Ondelettes, construction et applications

Sary Drappeau
Arthur Leclaire
encadrés par Vincent Rivoirard

Résumé

L'objectif de cet exposé est de présenter un outil récent de l'analyse mathématique : la transformation en ondelettes. On donnera d'abord l'idée générale de la construction et les résultats fondamentaux de la théorie. On présentera ensuite quelques procédés pratiques de construction d'ondelettes et par là même plusieurs exemples de bases d'ondelettes. On terminera en expliquant brièvement comment en pratique on peut traiter un signal à l'aide d'une base d'ondelettes.

L'analyse de Fourier traditionnelle part du principe suivant : un signal peut être vu comme superposition de signaux sinusoïdaux de différentes fréquences appelés harmoniques. Cette assertion mathématiquement floue se concrétise à travers les formules suivantes : étant donné un signal 2π-périodique mesurable f tel que $\int_0^{2\pi} |f(x)|dx < \infty$, on peut calculer ses coefficients de Fourier

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \tag{1}$$

Dans plusieurs cadres, on peut alors montrer la validité de la formule d'inversion de Fourier

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}. \tag{2}$$

Par exemple, on peut considérer l'espace $L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodiques mesurables telles que $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Ce dernier est naturellement muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$$

qui en fait un espace hilbertien. On peut alors profiter de toutes les propriétés géométriques des espaces de Hilbert pour interpréter les formules (1) et (2). Le membre de droite de (2) prend un sens comme série dans cet espace de Banach.

Plus précisément, la formule d'inversion de Fourier, dans ce cadre, se résume en disant que les fonctions

$$x \mapsto e^{ikx} \, (k \in \mathbb{Z})$$

forment une base hilbertienne de $L^2_{2\pi-\text{per}}$. Ainsi, on dispose d'une technique d'analyse des signaux à travers leurs harmoniques : c'est pourquoi on parle d'analyse fréquentielle des signaux. Celle-ci débouche entre autres sur la résolution de certaines équations, comme l'équation de la chaleur qui constitue l'origine des travaux de Fourier, ou plus récemment sur la compression de données en résumant un signal à l'aide de la suite des coefficients de Fourier.

Toutefois, cette technique a plusieurs inconvénients. D'abord, mathématiquement, les idées précédentes n'ont de consistance que pour des fonctions périodiques ; néanmoins en pratique on observe des signaux sur un intervalle de temps fini et on peut donc les étendre par périodicité. De plus, les coefficients de Fourier ne sont pas adaptés au traitement de signaux subissant des perturbations locales : par exemple une petite bosse sur un signal va modifier tous les coefficients de Fourier. Enfin, la vitesse de convergence de la série de Fourier n'est pas suffisante pour des applications comme la compression de données.

La théorie des ondelettes vise à construire des bases hilbertiennes de $L^2(\mathbb{R})$ se comportant mieux que la base de Fourier vis-à-vis des problèmes exposés précédemment.

1 Rappels

On rappelle ici quelques résultats qui nous seront utiles dans toute la suite.

1.1 Espaces de Hilbert

Pour les preuves des résultats de cette partie, on renvoie à [1]. En vue de manipuler des fonctions à valeurs complexes, on se place d'ores et déjà dans le cadre d'un espace de Hilbert complexe que l'on notera H.

Proposition 1.1. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H.*
Alors on dispose d'un opérateur de projection orthogonale $p_F : H \to F$ caractérisé par la propriété suivante : pour tout $x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que

$$\forall z \in F, \quad \langle x - y, z \rangle = 0.$$

L'application p_F est un opérateur linéaire continu de H dans F. De plus, le sous-espace $\operatorname{Ker} p_F$ de H coïncide avec le sous-espace $F^\perp$. On en déduit alors $H = F \bigoplus F^\perp$. Ainsi, dans un espace de Hilbert, tout sous-espace vectoriel fermé admet un supplémentaire orthogonal qui est fermé.

En particulier, lorsque F est une droite de vecteur directeur u, la projection orthogonale sur F est donnée par

$$\forall x \in H, \quad p_F(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{||u||^2} \, u.$$

Définition 1.1. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels fermés de H. On dit que H est une **somme hilbertienne** des E_n si les E_n sont deux à deux orthogonaux et si le sous-espace vectoriel de H qu'ils engendrent est dense dans H. On note alors

$$H = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} E_n.$$

Dans le cas où pour tout n, E_n est une droite de vecteur directeur e_n, H est une somme hilbertienne des E_n si et seulement si les vecteurs e_n sont deux à deux orthogonaux et si le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent est dense dans H. Si de plus, les vecteurs e_n sont de norme 1, on dit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **base hilbertienne** de H.

Théorème 1.2. *On suppose que H est une somme hilbertienne des sous-espaces fermés $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On fixe un vecteur $u \in H$ et pour tout n on note $u_n = p_{E_n}(u)$. Alors on a :*

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

$$||u||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||^2,$$

la première série étant convergente en tant que série dans l'espace vectoriel normé H.
Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in E_n$, et si $\sum |u_n|^2 < \infty$, alors la série $\sum u_n$ est convergente et si l'on note

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

alors pour tout n, $u_n = p_{E_n}(u)$.

En particulier, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H et si E_n est la droite de vecteur directeur e_n, on a $u_n = \langle u, e_n\rangle\, e_n$ d'où $||u_n|| = |\langle u, e_n\rangle|$ et par conséquent les égalités précédentes se réécrivent sous la forme

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, e_n\rangle\, e_n,$$

$$||u||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u, e_n\rangle|^2.$$

Réciproquement, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes qui vérifie $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$, alors la série $\sum \alpha_n e_n$ est convergente et si l'on note

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \langle u, e_n \rangle,$$

$$||u||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2.$$

1.2 Transformée de Fourier

Pour cette partie, nous renvoyons à [6].

Définition 1.2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable, on dispose de sa transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

qui est une fonction continue tendant vers zéro à l'infini.
Dès que $\hat{f}$ est aussi intégrable, on définit la transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi$$

dont l'appellation est justifiée par le résultat suivant :

Proposition 1.3. *Lorsque $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a*

$$f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f].$$

La condition $\hat{f} \in L^1$ n'est pas automatique. C'est pourquoi on est amenés à chercher un cadre dans lequel la transformée de Fourier se comporte mieux. Comme pour les séries de Fourier, c'est dans l'espace L^2 que les bons énoncés apparaîssent, modulo une définition de la transformée de Fourier moins agréable que dans le cas L^1.

Théorème 1.4. *La transformation de Fourier, déjà définie sur le sous-espace $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, peut être prolongée en un opérateur linéraire $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ qui respecte la structure hilbertienne au sens où, pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a*

$$||f||_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi,$$

(formules de Plancherel). En particulier $\mathcal{F}$ est un opérateur linéraire continu. De la même manière on peut étendre à $L^2(\mathbb{R})$ la transformation de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}$. On montre alors que $\mathcal{F}$ est un automorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ de réciproque $\mathcal{F}^{-1}$.

On en profite aussi pour rappeler le comportement de la transformée de Fourier vis-à-vis des opérations usuelles :

Proposition 1.5. *Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors*

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}[f(x-k)](\xi) = e^{-ik\xi}\hat{f}(\xi),$$

$$\forall a > 0, \quad \mathcal{F}[f(ax)](\xi) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right),$$

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

En particulier, si l'on note $\tilde{f}(x) = \bar{f}(-x)$, en prenant $g = \tilde{f}$ dans la dernière formule, on obtient

$$\mathcal{F}(f * \tilde{f}) = |\hat{f}|^2.$$

1.3 Formule sommatoire de Poisson

On donne ici avec sa preuve la formule sommatoire de Poisson. On énonce ensuite un de ses corollaires, qui sera très utile dans la suite. Ce dernier se base sur un lemme assez surprenant sur les coefficients de Fourier d'une fonction intégrable, que l'on préfére établir dès maintenant. On utilise la notation $L^1_{2\pi-\mathrm{per}}$ pour désigner l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodiques telles que $\int_0^{2\pi} |f(x)|dx < \infty$.

Lemme 1.6. *Pour toute fonction $f \in L^1_{2\pi-\mathrm{per}}$ et tout entier k, on note $c_k(f)$ le coefficient de Fourier de f défini par la formule* (1).
Alors l'application linéaire $\Phi : L^1_{2\pi-\mathrm{per}} \to l^\infty(\mathbb{Z})$ qui à une fonction associe la suite de ses coefficients de Fourier est injective.

Démonstration. Il s'agit de montrer que si tous les coefficients de Fourier d'une fonction de $L^1_{2\pi-\mathrm{per}}$ sont nuls, alors cette fonction est nulle. Soit donc $f \in L^1_{2\pi-\mathrm{per}}$ dont tous les coefficients de Fourier sont nuls. Par linéarité, on en déduit que pour tout polynôme trigonométrique $P : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, on a

$$\int_0^{2\pi} f(x)P(x)dx = 0.$$

Maintenant, si g appartient à $L^1_{2\pi-\mathrm{per}}$ et est continue, on sait qu'on peut approcher uniformément sur $[0, 2\pi]$ la fonction g par une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques. Il s'en suit que

$$\int_0^{2\pi} f(x)P_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = 0.$$

Enfin, on peut construire une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $L^1_{2\pi-\mathrm{per}}$, continues, bornées uniformément en module par 1, et qui converge presque partout vers la fonction $sgn(f)$ (pour cela, on peut par exemple, approcher $sgn(f)$ dans

$L^1([0,2\pi])$, puis extraire une sous-suite qui converge presque partout, et enfin tronquer les valeurs de module ≥ 1, ce qui peut se faire sans perdre la continuité). Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\int_0^{2\pi} f(x)g_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{2\pi} f(x)sgn(f(x))dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|dx,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|dx = 0,$$

ce qui permet de conclure que $f = 0$ dans $L^1_{2\pi-\mathrm{per}}$. □

Ce lemme est assez surprenant : en effet, on a déjà dit que la formule d'inversion de Fourier n'est pas vraie en général si la fonction de départ appartient seulement à $L^1_{2\pi-\mathrm{per}}$. Pourtant, on vient de voir qu'une telle fonction est tout de même caractérisée par la suite de ses coefficients de Fourier !

Passons maintenant au résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 1.7 (Formule Sommatoire de Poisson)**.** *Fixons $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors la série*

$$S(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(x+2l\pi)$$

converge absolument pour presque tout x et définit une fonction $S \in L^1_{2\pi-\mathrm{per}}$ dont les coefficients de Fourier sont donnés par

$$c_k(S) = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(k) = \mathcal{F}^{-1}f(-k).$$

Démonstration. On a

$$\int_0^{2\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |f(x+2l\pi)|\, dx = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |f(x+2l\pi)|\, dx$$

$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} |f(y)|\, dy = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, dy$$

et cette quantité est finie puisque f est intégrable. En particulier,

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |f(x+2l\pi)| < \infty \quad \text{p.p. x},$$

c'est-à-dire que la série $S(x)$ converge absolument pour presque tout x, et de plus

$$\int_0^{2\pi} |S(x)|\, dx \leq \int_0^{2\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |f(x+2l\pi)|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty.$$

La fonction ainsi construite est bien sûr 2π-périodique et on en déduit que $S \in L^1_{2\pi-\mathrm{per}}$. Reste à calculer ses coefficients de Fourier. Puisque

$$\int_0^{2\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |f(x+2l\pi)|\, dx < \infty,$$

on peut utiliser le théorème de Fubini pour intervertir les symboles $\sum$ et $\int$ dans le calcul suivant :

$$c_k(S) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(x+2l\pi)e^{-ikx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} f(x+2l\pi)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{2l\pi}^{2(l+1)\pi} f(y)e^{-iky}dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iky}dy = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(k).$$

□

Corollaire 1.8. *En conservant les notations du théorème précédent, on voit que*

1. $S = 0$ *presque partout si et seulement si pour tout entier* k, $\mathcal{F}^{-1}f(k) = 0$.
2. $S = 1$ *presque partout si et seulement si* $\mathcal{F}^{-1}f(0) = 1$ *et pour tout entier* k *non nul,* $\mathcal{F}^{-1}f(k) = 0$.

Démonstration. Cela découle du fait qu'une fonction de $L^1_{2\pi-\mathrm{per}}$ est caractérisée par la suite de ses coefficients de Fourier (cf. lemme 1.6). □

2 Ondelettes : définitions et résultats généraux

Avant de donner le principe général de construction, nous donnons un exemple concret de base d'ondelettes.

2.1 Un exemple de base d'ondelettes : la base de Haar

Considérons la fonction [1]

$$\varphi(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

On introduit ensuite ses translatées

$$\varphi_{0,k} : x \mapsto \varphi(x-k) = \mathbb{1}_{[k,k+1]}(x) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

[1] Le fait que l'intervalle dans cette définition soit ouvert ou fermé n'a pas d'importance puisqu'on identifie les fonctions égales presque partout.

qui forment une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, et le sous-espace fermé V_0 de $L^2(\mathbb{R})$ qu'elles engendrent :

$$V_0 = \overline{\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}} \mathbb{C}\,\varphi_{0,k}.$$

Par construction, toute fonction $f \in V_0$ s'écrit sous la forme d'une série convergeant dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi_{0,k} \quad \text{où} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty.$$

Dans cet exemple, on peut montrer aisément que V_0 est exactement composé des fonctions f constantes sur chaque intervalle $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$ au sens où la restriction de f à chaque intervalle $[k, k+1]$ coïncide presque partout avec une fonction constante.

Ensuite, introduisons aussi les translatées-dilatées

$$\varphi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) = 2^{j/2}\mathbb{1}_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]}(x) \quad (j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}).$$

Là encore, pour tout entier j, les fonctions $(\varphi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. On note V_j le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ qu'elles engendrent :

$$V_j = \overline{\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}} \mathbb{C}\,\varphi_{j,k},$$

qui, dans cet exemple, est constitué des fonctions f constantes sur chaque intervalle $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$.

Ainsi, on dispose d'une suite croissante $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$, chacun muni d'une base hilbertienne explicite. Avec la caractérisation des V_j comme ensemble de fonctions constantes sur certains intervalles de longueur 2^{-j}, on voit que l'on va pouvoir approcher des fonctions quelconques à partir de ces sous-espaces. Plus précisément :

Proposition 2.1. *Le sous-espace vectoriel $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Puisque les fonctions en escalier à support compact sont denses dans $L^2(\mathbb{R})$, il suffit de voir que l'on peut approcher l'indicatrice $\mathbb{1}_{[a,b]}$ d'un intervalle fermé borné par des combinaisons linéaires des $(\varphi_{j,k})_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ c'est-à-dire par des indicatrices d'intervalles dyadiques. Mais ceci est simple puisque

$$\mathbb{1}_{[a_n,b_n]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}_{[a,b]} \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}),$$

où a_n (resp. b_n) désigne le développement dyadique d'ordre n de a (resp. b). □

Ainsi, le sous-espace vectoriel engendré par les $(\varphi_{j,k})_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Toutefois, ces fonctions ne forment pas une famille orthonormée et on ne peut donc pas décomposer de façon explicite une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ en une série

$$f = \sum_{j,k} \lambda_{j,k} \varphi_{j,k}$$

avec des coefficients facilement calculables, comme on le faisait avec les séries de Fourier. On est donc amenés à orthonormaliser les $(\varphi_{j,k})$.

Pour cela, remarquons qu'on peut considérer V_0 comme un sous-espace fermé de V_1. On peut donc écrire

$$V_1 = V_0 \oplus W_0,$$

où W_0 désigne le supplémentaire orthogonal de V_0 dans V_1. En répétant le procédé, on peut écrire pour tout entier $N \geq 1$,

$$V_N = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{N-1} W_j \right),$$

où W_j désigne le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1}. Puisque le sous-espace $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} V_N$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel engendré par V_0 et les $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aussi, et on en déduit la décomposition en somme hilbertienne

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \overline{\oplus} \left(\overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{N}}} W_j \right).$$

Finalement, la question de l'orthonormalisation revient donc à chercher une base hilbertienne de chaque W_j.

Concentrons-nous pour le moment sur le cas $j = 0$. Il nous conduit à introduire la fonction

$$\psi = -\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]},$$

qui est de norme L^2 égale à 1, et qui est orthogonale à φ. On introduit ensuite ses translatées

$$\psi_{0,k} : x \mapsto \psi(x-k) = -\mathbb{1}_{[k,k+\frac{1}{2}]}(x) + \mathbb{1}_{[k+\frac{1}{2},k+1]}(x),$$

La proposition suivante rend légitime l'utilisation de cette fonction ψ :

Proposition 2.2. *Les fonctions $(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de W_0.*

Démonstration. Tout d'abord, les fonctions $(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une famille orthonormale car elles sont toutes de norme 1, et elles sont orthogonales entre elles puisque leurs supports ont deux à deux au plus un point commun. Ensuite, elles appartiennent bien à W_0, c'est-à-dire qu'elles sont orthogonales aux $(\varphi_{0,l})_{l\in\mathbb{Z}}$. En effet, on a vu que $\psi = \psi_{0,0}$ était orthogonale à $\varphi = \varphi_{0,0}$; de plus, elle est aussi orthogonale aux $(\varphi_{0,l})_{l\neq 0}$ car le support de ψ n'intersecte le support de ces dernières qu'au plus en un point ; il en résulte que toutes les translatées de ψ sont orthogonales à toutes les translatées de φ. Reste à montrer que le sous-espace vectoriel engendré par $(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans W_0. Pour cela, il suffit de montrer que les fonctions $(\varphi_{0,l})_{l\in\mathbb{Z}}$, $(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de V_1 : toute fonction $f \in V_1$ se décomposera alors en

$$f = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \lambda_l \varphi_{0,l} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k \psi_{0,k}$$

et, si de plus f appartient à W_0, on a pour tout entier l, $\lambda_l = \langle f, \varphi_{0,l}\rangle = 0$, et donc

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k \psi_{0,k}.$$

Soit donc $f \in V_1$. Par définition, f se décompose en

$$f = \sum_{q\in\mathbb{Z}} c_q \varphi_{1,q} \quad \text{où} \quad \sum_{q\in\mathbb{Z}} |c_q|^2 < \infty.$$

On observe alors en utilisant les définitions des $\varphi_{j,k}$ et des $\psi_{0,k}$ que

$$\varphi_{1,2p} = \sqrt{2}\mathbb{1}_{[p,p+\frac{1}{2}]} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\varphi_{0,p} - \psi_{0,p}\right),$$

$$\varphi_{1,2p+1} = \sqrt{2}\mathbb{1}_{[p+\frac{1}{2},p+1]} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\varphi_{0,p} + \psi_{0,p}\right).$$

On a donc par le calcul

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{q\in\mathbb{Z}} c_q\varphi_{1,q} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_{2p}\varphi_{1,2p} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_{2p+1}\varphi_{1,2p+1} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}}{2} c_{2p}\varphi_{0,p} - \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}}{2} c_{2p}\psi_{0,p} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}}{2} c_{2p+1}\varphi_{0,p} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}}{2} c_{2p+1}\psi_{0,p} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}}{2}(c_{2p} + c_{2p+1})\varphi_{0,p} + \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}}{2}(-c_{2p} + c_{2p+1})\psi_{0,p}.
\end{aligned}$$

(où tous les découpages de sommes sont justifiés par le fait que $\sum |c_q|^2 < \infty$.)
$\square$

Plus généralement, on introduit les translatées-dilatées de la fonction ψ :

$$\psi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \quad (j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}),$$

qui dans l'exemple de la base de Haar s'écrivent

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2}\left(-\mathbb{1}_{[\frac{k}{2^j},\frac{k}{2^j}+\frac{1}{2^{j+1}}]} + \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^j}+\frac{1}{2^{j+1}},\frac{k+1}{2^j}]}\right).$$

On peut voir exactement de la même manière que pour tout entier j, les fonctions $(\psi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de W_j. Néanmoins, nous verrons dans le paragraphe suivant que cela se déduit du cas $j = 0$. Finalement, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Les fonctions de Haar* $(\varphi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, $(\psi_{j,k})_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ *forment une base hilbertienne de* $L^2(\mathbb{R})$ *: toute fonction* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *peut être représentée sous la forme*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{0,k}\varphi_{0,k} + \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{j,k}\psi_{j,k},$$

où la convergence des séries à lieu dans $L^2(\mathbb{R})$.

Toutefois, la base de Haar a un inconvénient majeur : son irrégularité, qui devient gênante pour certaines applications, notamment en traitement d'images lorsque l'on veut effectuer des opérations de lissage. La théorie des ondelettes vise à généraliser le procédé mis en oeuvre dans la construction précédente, pour obtenir des bases hilbertiennes de $L^2(\mathbb{R})$ répondant à certaines exigences issues des diverses utilisations pratiques.

2.2 La construction dans le cas général

Au départ, on choisit une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, telle que les translatées

$$\varphi_{0,k} : x \mapsto \varphi(x-k) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

forment un système orthonormé de $L^2(\mathbb{R})$. On note V_0 le sous-espace fermé qu'elles engendrent

$$V_0 = \overline{\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}} \mathbb{C}\,\varphi_{0,k} = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi_{0,k},\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty \right\}.$$

Pour nous aider à comprendre la situation qui va suivre, introduisons pour tout entier j l'opérateur de dilatation $\Delta_j : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ qui à une fonction f associe la fonction $x \mapsto 2^{j/2}f(2^jx)$. On voit que Δ_j est une bijection linéaire isométrique (changement de variable) de réciproque Δ_{-j}. Plus précisément, c'est un automorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ et en particulier Δ_j conserve le produit scalaire.

Dans ces conditions, pour tout entier j, on note V_j l'image de V_0 par l'application Δ_j, qui est donc un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$, et on introduit les translatées-dilatées $\varphi_{j,k} = \Delta_j(\varphi_{0,k})$ de la fonction φ :

$$\varphi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2}\varphi(2^jx - k).$$

Par construction Δ_j réalise un isomorphisme canonique de V_0 sur V_j. Puisque $(\varphi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de V_0, on en déduit que les fonctions $(\varphi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de V_j. Ainsi :

$$V_j = \Delta_j(V_0) = \{h \in L^2(\mathbb{R}) \,|\, \exists f \in V_0, h(x) = f(2^jx) \text{ p.p.x}\} = \overline{\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}} \mathbb{C}\,\varphi_{j,k}.$$

Pour reprendre la même construction que dans le paragraphe précédent, il faudra que la fonction φ soit choisie de telle sorte que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_j \subset V_{j+1},$$

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} V_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Une telle fonction φ est appelée une **ondelette père** et la suite des sous-espaces fermés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est alors appelée un filtre multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Remarquons au passage qu'à l'aide des applications Δ_j, on voit que la première condition est vérifiée si et seulement si $V_0 \subset V_1$.

Pour tout entier j, on définit ensuite W_j comme étant le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1}. On a alors pour tout $N \geq 1$,

$$V_N = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{N-1} W_j \right).$$

Puisque $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, on obtient que le sous-espace vectoriel engendré par V_0 et les W_j $(j \geq 0)$ l'est aussi. On a donc une décomposition en somme hilbertienne :

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \mathbin{\overline{\oplus}} \left(\overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{N}}} W_j \right).$$

Si pour tout entier j, $(\psi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ désigne une base hilbertienne de W_j, on obtient alors que les fonctions $(\varphi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, $(\psi_{j,k})_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$: toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ se décompose en

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_{0,k} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}, \tag{3}$$

où la convergence des séries a lieu dans $L^2(\mathbb{R})$. L'écriture précédente est alors appelée **développement multirésolution** de f.

De plus, si la fonction ψ est choisie de telle sorte que pour tout entier j, les fonctions translatées-dilatées

$$\psi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

forment une base de W_j, on dit que ψ est une **ondelette mère**, et l'écriture (3) est appelée **développement de f en ondelettes**. Remarquons au passage que la condition précédente est vérifiée dès que $(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de W_0. En effet, on a vu que V_j était l'image de V_0 par Δ_j. Par conservation du produit scalaire, on en déduit $W_j = \Delta_j(W_0)$. Mais la définition des translatées-dilatées de ψ peut aussi s'écrire $\psi_{j,k} = \Delta_j(\psi_{0,k})$. Ainsi, le fait que $(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une base de W_0 implique que pour tout entier j, $(\psi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de W_j. En fait, toute propriété relative à la structure hilbertienne qui est valable dans V_0 se transmet aux sous-espaces dilatés V_j.

Enfin, dans l'écriture (3), chaque entier j correspond à un **niveau de résolution**. C'est pourquoi l'expression “niveau de résolution j” fera référence à l'espace W_j ou plus généralement aux fonctions $(\psi_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ et aux coefficients $(\beta_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$.

Les coefficients de développement en ondelettes se retrouvent bien sûr par les formules

$$\alpha_k = \langle f, \varphi_{0,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi_{0,k}(x)}dx,$$

$$\beta_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi_{j,k}(x)}dx.$$

La partie

$$f - p_{V_0}(f) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{j,k}\psi_{j,k}$$

est appelée partie homogène du développement de f. On voit que les coefficients du développement en ondelettes ne sont affectés que par le comportement de f sur le support de la fonction avec laquelle on prend le produit scalaire. Ainsi, le développement en ondelettes ne se contente pas d'analyser la fonction suivant différents niveaux de résolution, il permet aussi d'en faire ressortir des détails locaux !

Remarque 2.1. Le fait d'avoir pris le sous-espace V_0 comme "espace de référence" est tout à fait arbitraire. En effet, on voit que pour un entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ fixé,

$$\bigcup_{n\geq n_0} V_n \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } V_{n_0} \oplus \bigoplus_{j\geq n_0} W_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R})$$

(car pour tout $n > n_0$, $V_n = V_{n_0} \oplus W_{n_0} \oplus W_{n_0+1} \oplus \ldots \oplus W_{n-1}$). De plus, comme la suite des V_n croît avec n, on a pour tous entiers $p, q \in \mathbb{Z}$,

$$\bigcup_{n\geq p} V_n \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \bigcup_{n\geq q} V_n \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}).$$

L'indice de départ n'a donc aucune importance : si n_0 et n_1 sont deux entiers relatifs quelconques,

$$\bigcup_{n\geq n_0} V_n \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } V_{n_1} \oplus \bigoplus_{j\geq n_1} W_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}).$$

C'est pourquoi dans la construction, sans perte de généralité, on cherchera les conditions pour que $\bigcup_{n\geq 0} V_n$ soit dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Ces conditions garantiront alors le développement en ondelettes d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ quelconque, et ce en commençant à partir de n'importe quel niveau de résolution :

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{n_0,k}\varphi_{n_0,k} + \sum_{j\geq n_0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{j,k}\psi_{j,k}.$$

Au passage, remarquons qu'il n'est en fait pas nécessaire de faire appel à un sous-espace de référence : en effet, il est possible de montrer (sous les mêmes hypothèses) que le sous-espace $\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j$ est aussi dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et par conséquent, toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ se décompose sous la forme

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{j,k}\psi_{j,k}.$$

En résumé, on peut énoncer le principe général de construction suivant :

1. Choisir une ondelette père, c'est-à-dire une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$(\varphi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}} \text{ est une famille orthonormée de } L^2(\mathbb{R}), \tag{4a}$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_j \subset V_{j+1}, \tag{4b}$$

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} V_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}). \tag{4c}$$

2. Choisir une ondelette mère, c'est-à-dire une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}} \text{ est une base hilbertienne de } W_0. \tag{5}$$

2.3 Traduction des conditions dans le domaine fréquentiel

Les conditions données à la fin du paragraphe précédent ne sont pas toujours faciles à vérifier en pratique : elles ne sont pas directement lisibles sur les fonctions φ et ψ. On va voir maintenant qu'après transformation de Fourier, les conditions (4a), (4b), et (5) se traduisent plus simplement dans le domaine fréquentiel. La condition (4c) est reliée au problème de l'approximation et donc à l'annulation des moments des fonctions φ et ψ qui s'interprètent comme les dérivées en zéro de leurs transformées de Fourier. Nous ne traiterons pas en détail cette question dans cet exposé, mais nous l'évoquerons dans les exemples de la partie 3.

Proposition 2.4. *Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$.*
Alors les fonctions $(\varphi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \quad p.p.\ \xi. \tag{6}$$

Démonstration. Posons $q = \varphi * \tilde{\varphi}$ où $\tilde{\varphi}(x) = \overline{\varphi(-x)}$. On a vu dans la partie 1 que $\hat{q} = |\hat{\varphi}|^2$. En particulier,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \hat{q}(\xi + 2k\pi) = |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2,$$

d'où, en sommant :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{q}(\xi + 2k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2.$$

Mais alors, puisque $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, la fonction $\hat{q}$ est intégrable, et la formule sommatoire de Poisson donne que la série de gauche converge pour presque tout ξ et définit une fonction $S(\xi)$, intégrable 2π-périodique dont les coefficients de Fourier sont $c_k(S) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{q}](-k) = q(-k)$. D'autre part, par définition de q,

$$q(k) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(k - x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\varphi(x - k)}dx.$$

Dans ces conditions, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rc} & (\varphi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}} \text{ est une famille orthonormée de } L^2(\mathbb{R}) \\ \Longleftrightarrow & \forall k,l\in\mathbb{Z},\quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-l)\overline{\varphi(x-k)}dx = \delta_{l,k} \\ \Longleftrightarrow & \forall k\in\mathbb{Z},\quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\varphi(x-k)}dx = \delta_{0,k} \\ \Longleftrightarrow & \forall k\in\mathbb{Z},\quad c_k(S) = \delta_{0,k} \\ \Longleftrightarrow & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{q}(\xi+2k\pi) = 1 \quad \text{p.p. } \xi \\ \Longleftrightarrow & \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi+2k\pi)|^2 = 1 \quad \text{p.p. } \xi \end{array}$$

où la quatrième équivalence provient de la deuxième partie du corollaire 1.8. □

Proposition 2.5. *La suite $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est croissante si et seulement s'il existe une fonction $m_0 \in L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$ vérifiant*

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad p.p.\ \xi. \tag{7}$$

Démonstration. On a déjà vu dans le paragraphe précédent que la suite $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est croissante si et seulement si V_0 est contenu dans V_1. Par injectivité de la transformation de Fourier, cela équivaut à dire que $\hat{V_0}$ est contenu dans $\hat{V_1}$. On est donc conduits à étudier l'image de V_0 et V_1 par transformée de Fourier. Plus généralement, on va calculer $\hat{V_j}$. Par définition, on a :

$$V_j = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\varphi(2^jx-k)\,, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k|^2 < \infty \right\}.$$

En utilisant le comportement de la transformée de Fourier vis-à-vis des translations et des dilatations, on en déduit

$$\begin{aligned} \hat{V_j} &= \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\mathcal{F}[\varphi(2^jx-k)](\xi)\,, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k|^2 < \infty \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{b_k}{2^j}\mathcal{F}[\varphi(x-k)]\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\,, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k|^2 < \infty \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{b_k}{2^j}\exp\left(-\frac{ik\xi}{2^j}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\,, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k|^2 < \infty \right\} \\ &= \left\{ \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\exp\left(-ik\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\right)\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\,, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty \right\} \\ &= \left\{ m\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right)\,, \quad m \in L^2_{2\pi-\mathrm{per}} \right\}. \end{aligned}$$

Ce calcul fait, on voit que la condition (7) est nécessaire : si $V_0 \subset V_1$, on a en particulier $\hat{\varphi} \in \hat{V_1}$ et le résultat suit en utilisant le calcul précédent. Réciproquement, si la condition (7) est vérifiée, en utilisant le calcul précédent, la transformée de Fourier d'une fonction $f \in V_0$ s'écrit

$$\hat{f}(\xi) = m(\xi)\hat{\varphi}(\xi) = m(\xi)m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

où $m \in L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$. Avec le calcul ci-dessus, on voit alors qu'il suffit de prouver que la fonction $\xi \mapsto m(2\xi)m_0(\xi)$ appartient à $L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$ pour obtenir que $\hat{f} \in \hat{V}_1$. Bien sûr, elle est 2π-périodique et pour conclure, il suffit de voir que la fonction m_0 est bornée, ce qui est une conséquence du lemme suivant. □

Lemme 2.6. *Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $(\varphi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Alors toute fonction $m_0 \in L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$ satisfaisant à la condition* (7) *vérifie*

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1 \quad p.p.\ \xi. \tag{8}$$

Démonstration. En utilisant (6), (7) et que m_0 est 2π-périodique, on obtient que pour presque tout ξ,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\xi+2k\pi)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |m_0(\xi+k\pi)|^2|\hat{\varphi}(\xi+k\pi)|^2 \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} |m_0(\xi+2p\pi)|^2|\hat{\varphi}(\xi+2p\pi)|^2 + \sum_{q\in\mathbb{Z}} |m_0(\xi+(2q+1)\pi)|^2|\hat{\varphi}(\xi+(2q+1)\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 \sum_{p\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi+2p\pi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 \sum_{q\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi+\pi+2q\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2. \end{aligned}$$

□

Ainsi, on a prouvé que les conditions (4a) et (4b) se résument à une vérification calculatoire à partir de la transformée de Fourier de φ. En mettant à part la condition (4c), on doit maintenant voir comment, à partir d'une ondelette père φ on peut construire une ondelette mère ψ. La proposition suivante donne une construction dans le domaine fréquentiel.

Proposition 2.7. *Soit φ une ondelette père et $m_0 \in L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$ satisfaisant à la condition* (7). *Alors, en posant*

$$m_1(\xi) = \overline{m_0(\xi+\pi)}e^{-i\xi}, \tag{9a}$$

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \tag{9b}$$

on obtient que la fonction ψ (qui se retrouve à partir de $\hat{\psi}$ par transformée de Fourier inverse) est une ondelette mère.

Démonstration. D'abord, $(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Pour le vérifier, on va utiliser la proposition 2.4 : il faut voir que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi+2k\pi)|^2 = 1 \quad \text{p.p. } \xi.$$

Par définition de $\hat{\psi}$ et de m_1, la somme de gauche est égale à

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| m_1\left(\frac{\xi}{2}+k\pi\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+k\pi\right)\right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi+k\pi\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+k\pi\right)\right|^2.$$

En sommant sur les indices pairs puis sur les indices impairs et en utilisant que m_0 est 2π-périodique, on voit qu'elle est aussi égale à

$$\left| m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)\right|^2 \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+2p\pi\right)\right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 \sum_{q\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+\pi+2q\pi\right)\right|^2.$$

Puisque la fonction φ vérifie la condition (6), on en déduit que pour presque tout ξ, cette quantité est aussi égale à

$$\left| m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)\right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2$$

qui égale à 1 pour presque tout ξ grâce au lemme 2.6.

Montrons maintenant que les fonctions $(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ appartiennent à W_0 c'est-à-dire au supplémentaire orthogonal de V_0 dans V_1. D'abord, on voit avec la définition de $\hat{\psi}$ que $\psi \in V_1$ (cf. caractérisation de l'espace $\hat{V_1}$ donné dans la preuve de la proposition 2.5). Il s'en suit que pour tout entier k, $\psi_{0,k} \in V_1$ car

$$\widehat{\psi_{0,k}}(\xi) = e^{-ik\xi}\hat{\psi}(\xi).$$

Ensuite il faut montrer que les $(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ sont orthogonales à V_0. Puisque $(\varphi_{0,l})_{l\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de V_0, il suffit de montrer que les $(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ sont orthogonales aux $(\varphi_{0,l})_{l\in\mathbb{Z}}$. On va utiliser une technique similaire à celle rencontrée dans la preuve de la proposition 2.4. Posons $g = \varphi * \tilde{\psi}$ où $\tilde{\psi}(x) = \overline{\psi(-x)}$. On calcule sa transformée de Fourier :

$$\hat{g} = \hat{\varphi}\hat{\tilde{\psi}} = \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}.$$

Puisque φ et ψ sont de carré intégrable, $\hat{g}$ est intégrable et on peut donc lui appliquer la formule sommatoire de Poisson : la série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(\xi+2k\pi)$$

converge pour presque tout ξ et définit une fonction $S(\xi)$ de $L^1_{2\pi-\mathrm{per}}$ dont les coefficients de Fourier sont donnés par

$$c_k(S) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](-k) = g(-k).$$

Dans ces conditions, on a les équivalences suivantes :

$$
\begin{array}{rc}
 & \text{Les } (\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}} \text{ sont orthogonales aux } (\varphi_{0,l})_{l\in\mathbb{Z}} \\
\iff & \forall k,l \in \mathbb{Z}, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-k)\overline{\psi(x-l)}dx = 0 \\
\iff & \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\psi(x-k)}dx = 0 \\
\iff & \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi * \tilde{\psi}(k) = 0 \\
\iff & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{g}(\xi + 2k\pi) = 0 \quad \text{p.p. } \xi \\
\iff & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)\overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)} = 0 \quad \text{p.p. } \xi
\end{array}
$$

où la quatrième équivalence provient de la première partie du corollaire 1.8. Mais alors, en utilisant successivement la condition (7), la définition de $\hat{\psi}$, la 2π-périodicité de m_0 et de m_1, la proposition 2.4, et enfin la définition de m_1, on obtient que pour presque tout ξ,

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)\overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)} \\
= \; & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) m_1\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)} \\
= \; & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)\right|^2 m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)} \\
= \; & m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right)\right|^2 \\
& \quad + \; m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \sum_{q\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + \pi + 2q\pi\right)\right|^2 \\
= \; & m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)} + \; m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{m_1\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \\
= \; & m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \exp\left(i\frac{\xi}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) + m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \exp\left(i\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)\right) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
= \; & \exp\left(i\frac{\xi}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) - \exp\left(i\frac{\xi}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

ce qui prouve bien que les $(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ sont orthogonales aux $(\varphi_{0,l})_{l\in\mathbb{Z}}$.

Pour finir, il faut montrer que les fonctions $(\psi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de W_0. Il faut montrer que toute fonction $f \in W_0$ se décompose en

$$
f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \psi(x-k) \quad \text{où} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty,
$$

ou encore, après transformée de Fourier, qu'on a

$$
\hat{f}(\xi) = \nu(\xi)\hat{\psi}(\xi),
$$

où $\nu \in L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$. Fixons donc $f \in W_0$. On va s'inspirer du raisonnement effectué ci-dessus pour montrer que les $\psi_{0,k}$ sont dans W_0 afin de traduire exactement l'appartenance de f à W_0 sur la forme de sa transformée de Fourier. D'abord, puisque $f \in V_1$, il existe une fonction $m \in L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$ telle que

$$\hat{f}(\xi) = m\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad \text{p.p. } \xi.$$

En posant $h = \varphi * \tilde{f}$, et en utilisant la formule sommatoire de Poisson avec $\hat{h}$, on obtient que l'orthogonalité de f à V_0 se traduit par

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)\overline{\hat{f}(\xi + 2k\pi)} = 0 \quad \text{p.p. } \xi,$$

où la série de gauche converge absolument pour presque tout ξ. D'autre part, on a aussi pour presque tout ξ

$$\begin{aligned}
& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)\overline{\hat{f}(\xi + 2k\pi)} \\
= \quad & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) m\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)} \\
= \quad & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)\right|^2 m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{m\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)} \\
= \quad & m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\overline{m\left(\frac{\xi}{2}\right)} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right)\right|^2 \\
& \quad + \quad m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)\overline{m\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \sum_{q\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + \pi + 2q\pi\right)\right|^2 \\
= \quad & m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\overline{m\left(\frac{\xi}{2}\right)} + \ m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)\overline{m\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)}.
\end{aligned}$$

En passant aux conjugués et en posant $\zeta = \frac{\xi}{2}$, on obtient

$$m(\zeta)\overline{m_0(\zeta)} + m(\zeta + \pi)\overline{m_0(\zeta + \pi)} = 0 \quad \text{p.p. } \zeta.$$

En utilisant (8), on voit aussi que pour presque tout ζ, au plus l'un des deux nombres $m_0(\zeta)$ et $m_0(\zeta + \pi)$ est nul. On peut donc poser

$$\lambda(\zeta) = \begin{cases} -\frac{m(\zeta+\pi)}{\overline{m_0(\zeta)}} & \text{si } m_0(\zeta) \neq 0 \\ \frac{m(\zeta)}{\overline{m_0(\zeta+\pi)}} & \text{si } m_0(\zeta + \pi) \neq 0 \end{cases}$$

de sorte que

$$m(\zeta) = \lambda(\zeta)\overline{m_0(\zeta + \pi)} \quad \text{p.p. } \zeta.$$

Puisque m et m_0 sont 2π-périodiques, on obtient que λ l'est aussi et qu'elle vérifie de plus

$$\lambda(\zeta) + \lambda(\zeta + \pi) = 0 \quad \text{p.p. } \zeta.$$

En multipliant par $e^{i\zeta}$, il vient

$$e^{i\zeta}\lambda(\zeta) - e^{i\zeta + i\pi}\lambda(\zeta + \pi) = 0 \quad \text{p.p. } \zeta,$$

ou encore en remplaçant ζ par $\frac{\xi}{2}$,

$$\exp\left(i\frac{\xi}{2}\right)\lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) = \exp\left(i\frac{\xi + 2\pi}{2}\right)\lambda\left(\frac{\xi + 2\pi}{2}\right) \quad \text{p.p. } \xi,$$

ce qui exprime que la fonction

$$\nu(\xi) = \exp\left(i\frac{\xi}{2}\right)\lambda\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

est 2π-périodique. En remplaçant dans l'expression de la transformée de Fourier de f, il en résulte que pour presque tout ξ

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right)\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \nu(\xi)\exp\left(-i\frac{\xi}{2}\right)\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \nu(\xi)\hat{\psi}(\xi).
\end{aligned}$$

Reste à voir que $\int_0^{2\pi} |\nu(\xi)|^2 d\xi < \infty$. On sait que $m \in L^2_{2\pi-\text{per}}$ donc

$$\int_0^{2\pi} |m(\zeta)|^2 d\zeta < \infty.$$

Mais d'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |m(\zeta)|^2 d\zeta &= \int_0^{2\pi} |\lambda(\zeta)|^2 |m_0(\zeta + \pi)|^2 d\zeta \\
&= \int_0^{\pi} \left(|\lambda(\zeta)|^2 |m_0(\zeta + \pi)|^2 + |\lambda(\zeta + \pi)|^2 |m_0(\zeta)|^2\right) d\zeta \\
&= \int_0^{\pi} |\lambda(\zeta)|^2 \left(|m_0(\zeta)|^2 + |m_0(\zeta + \pi)|^2\right) d\zeta \\
&= \int_0^{\pi} |\lambda(\zeta)|^2 d\zeta \\
&= 2\int_0^{2\pi} \left|\lambda\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 d\xi \\
&= 2\int_0^{2\pi} |\nu(\xi)|^2 d\xi,
\end{aligned}$$

où dans la troisième égalité, on a utilisé que $\lambda(\zeta)$ et $\lambda(\zeta+\pi)$ ont même module car on a vu que

$$\lambda(\zeta)+\lambda(\zeta+\pi)=0 \quad \text{p.p. } \zeta.$$

Finalement,

$$\hat{f}(\xi)=\nu(\xi)\hat{\psi}(\xi) \quad \text{p.p. } \xi,$$

avec $\nu \in L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$, ce qui montre bien que $f \in W_0$ et achève la preuve. □

Remarque 2.2. De prime abord, le choix de la fonction $\hat{\psi}$ peut paraître étonnant. Néanmoins, en reprenant la fin de la preuve précédente, on voit qu'il apparaît assez naturellement que la transformée de Fourier d'une fonction quelconque $f \in W_0$ s'écrit sous la forme

$$\hat{f}(\xi)=\nu(\xi)\exp\left(-i\frac{\xi}{2}\right)\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

où $\nu \in L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$, et c'est comme ça qu'on en déduit notre candidat pour la transformée de Fourier de ψ.

2.4 Retour au domaine temporel

Dans ce paragraphe, nous allons repasser dans le domaine temporel : on va traduire les conditions obtenues dans le paragraphe précédent en des relations portant sur les coordonnées de la fonction φ dans la base hilbertienne $(\varphi_{1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ de V_1.

Reprenons les notations du paragraphe précédent : φ est une ondelette père, $m_0 \in L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$ est une fonction satisfaisant à la condition (7), et ψ l'ondelette mère définie par les relations (9a) et (9b). Puisque $m_0 \in L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$, on peut l'écrire sous forme d'une série de Fourier :

$$m_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k e^{-ik\xi}, \quad \text{avec } \sum_{k\in\mathbb{Z}}|h_k|^2<\infty.$$

En exploitant la condition (7), on en déduit :

$$\hat{\varphi}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k\exp\left(-ik\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)=\sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k\mathcal{F}[\varphi(2x-k)](\xi),$$

et donc par transformée de Fourier inverse,

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k\varphi(2x-k)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k\varphi_{1,k}(x),$$

c'est-à-dire que les $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont exactement les coordonnées de la fonction φ dans la base hilbertienne $(\varphi_{1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ de V_1. Ainsi les coordonnées de m_0 dans la base hilbertienne $(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-ik\xi})_{k\in\mathbb{Z}}$ de $L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$ sont exactement les coordonnées de φ dans la base hilbertienne $(\varphi_{1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$. Les conditions trouvées sur la fonction m_0 vont donc pouvoir être exprimées grâce aux $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

D'une part, le résultat du lemme 2.6 s'écrit :

$$\begin{aligned}
1 &= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 \\
&= m_0(\xi)\overline{m_0(\xi)} + m_0(\xi+\pi)\overline{m_0(\xi+\pi)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{-ik\xi}\right)\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}} \bar{h_{k'}} e^{ik'\xi}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k e^{-ik(\xi+\pi)}\right)\left(\sum_{k'\in\mathbb{Z}} \bar{h_{k'}} e^{ik'(\xi+\pi)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k,k'\in\mathbb{Z}} h_k\bar{h_{k'}} e^{i(k'-k)\xi} + \frac{1}{2}\sum_{k,k'\in\mathbb{Z}} h_k\bar{h_{k'}} e^{i(k'-k)\xi+i(k'-k)\pi} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k,k'\in\mathbb{Z}} h_k\bar{h_{k'}} e^{i(k'-k)\xi}\left(1+e^{i(k'-k)\pi}\right) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\overline{h_{k+2l}}\right) e^{2il\xi},
\end{aligned}$$

toutes les séries ci-dessus étant absolument convergentes à cause de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du fait que $\sum |h_k|^2 < \infty$. Par conséquent, on a

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\overline{h_{k+2l}} = \delta_{0,l}. \tag{10}$$

De la même manière, on va pouvoir expliciter les coordonnées de ψ dans la base $(\varphi_{1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ à partir des $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. On a défini ψ par sa transformée de Fourier :

$$\hat{\psi}(\xi) = \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)}\exp\left(-i\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

En remplaçant m_0 par sa série de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \bar{h_k}\exp\left(ik\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)-i\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \bar{h_k}(-1)^k\exp\left(i(k-1)\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k'\in\mathbb{Z}} \overline{h_{1-k'}}(-1)^{k'+1}\exp\left(-ik'\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\lambda_k = (-1)^{k+1}\overline{h_{1-k}}$, on en déduit

$$\hat{\psi}(\xi) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k \mathcal{F}[\varphi(2x-k)](\xi),$$

et donc, par transformée de Fourier inverse,

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k\varphi(2x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_k\varphi_{1,k}(x),$$

c'est-à-dire que les $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont exactement les coordonnées de ψ dans la base hilbertienne $(\varphi_{1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ de V_1.

3 Construction d'une ondelette père

Dans la partie précédente, on a éclairci les conditions qui valident la construction d'une base d'ondelettes. On a vu que toutes ces conditions peuvent être exprimées à l'aide de la transformée de Fourier de l'ondelette père. On va maintenant exposer deux procédés qui permettent de construire des ondelettes pères en pratique. Pour la clarté de l'exposé, nous préférons laisser de côté certaines preuves techniques.

3.1 À partir d'une base de Riesz

Définition 3.1. Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$.
On dit que la famille de fonctions $(g(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de Riesz s'il existe deux constantes $A, B > 0$ telles que pour tout ensemble fini d'indices $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ et toute famille de nombres complexes $(\lambda_k)_{k\in\Lambda}$, on ait

$$A \sum_{k\in\Lambda} |\lambda_k|^2 \;\leq\; \int_{\mathbb{R}} |\sum_{k\in\Lambda} \lambda_k g(x-k)|^2 dx \;\leq\; B \sum_{k\in\Lambda} |\lambda_k|^2.$$

En d'autres termes, $(g(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de Riesz si, sur le sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $(g(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}$, la norme L^2 d'une fonction $\sum \lambda_k g(\cdot - k)$ est équivalente à la norme l^2 de ses coordonnées (λ_k).

Proposition 3.1. *Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$.*
La famille de fonctions $(g(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de Riesz si et seulement s'il existe deux constantes $A, B > 0$ telles que

$$A \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \leq B \quad p.p.\ \xi. \tag{11}$$

Dans ce cas, on dit que g est une fonction génératrice et la fonction

$$\Gamma(\xi) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2}$$

est appelée fonction de superposition (qui vérifie donc $A \leq \Gamma(\xi)^2 \leq B$ pour presque tout ξ).

Démonstration. (abrégée) D'abord, on montre à l'aide de la formule de Plancherel et de la 2π-périodicité de Γ que

$$\int_{\mathbb{R}} |\sum_{k\in\Lambda} \lambda_k g(x-k)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sum_{k\in\Lambda} \lambda_k e^{-ik\xi}|^2 \Gamma(\xi)^2 d\xi.$$

D'autre part, la formule de Parseval (ou un calcul direct) montre que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sum_{k\in\Lambda} \lambda_k e^{-ik\xi}|^2 dx = \sum_{k\in\Lambda} |\lambda_k|^2.$$

Muni de ces deux égalités, on voit que $(g(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de Riesz si et seulement si pour tout polynôme trigonométrique $m(\xi)$,

$$A\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|m(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|m(\xi)|^2\Gamma(\xi)^2 d\xi \leq B\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|m(\xi)|^2 d\xi. \quad (12)$$

En utilisant cette caractérisation, il devient clair que la condition (11) est suffisante. Pour la réciproque, on utilise la condition (12) avec une suite de polynômes trigonométriques bien particuliers : on introduit

$$D_N(\xi) = \sum_{|k|\leq N} e^{ik\xi} = \frac{\sin\frac{(2N+1)\xi}{2}}{\sin\frac{\xi}{2}} \quad \text{(noyau de Dirichlet)},$$

$$K_N(\xi) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(\xi) = \frac{1}{N}\sum_{|k|\leq N}\left(1-\frac{|k|}{N}\right)e^{ik\xi} = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{N\xi}{2}}{\sin\frac{\xi}{2}}\right)^2 \quad \text{(noyau de Fejer)}.$$

On voit alors d'une part que

$$K_{2N+1}(\xi) = \left|\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\,D_N(\xi)\right|^2,$$

et d'autre part, on peut montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{2N+1}(\xi)d\xi = 1.$$

On fixe alors $\xi_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant la condition (12) avec le polynôme trigonométrique

$$m(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}\,D_N(\xi_0-\xi),$$

il en résulte que pour tout entier $N \geq 0$,

$$A \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{2N+1}(\xi_0-\xi)\Gamma(\xi)^2 d\xi \leq B.$$

Mais alors la dernière intégrale peut s'interpréter comme une convolée $K_{2N+1} * \Gamma^2(\xi_0)$. Or on peut montrer que

$$K_{2N+1} * \Gamma^2(\xi_0) \xrightarrow[N\to\infty]{} \Gamma^2(\xi_0) \quad \text{p.p. } \xi_0.$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre N vers l'infini dans la dernière inégalité pour obtenir (11). □

Une fonction génératrice g n'est pas nécessairement une ondelette père. Néanmoins, la famille $(g(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est facile à orthonormaliser et on obtient alors un bon candidat d'ondelette père !

Proposition 3.2. *Soit* $(g(\cdot - k))_{k\in\mathbb{Z}}$ *une base de Riesz.*
On définit la fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ *par sa transformée de Fourier :*

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{\Gamma(\xi)}.$$

Alors $(\varphi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une famille orthonormée de* $L^2(\mathbb{R})$*.*

Démonstration. Puisque Γ est 2π-périodique, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{\Gamma(\xi)^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1,$$

et le résultat en découle grâce à la proposition 2.4. □

3.2 A partir de la fonction m_0

Le procédé élaboré au paragraphe précédent a plusieurs inconvénients : d'abord, avant d'affirmer que φ est bien une ondelette père, il faut au préalable vérifier la condition (7). De plus, on ne peut pas a priori contrôler la taille du support de φ. Or d'un point de vue calculatoire, il peut être agréable de disposer d'ondelettes à support compact. C'est pourquoi, on va maintenant étudier un autre procédé de construction d'ondelette père : on va essayer de reconstruire, à partir d'une fonction m_0, une fonction φ satisfaisant (7).

Le point de départ est de remarquer que la relation (7) peut être itérée :

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{4}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{4}\right) = \cdots$$

A condition que $\hat{\varphi}(0) = 1$ (il suffit de diviser φ par son intégrale lorsque celle-ci est non nulle) et sous réserve de convergence du produit, on est tentés d'écrire

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right). \tag{13}$$

ce qui permettrait de construire φ à partir de m_0. La suite vise à donner une esquisse des conditions sous lesquelles on aboutit bien à la construction d'une ondelete père.

Lemme 3.3. *Si* m_0 *est lipschitzienne et vérifie* $m_0(0) = 1$*, alors le produit* (13) *converge uniformément sur tout compact.*

Démonstration. Admise. On pourra consulter [2] paragraphe 6.2. □

En pratique, on prendra volontiers m_0 sous la forme d'un polynôme trigonométrique

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=N_0}^{N_1} h_k e^{-ik\xi} \quad (N_0, N_1 \in \mathbb{Z} \text{ fixés}).$$

Si on choisit

$$\sum_{k=N_0}^{N_1} h_k = 1, \tag{14}$$

on a $m_0(0) = 1$ et réciproquement. De plus, une telle fonction m_0 est automatiquement lipschitzienne.

Proposition 3.4. *Soit m_0 un tel polynôme trigonométrique qui satisfait la condition* (8)*. On suppose aussi qu'il existe un voisinage compact $\mathcal{K}$ de zéro dans $\mathbb{R}$ tel que pour presque tout ξ, $\mathcal{K} \cap (\xi + 2\pi\mathbb{Z})$ est un singleton et tel que*

$$\forall j \geq 1, \quad \forall \xi \in \mathcal{K}, \quad m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \neq 0.$$

Alors la fonction

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

est la transformée de Fourier d'une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ à support dans $[N_0, N_1]$ telle que $(\varphi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. De plus, la fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ définie par (9a) *et* (9b) *est à support dans $[\frac{1}{2}(1 - N_1 + N_0), \frac{1}{2}(1 - N_0 + N_1)]$.*

Démonstration. Admise. Voir par exemple [2] paragraphe 6.3. □

Remarque 3.1. Les hypothèses du lemme sont automatiquement vérifiées si $\mathcal{K} = [-\pi, \pi]$ et si m_0 ne s'annule pas dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, pour obtenir une ondelette père, il ne nous reste plus qu'à ajuster les coefficients h_k de sorte qu'ils vérifient les conditions (8) et (14). De plus, on va voir dans la proposition suivante qu'à partir de ces coefficients, on a un certain contrôle des fonctions φ et ψ générées.

Proposition 3.5. *On se place sous les hypothèses de la proposition 3.4.*

1. *Concernant l'ondelette père φ, si on a*

$$\forall l = 1, \ldots, n, \quad \sum_{k=N_0}^{N_1} h_k k^l = 0, \tag{15}$$

alors les moments de la fonction φ s'annulent jusqu'à l'ordre n, c'est-à-dire

$$\forall l = 1, \ldots, n, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) x^l dx = 0.$$

2. *Concernant l'ondelette mère ψ définie par* (9a) *et* (9b)*, si on a*

$$\forall l = 1, \ldots, n, \quad \sum_{k=N_0}^{N_1} \lambda_k k^l = \sum_{k=1-N_1}^{1-N_0} (-1)^k \bar{h}_k (1-k)^l = 0, \tag{16}$$

alors les moments de la fonction ψ s'annulent jusqu'à l'ordre n, c'est-à-dire

$$\forall l = 1, \ldots, n, \quad \int_{\mathbb{R}} \psi(x) x^l dx = 0.$$

Démonstration. Montrons la première assertion, la preuve de la deuxième étant similaire. La condition

$$\sum_{k=N_0}^{N_1} h_k k^l = 0$$

signifie exactement que les dérivées de m_0 en zéro s'annulent jusqu'à l'ordre n. Or les dérivées de m_0 et de $\hat{\varphi}$ en zéro sont liées par l'égalité (7). Mais alors les dérivées de $\hat{\varphi}$ en zéro sont, à constante près, les moments de la fonction φ. Le résultat de la proposition en découle. □

Il est possible de montrer que l'annulation des moments des fonctions φ et ψ est reliée à l'efficacité des approximations effectuées en utilisant la base d'ondelettes correspondante.

On peut maintenant se demander à quoi ressemblent les ondelettes obtenues par cette construction. La méthode utilisée ci-dessus fait intervenir un produit infini qui n'est pas très maniable en pratique. Ainsi, on a pu montrer l'existence d'ondelettes ayant de bonnes propriétés : support compact, régularité, etc, mais on voudrait avoir un algorithme permettant d'en donner de bonnes approximations. On présente ici le procédé introduit par Stéphane Mallat, dit algorithme en cascade. On pourra trouver plus de détail sur ce sujet dans [3], chapitre 12.

On part de la fontion m_0, qui vérifie les hypothèses de la proposition 3.4. On dispose des coefficients $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dans la base des $(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-ik\xi})_{k\in\mathbb{Z}}$; en pratique m_0 sera souvent un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un nombre fini de h_k non nuls. On veut connaître au mieux la fonction φ définie par la proposition 3.4, et on note :

$$a_{j,k} = \langle \varphi, \varphi_{j,k} \rangle,$$

$$b_{j,k} = \langle \varphi, \psi_{j,k} \rangle.$$

On a vu dans la partie 2.4 que dans la base des $(\varphi_{j+1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, les $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont les coordonnées de $\phi_{j,0}$ et les $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ($\lambda_k = (-1)^{k+1}\overline{h_{1-k}}$) sont les coordonnées de $\psi_{j,0}$.

On en déduit les relations de récurrence suivantes :

$$a_{j,k} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} h_{l-2k} a_{j+1,l},$$

$$b_{j,k} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \lambda_{l-2k} a_{j+1,l},$$

$$a_{j+1,k} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_{j,l} h_{k-2l} + \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_{j,l} \lambda_{k-2l}.$$

Bien entendu, les coordonnées de φ dans la base $(\varphi_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ sont

$$a_{0,k} = \delta_{0,k},$$

ce qui nous permet d'initialiser le calcul. On utilise alors le résultat d'approximation suivant :

Proposition 3.6. *Si φ est continue au point $m2^{-N}$, alors*

$$\varphi(m2^{-N}) = \lim_{j\to\infty} 2^{j/2}\langle\varphi, \varphi_{j,m2^{j-N}}\rangle.$$

Si de plus φ est α-hölderienne, on a la majoration suivante :

$$\left|\varphi(m2^{-N}) - 2^{j/2}\langle\varphi, \varphi_{j,m2^{j-N}}\rangle\right| \leq K2^{-j\alpha},$$

où K peut être pris égal à $||\varphi||_{L^1}R^{\alpha}$ si φ est à support dans $[-R, R]$

Démonstration. Admise. On pourra se référer à [5] paragraphe 4.5.3. □

Il est important de remarquer que K est une constante calculable.
En se rappelant que

$$\langle\varphi, \varphi_{j,m2^{j-N}}\rangle = a_{j,m2^{j-N}},$$

on en déduit que le calcul des $a_{j,k}$ fournit avec une très bonne précision les valeurs de φ aux points dyadiques.

3.3 Exemples

Exemple 3.1. Les B-splines
Les B-splines sont des ondelettes construites à partir d'une base de Riesz. Posons

$$g_1 = \mathbb{1}_{[0,1]},$$

puis

$$\forall N \geq 1, \quad g_N = g_1^{*N}.$$

On peut calculer explicitement la transformée de Fourier de g_N :

$$\hat{g_N}(\xi) = \left(\frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi}\right)^N = \left(e^{-i\frac{\xi}{2}}\frac{\sin\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}}\right)^N.$$

On a donc

$$|\hat{g}_N(\xi + 2k\pi)|^2 = \left|\frac{\sin\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)}{\frac{\xi}{2} + k\pi}\right|^{2N}.$$

En utilisant diverses minorations et majorations sur la fonction $\frac{\sin(\xi)}{\xi}$, on montre alors l'existence de deux constantes $A, B > 0$ telles que

$$A \leq \Gamma(\xi)^2 \leq B.$$

La proposition 3.1 permet d'en conclure que pour tout $N \geq 1$, la fonction g_N engendre une base de Riesz. Avec le procédé donné en 3.2, on en déduit pour tout $N \geq 1$ un candidat φ_N d'ondelette père. Par exemple, pour $N = 1$, on retrouve l'ondelette de Haar.

Pour $N = 2$, on a

$$\hat{g_2}(\xi) = e^{-i\xi} \left(\frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^2 .$$

Il est alors possible de calculer explicitement la fonction de superposition :

$$\Gamma(\xi)^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\sin\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)}{\frac{\xi}{2} + k\pi} \right|^4 = \frac{2 + \cos \xi}{3}.$$

On en déduit l'expression de la transformée de Fourier de φ_2 :

$$\hat{\varphi_2}(\xi) = \sqrt{\frac{3}{2 + \cos \xi}}\, e^{-i\xi} \left(\frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^2 = \sqrt{\frac{3}{2 + \cos \xi}}\, \hat{g_2}(\xi).$$

A noter que l'on peut ensuite revenir au domaine temporel pour "décomposer φ_2 dans la base de Riesz $(g_2(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$" : il suffit pour cela d'écrire sous forme d'une série de Fourier :

$$\sqrt{\frac{3}{2 + \cos \xi}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi}.$$

La dernière expression de la transformée de Fourier de φ_2 se lit alors dans le domaine temporel sous la forme :

$$\varphi_2(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g_2(x - k).$$

A partir de la fonction $\hat{\varphi_2}$, on peut alors calculer les fonctions m_0 et m_1 correspondantes :

$$m_0(\xi) = \frac{\hat{\varphi}(2\xi)}{\hat{\varphi}(\xi)} = e^{-i\xi} \left(\cos \frac{\xi}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{2 + \cos \xi}{2 + \cos 2\xi}},$$

$$m_1(\xi) = \overline{m_0(\xi + \pi)} e^{-i\xi} = \left(\sin \frac{\xi}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{2 - \cos \xi}{2 + \cos 2\xi}},$$

d'où l'expression de la transformée de Fourier de la fonction ψ_2 associée à φ_2 :

$$\hat{\psi_2}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{\sin^4\left(\frac{\xi}{4}\right)}{\left(\frac{\xi}{4}\right)^2} \sqrt{\frac{2 - \cos \frac{\xi}{2}}{2 + \cos \xi}} \sqrt{\frac{3}{2 + \cos \frac{\xi}{2}}}\, e^{-i\frac{\xi}{2}}.$$

On s'aperçoit que m_0 appartient bien à $L^2_{2\pi-\mathrm{per}}$. Ainsi, on a bien défini une ondelette père φ_2. Elle est appelée *ondelette père de Battle-Lemarié.* On peut voir qu'elle est paire, affine par morceaux, et de support $\mathbb{R}$ tout entier. On peut aussi montrer que l'ondelette mère ψ_2 est symétrique par rapport au point $x = \frac{1}{2}$, affine par morceaux et de support $\mathbb{R}$ tout entier.

Exemple 3.2. Ondelettes de Daubechies

On va s'intéresser dans cet exemple à des fonctions m_0 de la forme

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\xi),$$

où N est un entier ≥ 1 et $\mathcal{L}(\xi)$ un polynôme trigonométrique. On va alors chercher les conditions sur $\mathcal{L}$ qui font que m_0 vérifie les hypothèses de la proposition 3.4 et la relation (8).

On doit faire la remarque importante suivante : le carré du module d'un polynôme trigonométrique est un polynôme en $\cos(\xi)$. Par conséquent, la fonction

$$M_0(\xi) = |m_0(\xi)|^2$$

est un polynôme en $\cos(\xi)$. De la même manière

$$Q(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$$

est un polynôme en $\cos(\xi)$. On en déduit

$$M_0(\xi) = \left(\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^N Q(\xi).$$

Puisque

$$\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1-\cos\xi}{2},$$

on peut écrire $Q(\xi)$ sous la forme d'un polynôme en $\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$. Ainsi,

$$M_0(\xi) = \left(\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^N P\left(\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right),$$

où P est un polynôme.

Posant $y = \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$, la relation (8) s'écrit

$$(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 1 \quad \text{p.p. } y \in [0,1].$$

En particulier, l'égalité est valable au moins pour une infinité dénombrable de valeurs de y, et on obtient donc une égalité formelle entre polynômes. Ingrid Daubechies a résolu cette équation en P. La fonction $\mathcal{L}(\xi)$ se retrouve alors comme étant une "racine carrée" de $P\left(\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)$:

$$|\mathcal{L}(\xi)|^2 = P\left(\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la technique donnée dans la partie 3.2 pour obtenir une ondelette père φ.

Les ondelettes construites à l'aide de ce procédé sont apelées *ondelettes de Daubechies*. On notera ces bases d'ondelettes $D(2N)$ ou $Db(2N)$. L'ondelette $D2$ est exactement l'ondelette de Haar. Les ondelettes de Daubechies vérifient les propriétés suivantes :

1. Supp $\varphi \subset [0, 2N-1]$.
2. Supp $\psi \subset [-N+1, N]$.
3. $\forall l = 0, \ldots, N-1, \quad \int_{\mathbb{R}} \psi(x) x^l dx = 0$.
4. Dès que $N \geq 2$, les fonctions φ et ψ sont hölderiennes d'indice $\lambda_N N$ avec $\lambda_N \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,2$.

Exemple 3.3. COIFLETTES

Un inconvénient du procédé élaboré par Ingrid Daubechies est qu'il ne permet pas a priori de garantir l'annulation de certains moments de l'ondelette père. Ce type de phénomène aboutit à des propriétés d'approximation intéressantes. C'est pourquoi on introduit maintenant les coiflettes.

Pour construire une coiflette, on cherche m_0 sous la forme

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi),$$

où $\mathcal{L}(\xi)$ est un polynôme trigonométrique ; et on impose les conditions

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1, \\
&\int_{\mathbb{R}} x^l \varphi(x) dx = 0 \qquad \forall l = 1, \ldots, N-1, \\
&\int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx = 0 \qquad \forall l = 0, \ldots, N-1,
\end{aligned}$$

qui équivalent à

$$\begin{aligned}
&\hat{\varphi}(0) = 1, \\
&\hat{\varphi}^{(l)}(0) = 0 \qquad \forall l = 1, \ldots, N-1, \\
&\hat{\psi}^{(l)}(0) = 0 \qquad \forall l = 0, \ldots, N-1.
\end{aligned}$$

En imposant ces dernières conditions et les hypothèses de la proposition 3.4, on peut montrer que la fonction m_0 s'écrit

$$m_0(\xi) = 1 + \left(1 - e^{-i\xi}\right)^N S(\xi),$$

où $S(\xi)$ est un polynôme trigonométrique. Ingrid Daubechies a montré que pour $N = 2K$, m_0 est de la forme

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^{2K} P_1(\xi),$$

où

$$P_1(\xi) = \sum_{k=0}^{K-1} C_{K-1+k}^k \left(\sin^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right)^k + \left(\sin^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right)^K F(\xi),$$

avec $F(\xi)$ polynôme trigonométrique choisi de sorte que la condition (8) soit vérifiée.

Les ondelettes construites à l'aide de ce procédé sont appelées *coiflettes*. On les note CK. Elles vérifient les propriétés suivantes :

1. Supp $\varphi \subset [-2K, 4K-1]$.
2. Supp $\psi \subset [-4K+1, 2K]$.
3. $\int_{\mathbb{R}} x^l \varphi(x)dx = 0 \quad \forall l = 1, \ldots, 2K-1$.
4. $\int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x)dx = 0 \quad \forall l = 0, \ldots, 2K-1$.
5. φ n'est jamais paire.

3.4 En pratique...

Concrètement, on observe un signal f plus ou moins régulier. On a à notre disposition un échantillon de valeurs $f(k\eta)$, où le pas η dépend de la précision du matériel utilisé. Selon la forme du signal et selon ce que l'on veut en faire on choisit une ondelette adaptée. L'algorithme en cascade donne une approximation de φ. On calcule alors les coefficients d'ondelettes du signal f à partir de cette approximation et des valeurs échantillonnées de f.

On assimile f à sa projection sur un espace V_J :

$$f(x) \approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{J,k} \varphi_{J,k}(x).$$

On fera attention cependant à ne pas perdre trop d'informations sur f lors de cette étape : on prendra donc J assez grand. On peut alors apporter le traitement voulu au signal f à travers ses coefficients d'ondelettes.

Le débruitage du signal consiste simplement à projeter de nouveau f sur un espace V_j, $j \leq J$, pour une résolution j adaptée à la forme prévue du bruit (on peut par exemple modéliser le bruit par une variable aléatoire). Selon le choix de φ, cette approximation peut être très régulière. Des calculs théoriques permettent de se donner une idée du changement de résolution à adopter pour obtenir de bons résultats.

Pour la compression du signal, on procède légèrement différemment. On écrit

$$f_J = f_{J-1} + d_{J-1}$$

la décomposition de f_J sur $V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1}$. Les coordonnées de f_{J-1} et d_{J-1} dans les bases de V_{J-1} et W_{J-1} peuvent être calculées grâce à des relations de récurrence similaires à celles utilisées dans l'algorithme en cascade.

Puis on recommence l'opération avec f_{J-1}, f_{J-2}, etc. Au final, l'approximation initiale f_J s'écrit comme la somme d'une approximation grossière de résolution j et de fonctions de détail :

$$f_J = f_j + d_j + d_{j+1} + \cdots + d_{J-1},$$

avec $f_j \in V_j$ et $d_k \in W_k$. L'opération de compression consiste à garder intacts les coefficients de l'approximation grossière et pour chaque niveau de détail, ne garder que les coefficients de grande amplitude.

Références

[1] H. Brezis : *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Dunod, 2005.

[2] I. Daubechies : *Ten lectures on wavelets*, S.I.A.M., 1992.

[3] W. Härdle, G. Kerkyacharian, D. Picard, A. Tsybakov : *Wavelets, Approximation, and Statistical Applications*, Lecture Notes in Statistics, Springer, 1998.

[4] S. Mallat *Une exploration des signaux en ondelettes*, Editions de l'École polytechnique, 2000.

[5] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, J.M. Poggi : *Les ondelettes et leurs applications*, Traité IC2 Information - Commande - Communication, 1993.

[6] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 2005.