . On peut supposer que ces arêtes sont e_{k+1}, \dots, e_n . On remarque (on peut revenir à la caractérisation de l'irréductibilité par un graphe pour le voir) qu'il existe $1 \leq k \leq i_0$ et $(k+1) \leq j_0 \leq n$ tels que $a_{i_0, j_0} > 0$. Soit \vec{w} le vecteur propre strictement positif de M pour la valeur propre λ . Posons \vec{v} le vecteur de taille k composé des k premières coordonnées de \vec{w} . Alors $(M_1 \vec{v})_i \leq \lambda v_i$ pour $1 \leq i \leq k$ et $(M_1 \vec{v})_{i_0} < \lambda v_{i_0}$. Par le théorème de Perron-Frobenius, $\lambda_1 < \lambda$. \square

Supposons maintenant que $v \in V$ est de valence 2. Notons e_1, \dots, e_m les arêtes de G . On peut supposer que v est le sommet final de e_{m-1} et le sommet initial de e_m . Soit $g_t : G \rightarrow G$ une homotopie à support dans $e_{m-1} \cup e_m$ entre $g_0 = id$ et une application g_1 qui envoie e_m sur son sommet terminal, étire e_{m-1} sur $e_{m-1} \cup e_m$ et laisse invariant le reste du graphe. Soit $f(1) : G \rightarrow G$ l'application tendue issue de $g_1 f : G \rightarrow G$; on remarque que v n'est pas dans $f(1)(VG)$. Défi-

nissons $f(2) : G(2) \rightarrow G(2)$ en réalisant l'inverse d'une subdivision, c'est-à-dire en retirant v et en tendant l'image de la nouvelle arête notée e'_{m-1} . Si E est une arête de G autre que e_m ou e_{m-1} , alors E est naturellement une arête de $G(2)$ et $f(2)(E)$ est obtenue à partir de $f(E)$ en ôtant toutes les occurrences de e_m et $\overline{e_m}$ et en remplaçant e_{m-1} (resp. $\overline{e_{m-1}}$) par e'_{m-1} (resp. par $\overline{e'_{m-1}}$). L'image par $f(2)$ de e'_{m-1} est obtenue à partir de la concaténation $f(e_m) \cdot f(e_{m-1})$ par tension, en ôtant toutes les occurrences de e_m et $\overline{e_m}$ et en remplaçant e_{m-1} (resp. $\overline{e_{m-1}}$) par e'_{m-1} (resp. par $\overline{e'_{m-1}}$). Enfin, définissons $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ comme le représentant topologique obtenu à partir de $f(2)$ en écrasant une forêt prétriviale maximale. On dit que f_1 est obtenu à partir de f par une *homotopie de valence 2 associée à (v, e_m)* . Remarquons que G_1 a moins de sommets que G et qu'aucun sommet de valence 1 n'a été ajouté.

Lemme 7.9. : *Supposons que $f : G \rightarrow G$ soit un représentant topologique irréductible et que $f_2 : G_2 \rightarrow G_2$ soit un représentant topologique irréductible obtenu à partir de f par une homotopie de valence 2 associée à (v, e_m) . Soit M la matrice de transition associée à f et soit \vec{w} un vecteur strictement positif tel que $M\vec{w} = \lambda\vec{w}$. Si $w_{m-1} \leq w_m$, alors $\lambda_2 \leq \lambda$. Si $w_{m-1} < w_m$, alors $\lambda_2 < \lambda$.*

Démonstration :

Soit $M = (a_{i,j})$ la matrice de transition de f , de taille m . On définit la matrice M' de taille $(m-1)$ de la façon suivante : on ajoute la m -ième colonne de M à sa $(m-1)$ -ème et on supprime la dernière ligne. Si f est localement injective en v , $M' = M(2)$ est la matrice de transition de l'application notée $f(2)$ dans la définition d'une homotopie de valence 2. Sinon, on doit tendre $f(1)$ pour obtenir $f(2)$ donc $M(2)$ s'obtient à partir de M' en diminuant certaines entrées de la $(m-1)$ -ème colonne.

On définit le vecteur \vec{v} de taille $(m-1)$ par $v_i = w_i$ pour $1 \leq i \leq (m-1)$. On rappelle que \vec{w} est le vecteur propre strictement positif de M . On a $(M(2)\vec{v})_i \leq \lambda w_i - a_{i,m}(w_m - w_{m-1}) \leq \lambda w_i = \lambda v_i$ pour tout $1 \leq i \leq (m-1)$. Puisque M est irréductible, il existe $1 \leq i_0 \leq (m-1)$ tel que $a_{i_0,m} > 0$. Si $w_m > w_{m-1}$, $(M(2)\vec{v})_{i_0} < v_{i_0}$. Si $M(2)$ est irréductible, $M_1 = M(2)$ et le théorème de Perron-Frobenius permet de conclure.

Si $M(2)$ est réductible, alors M_2 , la matrice de transition de $f_2 : G_2 \rightarrow G_2$, est obtenue à partir de $M(2)$ en supprimant les lignes et les colonnes correspondant aux arêtes d'une forêt prétriviale invariante. Si la $(m-1)$ -ème ligne et la $(m-1)$ -ème colonne de $M(2)$ sont supprimées, alors M_2 est une sous-matrice carrée de M . Or on sait qu'une sous-matrice carrée d'une matrice irréductible est irréductible, de valeur propre strictement plus petite. On peut donc conclure dans ce cas. Supposons au contraire que la $(m-1)$ -ème ligne et la $(m-1)$ -ème colonne de $M(2)$ ne sont pas supprimées. Les arêtes de la forêt prétriviale invariante F_1 peuvent être vues comme des segments de G (a priori on est dans $G(2)$). L'image par f de toute arête de F_1 est contenue

dans $F_1 \cup e_m$. De même, les arêtes de la forêt invariante F_2 peuvent être vues comme des arêtes de G ; l'image par f de ces arêtes est contenue dans $F_2 \cup F_1 \cup e_m$. Puisque M est irréductible, il existe une arête e_{i_0} dans G telle que $e_{i_0} \subset F_2 \cup F_1 \cup e_m$ et telle que $a_{i_0, m} > 0$. On conclut alors comme dans le cas où $M(2)$ est irréductible. \square

Enfin supposons qu'une paire d'arêtes issues d'un même sommet ont même image par f . Soit G_1 le graphe obtenu en identifiant ces deux arêtes de telle sorte que f induise une application $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$. On dit que f_1 est obtenue à partir de f par un *pli élémentaire*. Plus généralement supposons que e_i et e_j sont des arêtes de G avec un même sommet initial v et qu'il existe des segments initiaux maximaux non triviaux $e'_i \subset e_i$ et $e'_j \subset e_j$ dont les points finaux sont dans $f^{-1}(V)$ et tels qu'ils ont même image par f . On subdivise les deux arêtes en les points finaux de e'_i et e'_j puis on effectue un recollement élémentaire. On appelle ce procédé un *pli de e_i et e_j* . C'est un *pli total* si ni e_i ni e_j ne sont subdivisées. On parle de *pli partiel* dans le cas contraire.

Lemme 7.10. : *Supposons que $f : G \rightarrow G$ soit un représentant topologique irréductible de α et que $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ est obtenu à partir de f en recollant une paire d'arêtes. Si f_1 est un représentant topologique, il est irréductible, et $\lambda_1 = \lambda$. Sinon, soit $f_2 : G_2 \rightarrow G_2$ le représentant topologique irréductible obtenu à partir de f_1 en rendant l'application tendue, en écrasant une forêt prétriviale maximale puis en écrasant une forêt invariante maximale. Alors $\lambda_2 < \lambda$.*

Démonstration : D'après le lemme 1, on peut supposer que le pli est élémentaire. En particulier on peut supposer que les deux arêtes pliées ne déterminent pas la même arête non-orientée. Notons e_1, \dots, e_m les arêtes de G de sorte que e_{m-1} et e_m sont les arêtes pliées. Soit M la matrice de transition de f , de taille m . Définissons la matrice de taille $(m-1)$, M_1 , par

$$b_{i,j} = a_{i,j} \text{ si } 1 \leq i \leq (m-2), 1 \leq j \leq (m-1).$$

$$b_{m-1,j} = a_{m-1,j} + a_{m,j}, \text{ pour } 1 \leq j \leq (m-1).$$

On vérifie que cette matrice est irréductible.

Si l'application f_1 est un représentant topologique, M_1 est sa matrice de transition, parce que tout intervalle de G envoyé par f dans e_{m-1} ou e_m correspond à un intervalle de G_1 qui est envoyé par f_1 sur l'image $e'_{m-1} \subset G_1$ de e_{m-1} et e_m . Soit \vec{w} le vecteur propre strictement positif de M . Définissons \vec{v} par $v_i = w_i$ pour $1 \leq i \leq (m-2)$ et $v_{m-1} = w_{m-1} + w_m$. On vérifie que \vec{v} est un vecteur propre de M_1 associé à la valeur propre λ . D'après le théorème de Perron-Frobenius, $\lambda_1 = \lambda$.

Si f_1 n'est pas un représentant topologique, la matrice de transition de f_2 est obtenue en diminuant strictement au moins une entrée de M_1 et, éventuellement, en supprimant les colonnes et les lignes correspondant à certaines arêtes de G_1 . Si cette dernière opération n'a pas lieu, la matrice de transition de f_2 est de taille $(m-1)$, avec un coefficient strictement inférieur au

coefficient correspondant dans M_1 . Par la seconde partie du théorème de Perron-Frobenius, on conclut que $\lambda_2 < \lambda$.

Supposons maintenant qu'au moins une ligne et une colonne de M_1 est supprimée pour obtenir M_2 . On peut supposer qu'on élimine les r premières lignes et colonnes de M_1 ($1 \leq r \leq (m-2)$). Puisque M_1 est irréductible, il existe $1 \leq j_0 \leq r$ et $r+1 \leq i_0 \leq m-1$ tels que $b_{i_0, j_0} > 0$. Soit \vec{u} le vecteur formé des $(m-r-1)$ dernières coordonnées de \vec{v} . Alors $(M_2 \vec{u})_i \leq \lambda_1 u_i$ pour $1 \leq i \leq (m-r-1)$ et $(M_2 \vec{u})_{i_0-r} \leq \lambda_1 u_{i_0-r}$. Donc $\lambda_2 < \lambda_1 = \lambda$. \square

Démonstration du théorème : Supposons que $f : G \rightarrow G$ soit un représentant topologique irréductible de α et que les sommets de G soient de valence au moins 3. Dans le cas où f n'est pas une réalisation ferroviaire, nous allons trouver un autre représentant topologique irréductible $f_4 : G_4 \rightarrow G_4$ tel que $1 \leq \lambda_4 \leq \lambda$. En utilisant le même argument qu'à la proposition 5.2, on voit que le nombre d'arêtes de G est majoré par $3(n-1)$. On sait que la valeur propre de Perron-Frobenius est minorée par le minimum des sommes des entrées sur une ligne. Comme la taille des matrices est bornée, il existe un entier k tel que le minimum des sommes des entrées sur une ligne de M^k est supérieur à une quelconque entrée de M . Donc on ne peut atteindre qu'un nombre fini de matrices en diminuant les valeurs propres. Aussi l'itération de notre procédé nous donnera nécessairement une réalisation ferroviaire.

Si $\lambda = 1$ M est une matrice de permutation et f est un homéomorphisme. On peut donc supposer que $\lambda > 1$. D'autre part, on peut également supposer que f envoie chaque composante de $G - f^{-1}(V)$ linéairement sur une arête (par rapport à une certaine métrique sur G).

Puisque M est irréductible, $\bigcup_{l=1}^{\infty} f^{-l}(V)$ est dense dans G .

Si f n'est pas une réalisation ferroviaire il existe $P \in G - V$ tel que $f(P) \in V$ et f^k n'est pas localement injective en P pour un $k > 1$. Soit U un voisinage de P tel que :

- (i) $\delta U = s, t \subset f^{-l}(V)$ pour un $l > 0$;
- (ii) $f^i|_U$ est injective pour $1 \leq i \leq k-1$;
- (iii) Tout point de $U - P$ admet exactement deux antécédents pour f^k
- (iv) $P \notin f^i(U)$ pour $1 \leq i \leq k$.

On effectue une subdivision en P . Puis on subdivise en les $\{f^j(s), f^j(t) : 0 \leq j \leq l-1\}$ en commençant par les plus grands indices. Notons $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ le représentant topologique de O résultant de cette opération et remarquons, d'après le lemme 1, que $\lambda_1 = \lambda$. Le sommet P est de valence 2 dans G_1 , relié aux arêtes α et β . Si g est une équivalence d'homotopie et e une arête on note $Dg(e)$ la première arête rencontrée dans $g(e)$. On plie $Df_1^{k-1}(\alpha)$ et $Df_1^{k-1}(\beta)$ pour obtenir $f(1) : G(1) \rightarrow G(1)$. Si $f(1)$ n'est pas un représentant topologique, on définit $f_2 : G_2 \rightarrow G_2$ comme le représentant topologique irréductible obtenu à partir de $f(1)$ par tension, écrasement d'une forêt maximale prétriviale et écrasement d'une forêt invariante maximale. dans ce cas le lemme 4 implique que $\lambda_2 < \lambda$. Si $f(1)$ est un représentant topologique, alors P est un sommet

de valence 2 de $G(1)$ d'arêtes incidentes α et β ; on plie alors $Df_1^{k-2}(\alpha)$ et $Df_1^{k-2}(\beta)$ et on obtient $f(2) : G(2) \rightarrow G(2)$. En répétant cette dichotomie k fois si nécessaire, on arrive enfin à un représentant topologique irréductible $f_2 : G_2 \rightarrow G_2$ tel que soit $\lambda_2 < \lambda$ soit $\lambda_2 = \lambda$ et P est un sommet de valence 1 de G_2 .

Effectuons une suite finie d'homotopies de valence 1 pour éliminer tous les sommets de valence 1, puis écrasons une forêt invariante maximale. Notons f_3 le représentant topologique irréductible résultant de cette opération. le lemme 3 implique que $\lambda_3 < \lambda$.

Si v est un sommet de valence 2 de G_3 avec arêtes incidentes e_i et e_j , effectuons une homotopie de valence 2 associée à e_j avec $w_i \leq w_j$ pour le vecteur propre strictement positif \vec{w} associé à M_3 . On peut écraser une forêt invariante maximale si nécessaire pour garder une matrice de transition irréductible. On répète ce procédé jusqu'à ce qu'il ne reste plus de sommets de valence 2. Notons $f_4 : G_4 \rightarrow G_4$ le représentant topologique irréductible résultant de cette opération. Le lemme 7.9 entraîne que $\lambda_4 < \lambda$. \square

7.2 Une démonstration d'une conjecture de Scott

Soit $\phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$, (G, ρ) un graphe métrique marqué et $f : G \rightarrow G$ un représentant topologique de ϕ . Soit $x \in G$.

Tout chemin u dans G d'origine x et d'extrémité $f(x)$ détermine un automorphisme

$$\begin{aligned} (f_u)_\# & : \pi_1(G, x) &\rightarrow & \pi_1(G, x) \\ [\alpha] & \mapsto & [u.f(\alpha).u^{-1}] \end{aligned}$$

où α est un lacet en x dans G .

Soit $\tilde{p} : \tilde{G} \rightarrow G$ un revêtement universel de G , et $\tilde{x} \in \tilde{G}$ un relèvement de x . Nous avons vu (proposition 5.4) que $\text{Aut}(\tilde{p})$ s'identifie de manière naturelle avec $\pi_1(G, x)$. Étant donné u un chemin dans G d'origine x et d'extrémité $f(x)$, on définit $\tilde{f}_u : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ le relèvement de f vérifiant $\tilde{f}_u(\tilde{x}) = \tilde{u}(1)$, où \tilde{u} est l'unique relèvement de u tel que $\tilde{u}(0) = \tilde{x}$.

On définit alors

$$\begin{aligned} (\tilde{f}_u)_\# & : \text{Aut}(\tilde{p}) &\rightarrow & \text{Aut}(\tilde{p}) \\ t & \mapsto & \tilde{f}_u \circ t \circ \tilde{f}_u^{-1} \end{aligned}$$

(Plus généralement, pour $g : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$, on définit $g_\# : \text{Aut}(\tilde{p}) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{p})$ par $g_\#(t) = g \circ t \circ g$).

Théorème 7.11. : *L'isomorphisme (que l'on notera Ψ) entre $\text{Aut}(\tilde{p})$ et $\pi_1(G, x)$ construit à la proposition identifie $(\tilde{f}_u)_\#$ et $(f_u)_\#$, au sens où $(f_u)_\# \circ \Psi = \Psi \circ (\tilde{f}_u)_\#$, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}(\tilde{p}) & \xrightarrow{(\tilde{f}_u)_\#} & \text{Aut}(\tilde{p}) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \pi_1(G, x) & \xrightarrow{(f_u)_\#} & \pi_1(G, x) \end{array}$$

Démonstration : Soit $t \in \text{Aut}(p)$, alors $\Psi(t) = [\tilde{p} \circ \gamma_t]$, où γ_t est l'unique chemin dans \tilde{G} d'origine \tilde{x} et d'extrémité $\tilde{t}\tilde{x}$. Or, $\tilde{f}_u(\gamma_t)$ est le relèvement de $f(\tilde{p}(\gamma_t))$ d'origine $\tilde{f}_u(\tilde{x})$ et d'extrémité $\tilde{f}_u(\tilde{t}\tilde{x}) = \tilde{f}_u \circ t \circ \tilde{f}_u^{-1}(\tilde{f}_u(\tilde{x}))$. Comme de plus \tilde{u} est un chemin dans Γ d'origine $\tilde{u}(0) = \tilde{x}$ et d'extrémité $\tilde{u}(1) = \tilde{f}_u(\tilde{x})$ (par définition de \tilde{f}_u), le relèvement de $u.f(\tilde{p}(\gamma_t)).u^{-1}$ d'origine \tilde{x} est $\tilde{u}.\tilde{f}_u(\gamma_t).\tilde{f}_u \circ t \circ \tilde{f}_u^{-1}(\tilde{u}^{-1})$. Son extrémité est $\tilde{f}_u \circ t \circ \tilde{f}_u^{-1}(\tilde{x})$. Donc $\Phi^{-1} \circ (\tilde{f}_u)_\# \circ \Phi(t)$ est l'unique élément de $\text{Aut}(\tilde{p})$, noté g , tel que $g(\tilde{x}) = \tilde{f}_u \circ t \circ \tilde{f}_u^{-1}(\tilde{x})$. C'est donc bien $(\tilde{f}_u)_\#$. \square

Remarquons que $\text{Fix}((\tilde{f}_u)_\#) = \{t \in \text{Aut}(\tilde{p}) : t \circ (\tilde{f}_u) = (\tilde{f}_u) \circ u\}$.

De plus, $\text{Fix}((\tilde{f}_u)_\#)$ est un sous-groupe du groupe $\text{Aut}(\tilde{p})$, qui est libre (puisque'il est isomorphe à $\pi_1(G, x)$, lui-même isomorphe à \mathbb{F}_n), donc le théorème de Nielsen-Schreier (théorème 3.7) assure que $\text{Fix}((\tilde{f}_u)_\#)$ est libre. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 7.12. : *Si $\tilde{f} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ est un relèvement de f , et si $\text{Rang}(\text{Fix}((\tilde{f}_u)_\#)) \geq 2$, alors $\text{Fix}(\tilde{f}) \neq \emptyset$.*

On aura à nouveau besoin de résultats sur les axes de translation d'éléments de $\text{Aut}(\tilde{p})$, en particulier :

Lemme 7.13. : *Si $t \in \text{Aut}(\tilde{p})$, et si C est un sous-ensemble connexe de \tilde{G} tel que $tC = C$, alors l'intersection entre C et l'axe de translation de t est non vide.*

Démonstration : Soit $x \in C$, alors $tx \in C$ donc $[x, tx] \subset C$ par connexité de C . Or, l'intersection de $[x, tx]$ avec l'axe de translation de t est non vide (lemme 6.3). \square

Démonstration du théorème 7.12 : Soit $t \in \text{Fix}(\tilde{f})_\#$, et A l'axe de t . Comme A est connexe et \tilde{f} est continu, $\tilde{f}(A)$ est connexe. De plus, $t\tilde{f}(A) = \tilde{f}(A)$. En effet, soit $a \in A$. Comme $t \in \text{Fix}(\tilde{f}_\#)$, $t \circ \tilde{f}(a) = \tilde{f}(ta)$, et $ta \in A$ puisque A est l'axe de t . Donc $\tilde{f}(A) \cap A \neq \emptyset$. Soit donc $a \in A$ tel que $\tilde{f}(a) \in A$. Quitte à remplacer t par t^{-1} , on peut supposer que $\tilde{f}(a)$ est dans la composante connexe de $A - \{a\}$ préservée par t . Comme $\text{Rang}(\text{Fix}(\tilde{f})) \geq 2$, il existe $s \in \text{Fix}(\tilde{f})_\#$ tel que $t \circ s \neq s \circ t$. Soit B son axe, alors par le lemme 6.3, $A \cap B$ est compact. On peut à nouveau supposer que $\tilde{f}(b)$ est dans la composante connexe de $B - \{b\}$ préservée par s . Quitte à remplacer a et b par $t^n(a)$ et $s^m(b)$ (avec $n, m \in \mathbb{N}$), on peut également supposer que $a \notin A \cap B$ et que $b \notin A \cap B$. Alors $[a, b] \subset [\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)]$.

Supposons par l'absurde que $\text{Fix}(\tilde{f}) = \emptyset$. On peut alors définir $\Phi : [a, b] \rightarrow \{0, 1\}$ par $\Phi(x) = 1$ si $x \in [\tilde{f}(x), b]$ et 0 sinon. Alors Φ est continu car \tilde{f} l'est, donc comme $[a, b]$ est connexe, Φ est constant. Pourtant, pour $x \in [a, b]$ suffisamment proche de a , $x \in [\tilde{f}(x), b]$, ce qui est faux pour x suffisamment proche de b . D'où une contradiction. Donc $\text{Fix}(\tilde{f}) \neq \emptyset$. \square

Théorème 7.14. : *Soit $n \in \mathbb{N}$, $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$, (G, ρ) un graphe métrique marqué et $f : G \rightarrow G$ un représentant topologique de la classe de Φ dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$. Si $\text{Rang}(\text{Fix}(\Phi)) \geq 2$, alors il existe*

$y \in \text{Fix}(f)$ tel que, sous l'identification canonique entre \mathbb{F}_n et $\pi_1(G, y)$, Φ soit conjugué à $(f_u)_\#$, où u est le chemin constant égal à y .

Démonstration : D'après la proposition 7.11, Φ est conjugué à $(\tilde{f})_\#$ où \tilde{f} est un relèvement de f (en particulier $\text{Rang}(\text{Fix}((\tilde{f})_\#)) \geq 2$). De même, pour $\tilde{y} \in \tilde{G}$, $(\tilde{f})_\#$ est conjugué à $(f_v)_\# : \pi_1(G, y) \rightarrow \pi_1(G, y)$ déterminé par f et par le chemin $v = \tilde{p}(\gamma)$, où γ est le chemin dans \tilde{G} d'origine \tilde{y} et d'extrémité $\tilde{f}(\tilde{y})$. Par la proposition précédente, on peut choisir $\tilde{y} \in \text{Fix}(\tilde{f})$. Alors v est le chemin constant égal à y , ce qui entraîne le résultat annoncé. \square

On cherche désormais à établir la conjecture de Scott, qui s'énonce ainsi :

Théorème 7.15. (*M. Bestvina, M. Handel*) : Soit $n \in \mathbb{N}$, et $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$, alors $\text{Rang}(\text{Fix}(\phi)) \leq n$.

On trouvera une preuve de ce résultat dans [1]. Nous nous contenterons ici de démontrer ce théorème dans le cas où la classe de ϕ dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est irréductible. On a en fait dans ce cas un résultat un peu plus précis :

Théorème 7.16. : Soit $n \in \mathbb{N}$, et $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$, dont la classe dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est irréductible, alors $\text{Rang}(\text{Fix}(\phi)) \leq 1$.

Puisque les sous-groupes de \mathbb{F}_1 sont de rang inférieur à 1, on peut supposer $n \geq 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$, irréductible. D'après le théorème 7.6, il existe un graphe G et un représentant topologique irréductible $f : G \rightarrow G$ de Φ qui est une réalisation ferroviaire. Soit M sa matrice de transition, et λ la valeur propre de Perron-Frobenius associée. On munit le graphe G d'une distance telle que toute arête e soit isométrique à un intervalle de \mathbb{R} de longueur v_e , où v_e est la coordonnée indiquée par e d'un vecteur (noté v) à coordonnées strictement positives vérifiant $vM = \lambda v$. On dit alors que $f : G \rightarrow G$ est une *réalisation ferroviaire irréductible* de Φ .

Démonstration du théorème dans le cas où $\lambda = 1$:

Supposons $\text{Rang}(\text{Fix}(\Phi)) \geq 2$, et soit alors $y \in \text{Fix}(f)$ (qui existe d'après la proposition). Soit $f_\#$ l'automorphisme de $\pi_1(G, y)$ déterminé par f et par le chemin constant égal à y . D'après la proposition, $\text{Rang}(\text{Fix}(f_\#)) \geq 2$

Comme $\lambda = 1$, d'après le théorème 7.6, f est un homéomorphisme, qui ne laisse invariant aucun sous-graphe de G puisqu'il est irréductible.

L'ensemble des arêtes dont y est une extrémité est un sous-graphe invariant de G , donc c'est G , et comme on peut supposer que G n'a pas de sommet de valence 2, G est le graphe R_n . Si γ est un lacet dans G homotope à $f(\gamma)$, alors γ est homotope à un lacet constant (sinon f fixerait une arête). Donc $\text{Rang}(\text{Fix}(f_\#)) = 0$, pourtant d'après la proposition ce rang est supérieur à 2 : absurde. Donc $\text{Rang}(\text{Fix}(\Phi)) \leq 1$. \square

On suppose dans toute la suite $\lambda > 1$.

Soit $\sigma : [0, 1] \rightarrow G$ un chemin constant ou localement injectif, $f : G \rightarrow G$ un représentant topologique irréductible de Φ . On suppose que les extrémités de σ sont dans $Fix(f)$. On dit que σ est un *chemin de Nielsen* pour f si $f(\sigma)$ est homotope à σ . On dit que σ est *indivisible* s'il ne s'écrit pas comme la concaténation de deux sous-chemins qui sont des chemins de Nielsen non triviaux.

Remarque : Pour $f : G \rightarrow G$, et σ un chemin dans G dont les extrémités sont fixées par f , $f(\sigma)$ se décompose de manière unique $f(\sigma) = \mu_1.\tau_1.\bar{\tau}_1.\mu_2\dots\mu_l$, où les μ_i et les τ_i sont des chemins légaux, les τ_i étant non triviaux, et les tournants $\{\bar{\mu}_i, \mu_{i+1}\}$ ne sont pas dégénérés. On pose $[f(\sigma)] = \mu_1\dots\mu_l$, alors σ est un chemin de Nielsen si et seulement si $[f(\sigma)] = \sigma$.

Lemme 7.17. : *Il n'existe pas de chemins de Nielsen contenus dans une arête de G .*

Démonstration : Si un tel chemin existait, comme f multiplie linéairement la longueur d'une arête par λ , on devrait avoir $\lambda = 1$, ce qui est faux. \square

Lemme 7.18. : *Si f est une réalisation ferroviaire irréductible d'un élément de $Out(\mathbb{F}_n)$, alors tout chemin de Nielsen pour f est la concaténation de chemins de Nielsen indivisibles.*

Démonstration : Par récurrence sur le nombre n d'arêtes traversées par un chemin de Nielsen. Le cas $n = 1$ est assuré par le lemme précédent. Soit $n \geq 2$, et σ un chemin de Nielsen traversant n arêtes. S'il est irréductible, il n'y a rien à faire. Sinon, $\sigma = \sigma_1.\sigma_2$ avec σ_1 et σ_2 chemins de Nielsen, traversant donc chacun au moins deux arêtes, donc également moins de $n - 1$ arêtes. On applique alors l'hypothèse de récurrence à σ_1 et σ_2 . \square

Théorème 7.19. : *Soit $n \in \mathbb{N}$, et $\Phi \in Out(\mathbb{F}_n)$. Alors il existe une réalisation ferroviaire irréductible $f : G \rightarrow G$ de Φ tel qu'il y ait au plus un chemin de Nielsen indivisible pour f .*

Avant de montrer ce résultat, on commence par prouver que le nombre de chemins de Nielsen pour une réalisation ferroviaire irréductible de Φ est toujours fini. Dans un deuxième temps, on montrera qu'il existe une réalisation ferroviaire minimisant ce nombre (une telle réalisation vérifiera une condition de stabilité) et que celle-ci convient. On aura de deux lemmes pour la démonstration de cette première étape.

Lemme 7.20. : *Un chemin de Nielsen indivisible σ contient exactement un tournant illégal. En particulier, il existe d'uniques chemins légaux non triviaux α, β et τ tels que $\sigma = \alpha.\beta$, $f(\alpha) = \alpha.\tau$, $f(\beta) = \bar{\tau}.\beta$ et $\{\bar{\alpha}, \beta\}$ soit un tournant non dégénéré.*

Démonstration : On écrit $\sigma = \sigma_1\dots\sigma_k$ où les $\sigma_i, i \in \{1, \dots, k\}$ sont des chemins légaux de longueur maximale (les tournants illégaux de σ sont alors les ensembles $\{\bar{\sigma}_i, \sigma_{i+1}\}$ pour

$i \in \{1, \dots, k-1\}$). Montrons que $k = 1$.

Si $k = 0$, soit L la longueur de σ . L'image de σ par f est un chemin légal de longueur $\lambda L > L$ (on a supposé $\lambda > 1$). On n'a donc pas $[f(\sigma)] = \sigma$, et σ n'est donc pas un chemin de Nielsen : absurde.

Supposons désormais $k > 2$, et écrivons comme à la remarque $f(\sigma) = \mu_1 \cdot \tau_1 \cdot \overline{\tau_1} \cdot \mu_2 \dots \mu_l$. Comme $[f(\sigma)] = \sigma$, nécessairement $l = k$ et pour $i \in \{1, \dots, k\}$, $\sigma_i = \mu_i$ et $f(\sigma_i) = \overline{\tau_{i-1}} \cdot \rho_i \cdot \tau_i$, en définissant τ_0 et τ_k comme des chemins triviaux. Pour $1 < i < k$ et $j > 0$, définissons par récurrence $\sigma_i^0 = \sigma_i$, et σ_i^{j+1} le sous-chemin de σ_i^j tel que $f(\sigma_i^{j+1}) = \sigma_i^j$. L'intersection $\bigcap \sigma_i^j$ est un chemin stable par f , donc réduit à un point noté P_i puisque $\lambda > 1$. Les P_i subdivisent alors σ en chemins de Nielsen, ce qui contredit l'indivisibilité de σ .

Donc $k = 1$. □

Lemme 7.21. (*Lemme de simplification bornée*) : Soit F un groupe libre.

$\forall \Phi \in \text{Aut}(F), \exists C(\Phi) > 0, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in F, |\alpha_1 \cdot \alpha_2| = |\alpha_1| + |\alpha_2| \Rightarrow |\Phi(\alpha_1 \cdot \alpha_2)| \geq |\Phi(\alpha_1)| + |\Phi(\alpha_2)| - C(\Phi)$.

On renvoie pour une démonstration de ce théorème à [2] (celle-ci se fait par des arguments métriques). L'énoncé de D. Cooper se place dans le cadre d'automorphismes de \mathbb{F}_n . On peut le transcrire en termes de graphes, ce que nous admettrons implicitement dans la suite.

Proposition 7.22. : Soit f une réalisation ferroviaire. Alors il n'y a qu'un nombre fini de chemins de Nielsen indivisibles pour f .

Démonstration : Soit σ un chemin de Nielsen indivisible pour f , et α, β et τ comme dans le lemme 7.19.

Alors $L(\sigma) = L(\alpha) + L(\beta)$ et $L(f(\sigma)) = L(\alpha) + 2L(\tau) + L(\beta)$. Par ailleurs, $L(f(\sigma)) = \lambda L(\sigma)$. Donc $L(\sigma) = \lambda L(\sigma) - 2L(\tau)$ ou encore $L(\sigma) = \frac{2}{\lambda-1} L(\tau)$. Or, par le lemme de simplification bornée, $L(\tau)$ est borné indépendamment de σ , donc la longueur d'un chemin de Nielsen indivisible est bornée. Comme de plus il n'y a aucun chemin de Nielsen contenu dans une arête, il y a un nombre fini de chemins de Nielsen pour f . □

Soit $f : G \rightarrow G$ un représentant ferroviaire irréductible de Φ et $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ obtenu à partir de f en pliant une paire d'arêtes. Alors f_1 est encore un représentant ferroviaire irréductible de Φ , et l'application quotient $p : G \rightarrow G_1$ induit une bijection entre $\text{Fix}(f)$ et $\text{Fix}(f_1)$. En effet, des éléments distincts de $\text{Fix}(f)$ ont des images distinctes par f donc ne peuvent être identifiés par un pli, donc $p|_{\text{Fix}(f)}$ est injective. La surjectivité vient du fait que tout élément fixé par f_1 l'est aussi par f . Si σ est un chemin de Nielsen irréductible dans G , alors $[p(\sigma)]$ est un chemin de Nielsen irréductible dans G_1 . Réciproquement, tout chemin de Nielsen irréductible de G_1 est l'image par p d'un chemin de Nielsen irréductible de G .

Si $\sigma = \alpha.\beta$ (décomposition du lemme 7.19) est un chemin de Nielsen pour f dans G , et si $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ est obtenu en pliant le segment initial de $\bar{\alpha}$ et le segment initial de β , on dit que f_1 est obtenu à partir de f par un *pli de Nielsen*. On note $W(f)$ l'ensemble des réalisations ferroviaires irréductibles de f obtenus par un nombre fini de plis de Nielsen.

On dit que deux représentants ferroviaires irréductibles $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ et $f_2 : G_2 \rightarrow G_2$ sont *projectivement équivalents* s'il existe un homéomorphisme $h : G_1 \rightarrow G_2$ qui envoie une arête sur une autre arête, en multipliant leurs longueurs linéairement par un même facteur, tel que $f_2 \circ h = h \circ f_1$.

Lemme 7.23. : *Si aucun pli partiel n'intervient dans la construction de $W(f)$, alors $W(f)$ contient un nombre fini de classes d'équivalence projectives. On dit alors que f est stable.*

Démonstration : On remarque que si deux graphes G_1 et G_2 (obtenus par plis successifs) considérés sans leur métrique sont identiques, et si $f_1(e) = f_2(e)$ pour tout $e \in EG$, alors f_1 et f_2 sont projectivement équivalents. Le résultat vient du fait qu'il y a un nombre fini de matrices de transition pour des éléments de $W(f)$. En effet, le nombre d'arêtes dans G fournit une borne uniforme sur le nombre d'arêtes dans les graphes qui sont dans $W(f)$ (en effet, tous ces graphes ont même type d'homotopie. De plus leur nombre de sommets est majoré par celui de G puisqu'un pli total n'augmente pas strictement le nombre de sommets, et on a donné à la proposition 5.2 une relation entre le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le type d'homotopie). De plus, le nombre de matrices de taille fixée associées à une valeur propre de Perron-Frobenius fixée est fini. \square

Le théorème résulte alors des deux lemmes suivants :

Lemme 7.24. : *Tout élément de $Out(\mathbb{F}_n)$ possède une réalisation ferroviaire irréductible stable.*

Lemme 7.25. : *Soit $f : G \rightarrow G$ une réalisation ferroviaire stable. Alors il y a au plus un chemin de Nielsen irréductible pour f .*

Démonstration du lemme : Il suffit de montrer que si $f : G \rightarrow G$ est un représentant ferroviaire irréductible de $\Phi \in Out(\mathbb{F}_n)$ qui n'est pas stable, et si l'on note $N(f)$ le nombre de chemins de Nielsen pour f (qui est un entier d'après la proposition 7.22), alors il existe un représentant ferroviaire irréductible f' de Φ vérifiant $N(f') < N(f)$. En effet, si Φ ne possédait pas de représentant ferroviaire irréductible stable, alors on construirait ainsi une suite infinie strictement décroissante d'entiers, ce qui est impossible.

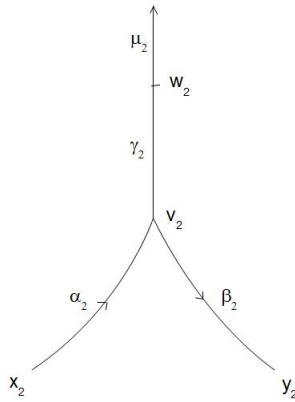
Soit donc $f : G \rightarrow G$ un représentant ferroviaire irréductible de $\Phi \in Out(\mathbb{F}_n)$ qui n'est pas stable. Quitte à effectuer quelques plis préliminaires (ce qui diminue $N(f)$), on peut supposer qu'il existe un chemin de Nielsen σ pour Φ pour lequel le pli est partiel. Soit alors α, β et τ

comme dans le lemme. Soit v le sommet commun à α et β .

Supposons que α ne soit pas contenu dans une unique arête de G . Comme f envoie α sur $\alpha.\tau$, et comme $f(VG) \subset VG$, l'image par f de la dernière arête traversée par α est contenue dans τ . Pour qu'elle soit subdivisée au cours du pli, il faut que la première arête dans β soit plus petite que α et que f l'envoie entièrement dans τ , mais alors elle n'est pas subdivisée au cours du pli : absurde. Donc α est entièrement contenu dans une unique arête de G , et il en est de même de β .

Le chemin $\alpha.\beta$ ne peut pas être un lacet, sinon il déterminerait un facteur libre de rang 1 dans $\pi_1(G, x)$ (où x est un point quelconque de G), invariant par f , ce qui contredit l'irréductibilité de f puisqu'on a supposé $n \geq 2$.

Quitte à subdiviser G (ce qui ne modifie pas $N(f)$), on peut supposer que α et β sont des arêtes de G . Soient $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ obtenu en pliant σ , et σ_1 le chemin de Nielsen déterminé par σ . Soit $f_2 : G_2 \rightarrow G_2$ obtenu en pliant σ_1 et σ_2 le chemin de Nielsen déterminé par σ_1 . Soient α_2 et β_2 comme dans le lemme avec $\sigma_2 = \alpha_2.\beta_2$. On est donc dans la situation suivante, où $f_2(\alpha_2) = \alpha_2.\gamma_2$, $f_2(\beta_2) = \overline{\gamma_2}.\beta_2$, $f_2(\gamma_2) = \mu_2$.



De plus, comme v_2 et w_2 ne sont pas images d'un sommet de G par $p_2 \circ p_1$ (où p_1 et p_2 sont les projections respectives $G \rightarrow G_1$ et $G_1 \rightarrow G_2$), $w_2 \notin f_2(VG_2 - \{v_2\})$ (c'est pour obtenir cette propriété que l'on a dû plier deux fois et non pas une), et $v_2 \notin f_2(VG_2)$.

La matrice M_2 associée à $f_2 : G_2 \rightarrow G_2$ est irréductible. Montrons qu'il en est de même de la matrice M'_2 obtenue à partir de M_2 en retirant les lignes et les colonnes indicées par α_2 ou β_2 . Soit Γ_2 le graphe associé à M_2 . Si un sommet de Γ_2 est relié par une arête orientée à un sommet correspondant à α_2 ou β_2 , alors il y a aussi une arête orientée qui le relie au sommet correspondant à γ_2 (puisque $v_2 \notin f_2(VG_2)$). De plus le sommet correspondant à γ_2 est l'unique sommet (autre que ceux correspondant à α_2 et β_2) qui est l'extrémité d'une arête de Γ_2 d'origine α_2 ou β_2 . Ceci entraîne la connexité du graphe associée à M'_2 , donc l'irréductibilité de M'_2 .

Soit $f_3 : G_2 \rightarrow G_2$ l'application définie à partir de f_2 qui envoie w_2 sur v_2 le long de $\overline{\gamma_2}$. Comme $w_2 \notin f_2(VG_2 - \{v_2\})$, f_3 coïncide avec f_2 sur les arêtes de G_2 différentes de α_2 , β_2 et γ_2 . De plus $f_3(\alpha_2) = \alpha_2$, $f_3(\beta_2) = \beta_2$ et $f_3(\gamma_2) = \gamma_2 \cdot \mu_2$. Donc l'irréductibilité de M'_2 entraîne celle de la sous-matrice M'_3 de M_3 (matrice associée à f_3) obtenue en supprimant les lignes et les colonnes correspondant à α_2 et β_2 .

Le sous-graphe $\alpha_2 \cup \beta_2$ de G_2 est invariant pour f_3 , qui est encore un représentant topologique irréductible de Φ . Donc $\alpha_2 \cup \beta_2$ est une forêt. Soit $f' : G' \rightarrow G'$ obtenu en écrasant cette forêt. La matrice de transition de f' est égale à M'_3 , donc est irréductible. On en déduit que $f' : G' \rightarrow G'$ est une réalisation ferroviaire irréductible.

Enfin, on a $N(f) \geq N(f_1) \geq N(f_2) > N(f')$. On a déjà vu les premières inégalités. Pour la dernière inégalité, on remarque qu'il y a une bijection entre les chemins de Nielsen pour f_3 et les chemins de Nielsen pour f_2 différents de $\alpha_2 \cdot \overline{\beta_2}$. \square

Démonstration du lemme : S'il n'y a pas de chemins de Nielsen pour f , il n'y a rien à faire. On peut donc supposer qu'il en existe au moins un, que l'on note σ . Soit L la fonction de longueur sur les chemins de G , on note $L(G)$ la somme des longueurs des arêtes de G . Soit $f_1 : G_1 \rightarrow G_1$ obtenu à partir de G en pliant σ , et L_1 la fonction de longueur induite sur G_1 . Soit x la longueur commune des intervalles qui ont été identifiés par le pli, alors $L_1(G_1) = L(G) - x$, et le chemin de Nielsen indivisible σ_1 induit par σ vérifie $L_1(\sigma_1) = L(\sigma) - 2x$.

Montrons que $L(\sigma) = 2L(G)$. Si ce n'était pas le cas, on aurait :

$$\begin{aligned} |(L_1(\sigma_1)/L_1(G_1)) - 2| &= |((L(\sigma) - 2x)/(L(G) - x)) - 2| \\ &= |(L(\sigma) - 2L(G))/(L(G) - x)| \\ &> |(L(\sigma) - 2L(G))/L(G)| \\ &= |(L(\sigma)/L(G)) - 2| \end{aligned}$$

En itérant ce procédé, on construit des éléments $f_i : G_i \rightarrow G_i$ dans $W(f)$, de sorte que le rapport $\frac{L_i(\sigma_i)}{L_i(G_i)}$ prend une infinité de valeurs deux à deux distinctes. Or le rapport $\frac{L'(\sigma')}{L'(G')}$ ne

dépend que de la classe d'équivalence projective de f' . Comme il y a un nombre fini de telles classes dans $W(f)$ (lemme 7.23) et comme il y a un nombre fini de chemins de Nielsen pour une classe projective donnée (lemme 7.22), ce rapport ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs : absurde. Donc $L(\sigma) = 2L(G)$.

Montrons que le tournant illégal de σ est le seul tournant illégal de G . Supposons qu'il existe un autre tournant illégal T dans G , et soit l le plus petit entier pour lequel $Tf^l(T)$ est dégénéré.

Supposons dans un premier temps que $l = 1$. Plions T pour obtenir une réalisation ferroviaire $\hat{f} : \hat{G} \rightarrow \hat{G}$, et soit $\hat{\sigma}$ le chemin de Nielsen indivisible dans \hat{G} déterminé par σ . Alors $\hat{L}(\hat{G}) < L(G)$ et $\hat{L}(\hat{\sigma}) = L(\sigma)$, donc $\hat{L}(\hat{\sigma}) > 2\hat{L}(\hat{G})$. Si l'on plie $\hat{\sigma}$, le chemin de Nielsen obtenu vérifie $\hat{L}_1(\hat{\sigma}_1) > 2\hat{L}_1(\hat{G}_1)$, en particulier il contient au moins trois arêtes. L'argument de la preuve précédente prouve alors que le pli de σ_1 n'est pas partiel. Si l'on itère de tels plis, on ne diminue jamais strictement $N(\hat{f})$, donc \hat{f} est stable. Mais d'après, cela contredit $\hat{L}(\hat{\sigma}) > 2\hat{L}(\hat{G})$.

Définissons par récurrence $f_k : G_k \rightarrow G_k$ et σ_k un chemin de Nielsen indivisible de G_k par $f_0 = f$, $\sigma_0 = \sigma$ et pour $k \geq 1$, f_k et σ_k sont obtenus en pliant σ_{k-1} . Pour $k \in \mathbb{N}$, $L_{k+1}(G_{k+1}) = L_k(G_k) - x_k$. Comme $W(f)$ contient un nombre fini de classes d'équivalence projectives,

$$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}, C < \frac{x_k}{L_k(G_k)}.$$

Or de plus, $\sum x_k$ converge (étant une série à termes positifs dont les sommes partielles sont bornées par $L(\sigma)$), donc (x_k) converge vers 0. Il en est donc de même de $(L_k(G_k))$, et donc de $(L_k(e_k))$ où e_k est une arête de G_k (puisque alors $L_k(e_k) \leq L_k(G_k)$).

Soit σ' un autre chemin de Nielsen indivisible pour f . Montrons que $\sigma = \sigma'$. Comme il n'y a qu'un tournant illégal dans G , σ et σ' ont le même tournant illégal. Quitte à réorienter σ' , en écrivant $\sigma = \alpha.\beta$ et $\sigma' = \alpha'.\beta'$, on peut supposer que $\bar{\alpha}$ et $\bar{\alpha}'$ ont même segment initial, et de même pour β et β' . On construit alors comme précédemment σ'_k dans G_k , et on écrit $\sigma_k = \alpha_k.\beta_k$ et $\sigma'_k = \alpha'_k.\beta'_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\alpha \neq \alpha'$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k \neq \alpha'_k$. En effet, si α et α' ont des origines distinctes, il en est de même de α_k et α'_k , et si $\alpha.\bar{\alpha}'$ est un lacet, il en est de même de $\alpha_k.\bar{\alpha}'_k$. Soit ν_k l'intervalle terminal commun maximal à α_k et α'_k , on écrit $\alpha_k = \mu_k.\nu_k$ et $\alpha'_k = \mu'_k.\nu_k$.

S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\{\bar{\mu}_k, \mu'_k\} \neq \{\bar{\alpha}_k, \beta_k\}$, alors le tournant $\{\bar{\mu}_k, \mu'_k\}$ n'est pas le tournant dégénéré de G_k , et $L_{k+1}(\mu_{k+1}) = L_k(\mu_k)$. De plus, $\{\bar{\mu}_{k+1}, \mu'_{k+1}\} \neq \{\bar{\alpha}_{k+1}, \beta_{k+1}\}$ et par récurrence $L_k(\mu_k)$ est stationnaire, ce qui contredit $L_k(\sigma_k) = 2L_k(G_k) \rightarrow 0$.

Sinon, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\{\bar{\mu}_k, \mu'_k\} = \{\bar{\alpha}_k, \beta_k\}$. Alors on construit ν_{k+1} à partir de ν_k en ajoutant et en supprimant deux intervalles de même longueur, donc la suite $(L_k(\nu_k))$ est stationnaire, et on obtient la même contradiction que précédemment.

Théorème 7.26. : Soit $n \in \mathbb{N}$, et $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$, dont la classe dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est irréductible. Alors $\text{Rang}(\text{Fix}(\Phi)) \leq 1$.

Démonstration : Supposons $Rang(Fix(\Phi)) \geq 2$, et soit alors $y \in Fix(f)$ (qui existe d'après la proposition 7.14). Soit f_{\sharp} l'automorphisme de $\pi_1(G, y)$ déterminé par f et par le chemin constant égal à y . D'après la proposition 7.14, $Rang(Fix(f_{\sharp})) \geq 2$

D'après le théorème 7.19, il existe $f : G \rightarrow G$ représentant ferroviaire irréductible de la classe de Φ dans $Out(\mathbb{F}_n)$ tel qu'il y ait au plus un chemin de Nielsen indivisible pour f . Soit $y \in Fix(f)$. Par définition de f_{\sharp} , si α est un lacet en y dans G , $f_{\sharp}([\alpha]) = [f(\alpha)]$, donc tout élément $\gamma \in Fix(f_{\sharp})$ est représenté par un chemin de Nielsen pour f . Mais comme il y a au plus un tel chemin qui est irréductible, noté σ , et comme de plus tout chemin de Nielsen pour f s'écrit comme la concaténation de chemins de Nielsen irréductibles (lemme 7.18), tout élément de $Fix(f_{\sharp})$ s'écrit sous la forme $[\sigma \dots \sigma]$. En particulier $Rang(Fix(f_{\sharp})) \leq 1$: absurde. Donc $Rang(Fix(\Phi)) \leq 1$. \square

8 Étude des sous-groupes finis de $Out(\mathbb{F}_n)$

On cherche dans cette section à majorer le cardinal des sous-groupes finis de $Out(\mathbb{F}_n)$ lorsque $n > 1$ (le groupe $Out(\mathbb{F}_1)$ est réduit à deux éléments).

Théorème 8.1. (*Wang-Zimmermann*) : *L'ordre maximal d'un sous-groupe fini de $Out(\mathbb{F}_n)$ est 12 si $n = 2$, et $2^n n!$ si $n > 2$. De plus, un sous-groupe fini d'ordre maximal est unique à conjugaison près si $n > 3$.*

Une démonstration de ce résultat repose sur un résultat de réalisation géométrique simultanée (voir [4], pp. 199-200) :

Théorème 8.2. (*de réalisation*) : *Soit G un sous-groupe fini de $Out(\mathbb{F}_n)$. Alors il existe un graphe connexe fini Γ de groupe fondamental isomorphe à \mathbb{F}_n et une action ρ par homéomorphismes de G sur Γ telle que si $x \in \Gamma$, si Ψ est le morphisme de groupes évident de $Out(\pi_1(\Gamma))$ dans $Out(\mathbb{F}_n)$, et si $\Phi : Homeo(\Gamma) \rightarrow Out(\pi_1(\Gamma, x))$ est le morphisme de groupes défini par :*

$$\begin{aligned} \Phi : Homeo(\Gamma) &\rightarrow Out(\pi_1(\Gamma, x)) \\ f &\mapsto ([\alpha] \mapsto [u.f(\alpha).\bar{u}]) \end{aligned}$$

où u est un chemin dans Γ d'origine x et d'extrémité $f(x)$, alors la composée $\Psi \circ \Phi \circ \rho$ vaut l'identité sur G .

On dira alors que l'action de G sur Γ réalise l'action de G sur \mathbb{F}_n .

Remarque : Ce théorème peut aussi se voir comme un théorème de point fixe sur l'outre-espace : tout sous-groupe fini de $Out(\mathbb{F}_n)$ admet un point fixe dans CV_n .

On peut supposer dans la proposition que Γ ne contient pas de sommets de valence 1. En fait,

notons Γ' le graphe obtenu en supprimant toutes les arêtes de Γ dont l'une des extrémités est un sommet de valence 1, et en itérant ce procédé jusqu'à obtenir un graphe dont tous les sommets sont de valence supérieure à 2. Le groupe $\pi_1(\Gamma')$ est isomorphe à \mathbb{F}_n . Le graphe Γ' est stable par l'action de G .

De même on peut supposer que Γ n'a pas de sommets de valence 2. Si c'est le cas on assimile deux arêtes ayant en commun un sommet de valence 2 en une même arête, en supprimant leur sommet commun. On itère ce procédé jusqu'à ce que le graphe ne contienne plus de sommets de valence 2. De nouveau, l'action de G sur ce graphe réalise l'action de G sur \mathbb{F}_n . On admet le lemme suivant, dont la démonstration proposée dans [16], p. 84, fait appel à des résultats d'homologie, notamment au théorème du point fixe de Lefschetz :

Lemme 8.3. : Soit Γ un graphe connexe de rang $n > 1$ sans sommets de valence 1 et G un groupe fini agissant sur Γ . Alors l'action est fidèle si et seulement si l'action induite sur $\pi_1(\Gamma)$ s'injecte dans $Out(\pi_1(\Gamma))$.

Définition 8.4. : Soit G un graphe. On appelle *automorphisme du graphe* G toute bijection de G dans G qui induit une permutation des sommets de G et telle que chaque arête de G soit envoyée sur une arête de G . On vérifie aisément que l'ensemble des automorphismes du graphe G est un groupe, que l'on appelle *groupe de symétrie* de G , et que l'on note $Sym(G)$.

Si G est un sous-groupe fini de $Out(\mathbb{F}_n)$, on a vu qu'on peut le réaliser comme un groupe d'homéomorphismes d'un graphe connexe Γ dont les sommets sont de valence supérieure à 3. Or, d'après le lemme 8.3, ce groupe d'homéomorphismes s'injecte dans $Sym(\Gamma)$. Donc tout sous-groupe fini de $Out(\mathbb{F}_n)$ est isomorphe à un sous-groupe du groupe de symétrie d'un graphe connexe Γ dont les sommets sont de valence supérieure à 3.

Rappel : Soit Γ un graphe connexe de rang $n > 1$ sans sommets de valence 1. Alors on a vu lors de la description de l'outre-espace dans le cas $n = 2$ que, si on note v_i le nombre de sommets de valence i , e le nombre d'arêtes et v le nombre de sommets, alors $2(n - 1) = 2(e - v) = v_3 + \dots + (k - 2)v_k$. En particulier le nombre de sommets de valence supérieure à 3 est au plus de $2(n - 1)$.




Dans la suite, on appellera *arête multiple d'ordre* n le graphe constitué de deux sommets et de n arêtes les reliant (qui est de rang $n - 1$), et *bouquet d'ordre* n le graphe R_n . Remarquons que leurs groupes de symétrie respectifs sont S_n , d'ordre $n!$, et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \times S_n$, d'ordre $2^n n!$.

Lemme 8.5. : Pour $n = 2$ (resp. $n = 3$), l'ordre maximal d'un sous-groupe fini de $Out(\mathbb{F}_n)$ est 12 (resp. 48). De plus, tout sous-groupe fini de $Out(\mathbb{F}_2)$ (resp. $Out(\mathbb{F}_3)$) réalisant ce maximum

est conjugué au groupe de symétrie de l'arête multiple d'ordre 3 (resp. de l'arête multiple d'ordre 4 ou le bouquet d'ordre 3).

Démonstration : Il suffit de majorer le cardinal de $Sym\Gamma$ pour Γ un graphe fini connexe de rang 2 ou 3.

Cas $n = 2$: Un tel graphe doit satisfaire l'équation $v_3 + 2v_4 = 2$. Nous avons déjà vu lors de la description de l'outre-espace dans le cas $n = 2$ qu'il y avait trois tels graphes à homéomorphisme ici, dont on calcule ici les groupes de symétrie :

Graphe	Groupe de symétrie	Cardinal du groupe de symétrie
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$	8
	$S_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	12
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$	8

Cas $n = 3$: Un tel graphe doit satisfaire l'équation $v_3 + 2v_4 + 3v_5 + 4v_6 = 4$, ce qui laisse à homéomorphisme près un nombre fini de possibilités 15 possibilités. On calcule le cardinal des groupes de symétrie de ces graphes :

Graphe	Groupe de symétrie	Cardinal du groupe de symétrie
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times S_3$	48
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$	16
	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_3$	12
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$	16
	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_3$	12
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$	8
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$	8
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$	8
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$	16
	S_4	24
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times S_3$	48
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$	16
	S_4	24
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$	8
	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$	8

□

Lemme 8.6. : Soit Γ un graphe connexe ne contenant pas de bouquets plongés non triviaux, ni de sommets de valence 1. Alors Γ contient un sommet non-séparant.

Démonstration : Soit T un arbre maximal de Γ et v un sommet de valence 1 de T . Montrons que $\Gamma - \{v\}$ est connexe. Comme un arbre maximal contient tous les sommets, et comme Γ ne contient pas d'arête d'origine et d'extrémité v , toute arête a a au moins l'une de ses extrémités dans T . On peut donc joindre tout point de Γ à T sans passer par v . □

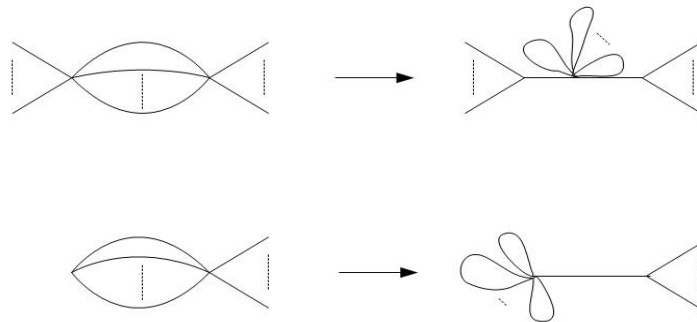
Démonstration du théorème 8.1 : On va prouver le théorème par récurrence sur $n \geq 2$. L'initialisation a été faite dans le lemme 8.4. On montre d'abord par récurrence que si Γ est un graphe connexe fini de rang $n > 2$ avec des sommets de valence supérieure à 3, dont aucun sous-graphe n'est un bouquet ou une arête multiple, le cardinal de son groupe de symétrie est majoré par $2^n n!$.

Par le lemme 8.5, il existe dans Γ un sommet V non-séparant de valence $k > 2$. Soit Γ_V le graphe

obtenu en retirant V et les points des arêtes qui en sont issues qui ne sont pas des sommets. C'est un graphe connexe (V est non-séparant), de rang $n + 1 - k$ par le rappel. Le graphe Γ_V n'a pas de sommets de valence 1 mais peut avoir des sommets de valence 2. Soit $G_V \subset \text{Sym}\Gamma$ le stabilisateur de V . D'après le rappel, l'indice de G_V est au plus de $2(n - 1)$. En effet, l'orbite $O(V)$ de V sous l'action de $\text{Sym}\Gamma$ est contenue dans l'ensemble des sommets de Γ , donc est de cardinal inférieur à $2(n-1)$, et $|G_V| = \frac{|\text{Sym}\Gamma|}{|O(V)|}$. De plus, l'action de G_V sur Γ induit une action de G_V sur Γ_V (puisque le seul sommet envoyé sur V par un élément de G_V est V), qui est fidèle puisqu'un automorphisme de graphe qui fixe tous les sommets vaut l'identité). Par le lemme 8.3 G_V s'injecte dans $\text{Out}(\pi_1(\Gamma))$. Si le rang de Γ_V est supérieur ou égal à 2, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. On a alors $|G_V| \leq 12$ si $k = n - 1$ et $|G_V| \leq 2^{n-k+1}(n-k+1)!$ si $k < n - 1$. Le cas $k = n + 1$ est impossible : le graphe Γ_V ne peut être un arbre car Γ ne contient aucun sommet de valence 1 ou 2. Si $k = n$, comme Γ_V ne contient pas de sommets de valence 1, Γ_V est homéomorphe à un polygone à k côtés (car d'après le rappel, tous les sommets de Γ_V doivent être de valence 2). Alors $|G_V| \leq 2k$. Dans tous les cas on vérifie que $|G| \leq 2(n - 1)|G_V| \leq 2^n n!$.

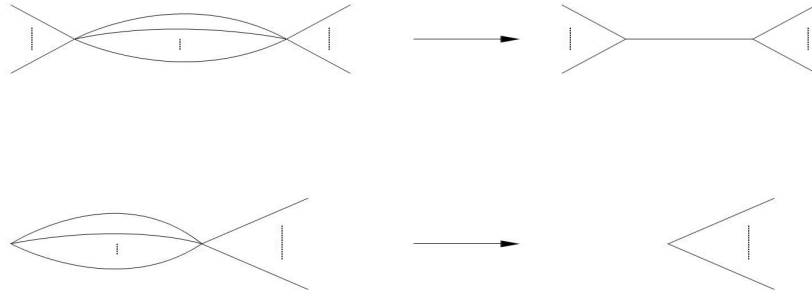
On a donc prouvé le théorème dans le cas $n = 2$ et $n = 3$ et montré que si Γ est un graphe connexe fini de rang $n > 2$ avec des sommets de valence supérieure à 3, sans bouquets non triviaux ni arêtes multiples, le cardinal de son groupe de symétrie est majoré par $2^n n!$.

Passons maintenant au cas général. On se donne donc un graphe fini connexe de rang n de sommets de valence supérieure à 3. Notons H le sous-groupe de $G = \text{Sym}\Gamma$ qui fixe tous les sommets de Γ . Alors H est isomorphe au produit direct des groupes de symétrie des bouquets et de sous-groupe d'indice 2 des groupes de symétrie des arêtes multiples. Remplaçons chaque arête multiple de Γ par un bouquet comme ci-dessus, sans changer le rang :



Soient Γ_1 ce nouveau graphe, G_1 son groupe de symétrie et H_1 le fixateur dans G_1 des

sommets de Γ_1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n n! \geq (n+1)!$, donc $|H_1| \geq |H|$. D'autre part les quotients G/H et G_1/H_1 sont tous les deux isomorphes au groupe de symétrie du graphe obtenu à partir de Γ en remplaçant chaque bouquet par un point et chaque arête multiple d'ordre m par un point, si l'un des sommets de l'arête multiple est de valence $m+1$, ou par une arête sinon, comme sur le schéma ci-dessous :



Par conséquent, $|G_1| \geq |G|$. Aussi peut-on poursuivre avec G_1 .

On élimine alors toutes les arêtes du type suivant



Le groupe G_1 agit encore fidèlement sur Γ_2 . Soit G_2 le groupe de symétrie de Γ_2 , H_2 le fixateur dans G_2 des sommets de Γ_2 , et $K_2 := G_2/H_2$. Alors $|G_2| \geq |G_1|$. Soit Γ' le graphe obtenu à partir de Γ en supprimant tous les bouquets de Γ_2 . Supposons que les ordres des bouquets soient m_1, \dots, m_k . Alors $r = \text{rang}(\Gamma') = n - \sum_{i=1}^k m_i < n$ et $|H_2| = \prod_{i=1}^k 2^{m_i} (m_i)! \leq 2^{n-r} (n-r)!$. De plus $|G_2/H_2| = |K_2| \leq 2k \leq 2(n-r)$ si $r = 1$; $|K_2| \leq 12$ si $r = 2$; $|K_2| \leq 2^r r!$ sinon d'après le premier cas (car Γ' est un graphe sans bouquets ni arêtes multiples). Dans tous les cas,

$|G_2| \leq 2^n n!$. Enfin cette inégalité est une inégalité si et seulement si $k = 1$ et $r = 0$, autrement dit G_2 est le groupe de symétrie de la rose à n pétales . Si $|G| = |G_2|$ on a également que G est ce groupe de symétrie. \square

9 Références

- [1] M. Bestvina, M. Handel, *Train tracks and automorphisms of free groups*, Annals of Mathematics **135** (1992) 1-51.
- [2] G. Baumslag, T. Taylor, *The center of a group with one defining relator*, Mathematische Annalen **175** (1968) 315-319.
- [3] D. Cooper, *Automorphisms of free groups have finitely generated fixed point sets*, Journal of Algebra **111** (1987) 453-456.
- [4] M. Culler, *Finite groups of outer automorphisms of a free group*, Contemporary Mathematics **33** (1990) 197-207.
- [5] M. Culler, K. Vogtmann, *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Inventiones mathematicae **84** (1986) 91-119.
- [6] V. Guirardel, G. Levitt, *The outer space of a free product*, Proceedings of the London Mathematical Society **94** (2007) 695-714.
- [7] V. Guirardel, G. Levitt, *Deformation spaces of trees*, Groups, Geometry and Dynamics **1** (2007) 135-181.
- [8] R.C. Lyndon, P.E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [9] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory : Presentation of groups in terms of generators and relations*, Pure and applied mathematics, Volume XIII, Interscience, New York (1966)
- [10] F. Paulin, *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Inventiones Mathematicae **94** (1988) 53-80.
- [11] F. Paulin, *Topologie algébrique élémentaire*, Notes de cours, <http://www.fimfa.ens.fr>
- [12] F. Paulin, *The Gromov topology on \mathbb{R} -trees*, Topology and its Applications **32** (1989) 197-221.
- [13] A. Selberg, *On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces*, in "Contributions to function theory", Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1960) 147-164.
- [14] K. Vogtmann, *What is... Outer space ?*, Notices of the American Mathematical Society **55** (2008) 784-786.
- [15] K. Vogtmann, *Automorphisms of free groups and outer space*, Geometriae Dedicata **94** (2002) 1-31.
- [16] S. Wang, B. Zimmermann, *The maximum order of finite groups of outer automorphisms of free groups*, Mathematische Zeitschrift **216** (1994) 83-87.