Le théorème de la masse positive

Yann Chaubet et Vincent Divol

Table des matières

Introduction

En relativité générale, l'espace-temps est une variété M de dimension 4 munie d'une métrique Lorentzienne g encodant les effets gravitationnels. On considère ainsi que la présence de matière déforme l'espace-temps et la notion de courbure d'une variété est donc primordiale dans ce nouveau cadre.

De manière surprenante, il est très délicat de définir une notion pertinente d'énergie locale dans ce formalisme. Cependant, dans le cas où la variété est asymptotiquement plate, il est possible de définir son énergie totale (ou masse ADM) en considérant le comportement asymptotique, à de grandes distances, des composantes de la métrique. Une question naturelle se pose : cet objet mathématique que l'on vient de créer a-t-il les propriétés physiques que l'on attend de lui ?

Un premier élément de réponse va dans ce sens : si la courbure scalaire de l'espace-temps est partout positive, alors la masse est bien positive. Ce résultat constitue le théorème de la masse positive. Une version plus quantitative du théorème existe : c'est l'inégalité de Penrose. Cette dernière implique non seulement que la masse est positive mais aussi qu'elle est supérieure à la contribution en masse des trous noirs contenus dans l'espace-temps. Elle affirme de plus que le cas d'égalité est atteint uniquement pour un modèle de trou noir particulièrement simple, la solution de Schwarzschild.

Si la théorie de la relativité générale fut crée dès 1915 par Albert Einstein, et fut bientôt suivie par des résultats expérimentaux spectaculaires (dont notamment la fameuse prédiction de l'avance du périhélie de Mercure), ce n'est qu'à partir des années 60 qu'advint ce que Kip Thorne appella «l'âge d'or de la relativité générale». C'est à cette époque, en 1962, que Richard Arnowitt, Stanley Deser et Charles W. Misner créerent le formalisme ADM, dans lequel est défini notre masse (voir [1]). Ce n'est cependant que plus de 15 ans plus tard que Richard Schoen et Shing-Tung Yau [9] réussirent à montrer le théorème de la masse positive pour une variété Riemannienne de dimension

3. Cette preuve utilise des techniques de calculs variationnels appliquées à des surfaces minimales : elle se généralise mal aux dimensions supérieures ou égales à 8 dans lesquelles des surfaces minimales pathologiques peuvent exister. Une preuve plus simple de ce résultat fut trouvée par Edward Witten en 1981 [12]. Celui-ci se place dans le cas où la variété est spinorielle, et est valide en toute dimension.

Bien que conjecturée dès 1973, l'inégalité de Penrose n'a été montrée qu'en 1999 par Hubert Bray [3]. Une preuve partielle avait déjà été crée deux ans plus tôt dans le cas où il n'y avait qu'un unique trou noir dans le système. Une forme plus forte des inégalités de Penrose constitue toujours un problème ouvert : elle affirme que l'inégalité reste vraie non plus si on suppose la courbure scalaire positive, mais sous la condition dominante sur l'énergie .

Les deux premières parties introduiront les formalismes mathématique et physique qui donnent lieu au théorème de la masse positive et à l'inégalité de Penrose. Nous présenterons ensuite l'article de George Lam [6] qui donne une démonstration élémentaire de ces résultats dans le cas où les variétés sont des graphes de fonctions lisses sur $\mathbb{R}^n$, éventuellement privé d'un compact.

Chapitre 1

Préliminaires

Toutes les variétés considérées dans la suite sont $\mathcal{C}^\infty$, complètes, et séparables. Nous utilisons la convention de sommation des indices répétés (ou convention d'Einstein), à savoir que l'apparition de deux indices, l'un en haut et l'autre en bas, indique une somme. L'essentiel de ce chapitre est basé sur le livre de John M. Lee [7].

1.1 Tenseurs et champs de tenseurs sur une variété

1.1.1 Tenseurs

Définition 1.1. Un *tenseur* T de type (k,l), dit k fois contravariant et l fois covariant, sur un espace vectoriel V, est une application multilinéaire

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ facteurs}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ facteurs}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On note $T^k_l(V)$ l'espace des tenseurs (k,l) sur V.

Définition 1.2. Le *produit tensoriel* de deux tenseurs $F \in T^k_l(V)$ et $G \in T^{k'}_{l'}(V)$, $F \otimes G \in T^{k+k'}_{l+l'}(V)$ est défini par

$$F \otimes G(w^1, \cdots, w^{l+l'}, X_1, \cdots, X_{k+k'}) = F(w^1, \cdots, w^l, X_1, \cdots X_k) G(w^{l+1}, \cdots, w^{l+l'}, X_{k+1}, \cdots X_{k+k'}).$$

Soit $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de V et $(e^k)_{1 \leq k \leq n}$ sa base duale. On peut identifier V et V^{**} via $X \mapsto (w \mapsto w(X))$ qui est un isomorphisme. Les éléments de la forme

$$e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k},$$

où $j_p, i_q \in \{1, \cdots, n\}$, forment alors une base de $T_l^k(V)$. En adoptant les notations d'Einstein, un tenseur $T \in T_l^k(V)$ peut s'écrire

$$T = T_{i_1 \cdots i_k}^{j_1 \cdots j_l} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}.$$

On définit la contraction selon la paire d'indice (i, j) $(1 \leq p \leq k, 1 \leq q \leq l)$ d'un tenseur F de type (k, l) :

$$(tr_{(p,q)} F)_{i_1 \cdots i_{k-1}}^{j_1 \cdots j_{l-1}} = F_{i_1 \cdots m \cdots i_{k-1}}^{j_1 \cdots m \cdots j_{l-1}},$$

où l'indice m est placé en position q (en haut) et p (en bas). L'objet $tr_{(p,q)} F$ est alors un tenseur de type $(k-1, l-1)$.

1.1.2 Champs tensoriels

Soit M une variété. Si U est un ouvert de M et $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ est une carte, on identifiera U et $\phi(U)$, chaque point de $p \in U$ correspondant à ses coordonnées $(x^1, \cdots, x^n) = \phi(p)$ dans $\mathbb{R}^n$. L'espace tangent en x sera vu comme l'espace vectoriel engendré par les «dérivées directionnelles» subordonnées à un choix de coordonnées locales $\phi = (x^i)$ sur un voisinage de p (avec $\phi(p) = (0, \cdots, 0)$) : une base de T_pM est constituée des $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \phi)(0)$. Un champ vectoriel X agit alors sur $f \in \mathcal{C}^\infty$ via $X \cdot f = X^i \partial_i f$. Si on note (dx^i) la base duale de (∂_i), les éléments de la forme

$$dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_l} \otimes \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k}$$

forment une base de $T_l^k(T_pM)$, subordonnée à ϕ.

Nous noterons dans tout ce qui suit, pour toute fonction lisse h sur une variété : $h_p = \partial_p h = \partial h / \partial x^p$, où le choix des coordonnées aura été spécifié.

Définition 1.3. Un *fibré vectoriel* (lisse) de dimension k est la donnée de deux variétés, E (l'espace total), et M (la base), et d'une application surjective $\pi : E \to M$ (la projection), vérifiant :

(i) Les ensembles $E_p = \pi^{-1}(p)$, pour $p \in M$, sont des espaces vectoriels.

(ii) Pour tout $p \in M$, il existe un voisinage U de p dans M et un difféomorphisme $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, une *fibration localement triviale*, c'est à dire que si π_1 est la projection sur le premier facteur, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(iii) La restriction de ϕ à chaque fibre est un isomorphisme $E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$.

Définition 1.4. Si $\pi : E \to M$ est un fibré vectoriel sur M, une *section* (lisse) de E est une application lisse (en tant qu'application entre variétés) $F : M \to E$ vérifiant $\pi \circ F = \mathrm{id}_M$.

Les ensembles

$$T^k_l M := \coprod_{p \in M} T^k_l(T_p M)$$

sont naturellement munis de la structure de fibré vectoriel sur M via l'application $F \in T^k_l(T_p M) \mapsto p \in M$.

Définition 1.5. Un *champ de tenseur*, ou champ tensoriel, (lisse) de type (k, l) est une section (lisse) de $T^k_l M$.

Un champ de tenseurs est donc une application T telle que $T(p) \in T^k_l(T_p M)$ pour tout $p \in M$. Son caractère lisse équivaut à ce que, si l'on choisit un système de coordonnées locales (x^i), les coordonnées $T^{j_1 \cdots j_l}_{i_1 \cdots i_k}$ de T dans la base induite par (x^i) soient lisses. On notera $\mathcal{T}^k_l(M)$ l'ensemble des champs tensoriels lisses de type (k, l), et $\mathcal{T}(M) = \mathcal{T}^1(M)$. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 1.1 (Lemme de caractérisation des champs tensoriels)**.** *Toute application*

$$\tau : \mathcal{T}^1(M) \times \cdots \times \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}(M) \times \cdots \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

est induite par un champ tensoriel de type (k, l)*. Similairement, une application*

$$\tau : \mathcal{T}^1(M) \times \cdots \times \mathcal{T}^1(M) \times \mathcal{T}(M) \times \cdots \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

est induite par un tenseur de type $(k, l+1)$ *si et seulement si elle est multilinéaire sur* $\mathcal{C}^\infty(M)$*.*

1.2 Un peu de géométrie Riemannienne

On introduit dans cette section la notion de variété riemannienne, suivie de celle de connexion. Nous définirons finalement le tenseur de Riemann, ou tenseur de courbure.

1.2.1 Variété Riemannienne

Définition 1.6. Une *métrique* g sur une variété M est un champ tensoriel lisse de type $(2,0)$ sur M, défini positif en tout point. Le couple (M,g) est alors appelé variété Riemannienne. Pour $p \in M$ et $X, Y \in T_pM$, on notera $g|_p(X,Y) = \langle X, Y \rangle$.

Autrement dit, une métrique g est la donnée, en chaque point $p \in M$, d'un produit scalaire sur T_pM. Si (x^i) est un système de coordonnées local, on peut écrire $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Puisque g est symétrique définie positive, on a $g_{ij} = g_{ji}$. De plus, la matrice (g_{ij}) admet un inverse que l'on note (g^{ij}). On note $dx^i dx^j = \frac{dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i}{2}$, ce qui compte tenu de la symétrie de g, permet d'écrire

$$g = g_{ij} dx^i dx^j.$$

On peut utiliser la métrique pour «lever» ou «baisser» les indices d'un tenseur : par exemple, si $T \in \mathcal{T}_0^2$, on notera $T^i{}_j = g^{il} T_{lj}$.

Plus généralement, la métrique peut être pseudo-Riemannienne (par exemple la métrique Lorentzienne $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$). La métrique sur la variété caractérise sa géométrie ; un exemple simple est celui de la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$:

$$\sum (dx^i)^2,$$

qui correspond à $g_{ij} = \delta_{ij}$. Deux variétés Riemanniennes auront la même géométrie si elles sont isométriques, au sens suivant :

Définition 1.7. Deux variétés Riemanniennes (M,g) et $(\tilde{M}, \tilde{g})$ sont dites *isométriques* s'il existe un difféomorphisme $\phi : M \to \tilde{M}$ tel que si $p \in M$, on ait pour tous $X, Y \in T_pM$ la relation $g|_p(X,Y) = \tilde{g}|_{\phi(p)}(\mathrm{d}\phi_p(X), \mathrm{d}\phi_p(Y))$, ce que l'on notera $\tilde{g} = \phi_* g$.

On peut évidemment étendre l'opérateur «push-forward» à n'importe quel champ tensoriel.

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty$, on définit son gradient ∇f par la formule $X \cdot f = \langle \nabla f, X \rangle$, pour tout champ vectoriel X. On a alors dans n'importe quelle carte

$$\nabla f = g^{kl} \partial_k f \partial_l = \partial^l f \partial_l.$$

1.2.2 Connexions

En relativité générale, les chemins empruntés par les corps dans l'espace-temps correspondent aux chemins « les plus courts», que l'on nomme géodésiques. Dans l'espace euclidien, les courbes de plus court chemin sont les lignes droites, qui ont une accélération nulle, c'est à dire une vitesse de dérivée nulle. Pour étendre cette notion aux variétés et définir les géodésiques, on doit donc définir une méthode de différentiation d'un champ vectoriel par rapport à un autre champ de vecteur. Le fait que les vecteurs ne vivent pas dans les mêmes espaces selon le point où on se place sur la variété implique que nous ne pouvons pas différencier au sens usuel. On définit alors une connexion, qui permet, moralement, de «connecter» les espaces tangents de points infiniment voisins.

Définition 1.8. Une *connexion* (linéaire) est une application

$$\begin{array}{rccl} \nabla & : & \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) & \rightarrow & \mathcal{T}(M) \\ & & (X, Y) & \mapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

satisfaisant les points suivants :

(*i*) $\nabla_X Y$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire en X.

(*ii*) $\nabla_X Y$ est $\mathbb{R}$-linéaire en Y.

(*iii*) Règle de Leibniz : pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $X, Y \in \mathcal{T}(M)$:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y.$$

On appelle $\nabla_X Y$ la dérivée covariante de Y dans la direction de X.

Nous pouvons caractériser la connexion par son action sur les vecteurs coordonnées :

Définition 1.9. Les *symboles de Christoffel* Γ^k_{ij}, subordonnés à une carte de M, sont définis par

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k.$$

Définition 1.10. On dit que la connexion est *symétrique* ou *sans torsion* si elle vérifie $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ pour tous champs vectoriels.

Etant donné une connexion, nous pouvons construire une unique dérivée covariante sur tous les champs tensoriels (toujours dans la direction d'un champ vectoriel), qui coïncide avec la première sur $\mathcal{T}(M)$, telle que :

(i) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ (un champ tensoriel de rang $(0,0)$), on a

$$\nabla_X f = Xf.$$

(ii) Règle de Leibniz (version produit tensoriel) : pour F et G deux champs tensoriels,

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G).$$

(iii) Si tr désigne la contraction selon n'importe quelle paire d'indice,

$$\nabla_X(trY) = tr(\nabla_X Y).$$

Si F est un champ de tensoriel de type (k,l), l'application $\nabla F : X \mapsto \nabla_X F$ est une application qu'on identifie par le lemme 1.1 à un tenseur de type $(k+1,l)$. Nous avons $\nabla F(w^1, \cdots, w^l, Y_1, \cdots, Y_k, X) = \nabla_X F(w^1, \cdots, w^l, Y_1, \cdots, Y_k)$. On définit alors les coefficients $F^{j_1 \cdots j_l}_{i_1 \cdots i_k;m}$ dans une carte par la formule

$$\nabla F = F^{j_1 \cdots j_l}_{i_1 \cdots i_k;m} \partial_{j_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes dx^m.$$

Pour un champ de vecteurs Y, on vérifie que

$$Y^k_{;i} = \partial_i Y^k + \Gamma^k_{ij} Y^j.$$

1.2.3 Géodésiques

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to M$ est une courbe, on définit $\mathcal{T}(\gamma)$ l'espace des applications lisses $V : I \to TM$ telles que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ pour tout $t \in I$. La donnée d'une connexion linéaire ∇ sur M permet de définir une unique application $\mathbb{R}$-linéaire d_t de $\mathcal{T}(\gamma)$ dans lui-même qui vérifie la règle de Leibniz suivante : pour $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ et $V \in \mathcal{T}(\gamma)$, $\mathrm{d}_t(fV) = \dot{f}V + f\mathrm{d}_t V$, et qui soit cohérente avec ∇ au sens suivant : s'il existe une extension $\tilde{V} \in \mathcal{T}(M)$ de V, alors $\mathrm{d}_t V(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{V}$.

Si γ est une courbe sur M, on a $\dot{\gamma} \in \mathcal{T}(\gamma)$, et on peut donc définir son accélération (au sens de la connexion ∇), qui est le champ vectoriel $\mathrm{d}_t \dot{\gamma}$, défini le long de γ.

Définition 1.11. Soit ∇ une connexion sur M. Une courbe γ est appelée ∇-*géodésique* si elle vérifie

$$\mathrm{d}_t \dot{\gamma} = 0.$$

Les géodésiques décrivent l'évolution d'un système dans l'espace-temps. On a le théorème suivant, qui donne l'existence et l'unicité (et donc la prédictabilité de l'évolution du système) d'une géodésique pour certaines valeurs initiales.

Théorème 1.1. *Soit M est une variété munie d'une connexion linéaire ∇. Pour tout $p \in M$, $V \in T_pM$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant t_0 et une géodésique $\gamma : I \to M$ telle que $\gamma(t_0) = p$ et $\dot{\gamma}(t_0) = V$. Deux géodésiques vérifiant ces hypothèses coïncident sur leur domaine de définition commun.*

1.2.4 Transport parallèle

On définit la notion de transport parallèle et on énonce un théorème d'existence.

Définition 1.12. Si M est une variété munie d'une connexion ∇, un champ vectoriel V le long d'une courbe γ est dit *parallèlement transporté* (au sens de ∇) si

$$\mathrm{d}_t V = 0.$$

Théorème 1.2. *Si $\gamma : I \to M$ est une courbe, $t_0 \in I$, et si $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, il existe un unique champ vectoriel V transporté parallèlement le long de γ vérifiant $V(t_0) = V_0$.*

Cette définition de transport parallèle correspond bien à l'idée intuitive qui lui est associée : on transporte le vecteur le long d'une courbe de manière à ce qu'il pointe «toujours dans la même direction».

1.3 Connexion de Levi-Civita et tenseur de courbure

1.3.1 Connexion Riemannienne

Sur une variété, il existe plusieurs connexions (autant que de symboles de Christoffel..). En revanche, si la variété dispose d'une métrique g, on peut demander de plus que la connexion soit compatible avec celle-ci.

Définition 1.13. On dit que ∇ est *compatible avec la métrique g* si l'une des propriétés (équivalentes) suivantes est satisfaite :

(*i*) $\nabla g = 0$

(*ii*) $\forall X, Y, Z \in \mathcal{T}(M), \nabla_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

(*iii*) Si γ est une courbe, alors

$$\forall V, W \in \mathcal{T}(\gamma), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, W\rangle = \langle \mathrm{d}_t V, W\rangle + \langle V, \mathrm{d}_t W\rangle .$$

La dérivation au sens usuel dans $\mathbb{R}^n$ induit ainsi une connexion compatible avec la métrique euclidienne. Plus généralement, on a le lemme fondamental de la géométrie Riemannienne :

Théorème 1.3. *Si M est une variété muni d'une métrique Riemannienne (ou pseudo-Riemannienne) g, alors il existe une unique connexion symétrique sur M, qui soit compatible avec g. On appelle cette connexion la connexion Riemannienne de (M, g), ou connexion de Levi-Civita.*

Dans la suite, nous utiliserons toujours, lorsque nous nous placerons sur une variété Riemannienne (M, g), la connexion de Levi-Civita associée, et ceci de manière implicite.

On dispose de la formule suivante dans n'importe quelle carte, pour la connexion Riemannienne :

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}), \tag{1.1}$$

où $g_{pq,r} = \partial_r g_{pq}$.

La raison pour laquelle nous souhaitons imposer que la connexion Riemannienne soit symétrique n'est a priori pas claire. Cependant, outre le fait que cette propriété supplémentaire donne l'unicité d'une telle connexion, elle joue un rôle clé dans la preuve du résultat suivant, qui assure le bon comportement des connexions de Levi-Civita avec les isométries :

Proposition 1.1. *Si $\varphi : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ est une isométrie et si on note ∇ et $\tilde{\nabla}$ les connexions Riemanniennes associées, alors pour tous champs de vecteurs X et Y sur M, on a :*

(i) $\varphi_*(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{\varphi_* X}(\varphi_* Y)$.

(ii) φ envoie géodésiques sur géodésiques.

Définissons l'opérateur de divergence pour un 2-tenseur. Cette définition se généralise au cas de tenseurs généraux, mais nous n'en avons pas l'utilité dans ce texte.

Définition 1.14. Si T est un tenseur de type $(2, 0)$, le tenseur $\operatorname{div}^g T$ est un tenseur de type (1,0) défini en coordonnées par la formule :

$$(\operatorname{div}^g T)_i = T_{ij}^{;j} = g^{kj} T_{ij;k}.$$

1.3.2 Tenseur de Riemann

Intéressons-nous maintenant à définir rigoureusement la courbure d'une variété. Qu'est-ce qui fait qu'un espace est courbe ? Dans un espace euclidien, si on transporte parallèlement un vecteur le long d'un lacet, on s'attend à retrouver le vecteur d'origine. Il est facile de se convaincre que ce n'est plus le cas quand on se place sur la sphère. Ainsi, la courbure d'une variété se manifeste par la manière dont un vecteur transporté parallèlement le long d'un lacet a été modifié. Il est cependant plus commode d'introduire la définition de la courbure en terme de dérivée covariante :

Définition 1.15. *L'endomorphisme de courbure (de Riemann)* est l'application $R : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ définie par

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

où $[X,Y]$ désigne le crochet de Lie de X et Y.

Cette endomorphisme est multilinéaire sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ et induit donc un tenseur par le lemme 1.1. On peut donc définit localement les coordonnées de R subordonnées à une carte :

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}{}^l \partial_l.$$

Les coefficients de R se calculent selon la règle

$$R_{ijk}{}^l = \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} + \Gamma^l_{jk,i} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm} - \Gamma^l_{ik,j}. \tag{1.2}$$

Le lien entre cette définition qui fait intervenir le défaut de commutativité des doubles dérivées covariantes et notre motivation originelle peut paraître faible. Nous invitons le lecteur à consulter le livre de Robert M. Wald [11] pour plus précision.

Définition 1.16. On définit le tenseur de courbure Rm par

$$\mathrm{Rm}(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y,Z), W\rangle.$$

Autrement dit, en coordonnées : $\mathrm{Rm}_{ijkl} \overset{not}{=} R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}{}^m$.

Nous énonçons quelques propriétés de symétrie du tenseur de Riemann.

Proposition 1.2. *En coordonnées, les composantes du tenseur de courbure satisfont*

(i) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$

(ii) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$

(iii) $R_{ijkl} = R_{klij}$

(iv) $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$.

On donne aussi l'identité de Bianchi dite différentielle :

Proposition 1.3. *Nous avons en coordonnées*

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0.$$

Nous introduisons le tenseur de Ricci, qui interviendra dans les équations d'Einstein.

Définition 1.17. Le *tenseur de Ricci* est défini par $\mathrm{Ric} = tr_{(1,4)}R$. Autrement dit, en coordonnées,

$$\mathrm{Ric}_{ij} \overset{not}{=} R_{ij} = R_{kij}{}^{k}.$$

Définition 1.18. La *courbure scalaire* S est définie par

$$S = R_i^i = g^{ij} R_{ij}.$$

Un calcul direct avec la formule 1.2 donne

$$S = g^{ij} \left(\Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{kl} + \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^l_{kj}\Gamma^k_{il} - \Gamma^k_{kj,i} \right). \tag{1.3}$$

1.4 Hypersurfaces de M et seconde forme fondamentale

Nous considérons dans cette sous-section le cas des hypersurfaces de l'espace euclidien (c'est-à-dire des sous-variétés de dimension n). Nous introduisons la notion de seconde forme fondamentale, et définissons la notion de courbure moyenne. On note g la métrique de M et on fixe une hypersurface Σ de M. On note $\overline{g}$ la métrique induite par g sur Σ, ∇ la connexion de Levi-Civita sur M, et $\overline{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique $\overline{g}$ sur Σ. Notons $TM|_\Sigma = \coprod_{p\in\Sigma} T_pM$, qui est un fibré vectoriel sur Σ. En chaque point de Σ, on peut écrire $T_pM = T_p\Sigma \oplus (T_p\Sigma)^\perp$ (au sens de la métrique g). On note alors $N\Sigma = \coprod_{p\in\Sigma} N_p\Sigma$ le fibré normal, où $N_p\Sigma = (T_p\Sigma)^\perp$, et $\pi^\perp : TM|_\Sigma \to N\Sigma$, $W \mapsto W^\perp$ la projection canonique (qui est bien sûr lisse).

Par convention, dans un système de coordonnées adapté, nous considérerons que les lettres grecques parcourent l'ensemble des coordonnées de M, tandis que les latines ne parcourent que les coordonnées relatives à Σ.

Dans la suite, on considère que Σ est une surface orientée (c'est-à-dire qu'il existe une section ν de $TM|_\Sigma$ qui ne s'annule pas, telle que $\nu(p) \perp T_p\Sigma$ pour tout p de Σ.). On choisira ν de sorte que $\langle \nu, \nu \rangle = 1$.

Définition 1.19. La *seconde forme fondamentale* K de Σ est définie, pour X, Y deux champs de vecteurs sur Σ, par

$$K(X,Y)\nu = (\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y})^{\perp},$$

où $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont des extensions arbitraires de X et Y à M, et ν est le champ de normales associé à l'orientation de Σ.

On peut montrer que K ne dépend pas des extensions choisies, qu'elle est bilinéaire en X et Y sur $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, et qu'elle est symétrique en X et Y ; en outre, K fait le lien entre ∇ et $\overline{\nabla}$, ce qui se traduit par le lemme suivant :

Lemme 1.2. *On a la formule suivante, pour X et Y deux champs de vecteur sur Σ, étendus arbitrairement sur M :*

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y + K(X,Y)\nu.$$

Par définition de la connexion de Levi-Civita, on a l'identité de Weingarten, pour tous champs vectoriels X et Y de $T\Sigma$ étendus arbitrairement :

$$K(X,Y) = -\left\langle \nabla_X \nu, Y \right\rangle.$$

Comme K est bilinéaire symétrique, on peut trouver en tout point p une base g-orthonormée de $T_p\Sigma$, telle que K s'écrive pour $X, Y \in T_p\Sigma$:

$$K(X,Y) = \sum_i \kappa_i X^i Y^i,$$

où les κ_i sont les valeurs propres de K au point p.

Définition 1.20. Les fonctions κ_i sont appelées *courbures principales* de Σ. La *courbure moyenne* de Σ est

$$H_\Sigma = \mathrm{tr}_{\overline{g}}(K) = \kappa_1 + \cdots + \kappa_n.$$

Soit $\nu \in N\Sigma$ orienté canoniquement, de norme 1. On a pour $X, Y \in T\Sigma$ étendus arbitrairement à M : $K(X,Y) = \langle \nabla_X Y, \nu \rangle$. Dans un système de coordonnées où $\partial_0 \perp T\Sigma$ orienté canoniquement (et donc $\nu^i = 0$ et $\nu^0 = (g^{00})^{1/2}$, de sorte que $g_{0j} = 0$),

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, \nu \rangle &= \nabla_X \underbrace{\langle Y, \nu \rangle}_{0} - \langle \nabla_X \nu, Y \rangle \\
&= -\langle \Big(X^\alpha \partial_\alpha \nu^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\rho} X^\alpha \nu^\rho \Big) \partial_\beta, Y^\gamma \partial_\gamma \rangle \\
&= -\langle \Big(X^i \partial_i \nu^\beta + \Gamma^\beta_{i0} X^i \nu^0 \Big) \partial_\beta, Y^j \partial_j \rangle \\
&= -g_{\beta j}(X^i Y^j \partial_i \nu^\beta + X^i Y^j \Gamma^\beta_{i0} \nu^0) \\
&= -\underbrace{g_{0j}}_{0} X^i Y^j \partial_i \nu^0 - g_{jk} \Gamma^k_{i0} \nu^0 X^i Y^j
\end{aligned}$$

de sorte que $K_{ij} = -g_{kj}\Gamma^k_{i0}\nu^0$. Par suite, $H_\Sigma = g^{ij}K_{ij}$ donne

$$H_\Sigma = -\Gamma^i_{i0}\sqrt{g^{00}}. \tag{1.4}$$

Chapitre 2

Quelques éléments de relativité générale

Nous introduisons ici les concepts de base de la relativité générale qui s'avèrent être fondamentaux pour comprendre les origines et les enjeux du théorème de la masse positive. Notons d'autre part que la plupart des résultats théoriques de la première partie peuvent être appliqués mutatis mutandis aux variétés Lorentziennes et donc au cadre de ce chapitre. De plus, les différentes constantes physiques c et $\mathcal{G}$ sont fixées à 1 afin de simplifier les différentes expressions. Cette section s'appuie essentiellement sur le livre de Robert M. Wald [11] et sur le cours de Jérémie Szeftel [10].

2.1 La relativité restreinte

La physique Newtonienne part d'un certain nombre d'idées intuitives : la possibilité théorique d'aller à une vitesse arbitrairement grande et la notion de temps absolu. Ainsi, pour un événement $p_0 = (t_0, x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^4$, le futur de p est défini comme $\{p \mid t_p > t_0\}$ et on peut de même définir son passé et son présent. Cette description naïve de l'espace-temps entre en contradiction avec les postulats de base de la théorie de l'électromagnétisme qui considèrent c la vitesse de la lumière comme une constante absolue, ne dépendant pas du référentiel dans lequel elle est mesurée.

La relativité restreinte intervient pour résoudre ces conflits. En plus de l'hypothèse précédente sur c, on considère que le temps est relatif et dépend de l'observateur. Comme la vitesse c ne peut être dépassée, l'ensemble des événements p pouvant être atteints dans le futur de p_0 est décrit par $\{p = (ct, x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq c^2(t - t_0)^2\}$, que l'on appelle le cône du futur de p_0.

La quantité $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ apparaît ici naturellement. C'est une métrique Lorentzienne sur $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire telle que, en tout point, la forme bilinéaire symétrique associée est de signature (1,3). On l'appelle métrique de Minkowski, et on la note ici η.

Définition 2.1. Un vecteur X est :

- de genre *espace* si $\eta(X, X) \geq 0$
- de genre *lumière* si $\eta(X, X) = 0$
- de genre *temps* si $\eta(X, X) \leq 0$.

Une courbe ou plus généralement un sous-espace est dit de genre espace (respectivement lumière ou temps) si tous ses vecteurs tangents sont de genre espace (respectivement lumière ou temps).

On s'intéressera souvent en relativité à des isométries, c'est-à-dire à des difféomorphismes ϕ tels que $\phi^*\eta = \eta$. Il faut penser à ces objets comme à des changements de référentiel : les translations spatio-temporelles sont par exemple des isométries pour la métrique de Minkowski.

On peut redéfinir la plupart des notions de mécanique et d'électromagnétisme dans ce nouveau formalisme. A titre d'exemple, définissons la 4-vitesse u d'une particule. Cette dernière décrit une courbe de genre temps dans l'espace-temps et la 4-vitesse est le champ de vecteur tangent à cette courbe, orienté vers le futur, tel que $\eta(u, u) = -1$. La présence de matière est elle décrite par un tenseur symétrique (2,0), le tenseur énergie-impulsion T : si v et w sont des 4-vitesses, alors $T(v, w)$ est la densité de flux d'énergie dans la direction v telle que mesurée par un observateur se déplaçant à la vitesse w.

Cette nouvelle théorie donne un cadre formel satisfaisant à la théorie de l'électromagnétisme. Elle reste cependant incompatible avec la théorie Newtonienne de la gravitation, qui permet à deux objets distants d'agir l'un sur l'autre instantanément. C'est pour résoudre ce problème qu'Einstein proposa en 1915 sa théorie de la relativité générale.

2.2 La relativité générale et l'équation d'Einstein

On ne considère plus que l'espace-temps est décrit par $(\mathbb{R}^4, \eta)$, mais plus généralement par une variété Lorentzienne de dimension 4, (M, g), les définitions utilisant la métrique de Minkowski se généralisant immédiatement à une métrique Lorentzienne quelconque. Le concept de force gravitationnelle disparaît : la gravitation devient une déformation de l'espace-temps, cette déformation étant codée dans la métrique. Plus formellement, le principe d'équivalence postule :

- Un corps en chute libre dans un champ gravitationnel se déplace selon une géodésique de genre temps.
- Un photon dans un champ gravitationnel se déplace selon une géodésique de genre lumière.

Notre objectif est désormais de trouver une équation reliant la métrique de l'espace-temps à la matière et à l'énergie qu'il contient. Une idée est de partir des équations connues en faible gravitation, c'est-à-dire dans le cas Newtonien, puis essayer de les traduire dans le cadre plus général dans lequel nous nous plaçons. Regardons donc comment deux particules proches agissent l'une sur l'autre. Si on note ϕ le potentiel gravitationnel et $\vec{x}$ la position relative entre les deux particules, leur accélération relative est :

$$-(\vec{x} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{\nabla}\,\phi.$$

Puisque les corps soumis uniquement à la gravitation suivent des géodésiques, l'équivalent en relativité générale de cette quantité sera l'accélération relative entre deux géodésiques très proches. Donnons nous donc une famille continue de géodésiques γ_s, toutes étant définies sur un intervalle I fixé. L'ensemble de ces géodésiques forme une variété Σ de dimension 2. L'application $(t, s) \longmapsto \gamma_s(t)$ constitue une paramétrisation naturelle de Σ. Le champ de vecteurs $V = \partial_t$ représente alors la vitesse d'une particule et $X = \partial_s$ la position relative entre deux géodésiques infinitésimalement proches. La quantité $u = \nabla_V X$ mesure comment évolue la distance entre deux géodésiques avec le temps. L'accélération $a = \nabla_V u$ est donc la quantité que l'on recherche. Le crochet de ∂_s et ∂_t est nul. Par symétrie, il vient donc $\nabla_X V = \nabla_V X = \Gamma^s_{st}\partial_s + \Gamma^t_{st}\partial_t$, et :

$$\begin{aligned} a &= \nabla_V(\nabla_V X) = \nabla_V(\nabla_X V) \\ &= R(V, X)V + \nabla_X(\nabla_V V) \\ &= R(V, X)V, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que $\nabla_V V = 0$, puisque V est tangent à une famille de géodésiques.

Notre analogie donne alors :

$$R_{ijk}{}^{l} V^i X^j V^k \longleftrightarrow -x^j \partial_j \partial^l \phi$$
$$R_{ijk}{}^{l} V^i V^k \longleftrightarrow -\partial_j \partial^l \phi$$

Que sait-on d'autre sur le potentiel gravitationnel ϕ ? Il est relié à la densité de masse définie par $\rho = T_{ij} V^i V^j$ par l'équation de Poisson : $\Delta\phi = 4\pi\rho$. On est donc amené à poser $-R_{ijk}{}^{j} V^i V^k = 4\pi T_{ij} V^i V^j$, et ce qui mène à $\mathrm{Ric} = 4\pi T$. C'est d'abord à cette équation qu'avait pensé Einstein. Cependant, elle pose de sérieux problèmes. En effet, la conservation locale de l'énergie de la matière s'écrit $\mathrm{div}^g T = 0$, et d'autre part, l'identité de Bianchi différentielle implique que $\mathrm{div}^g \mathrm{Ric} = \frac{1}{2}\nabla S$, soit encore $\mathrm{div}^g(\mathrm{Ric} - \frac{1}{2} g S) = 0$ où S est la courbure scalaire. Ainsi, notre équation implique $\nabla S = 0$, et donc la courbure scalaire est constante à travers l'espace-temps, ce qui conduit à une situation hautement non physique.

Cependant, on peut éviter ce problème en remplaçant notre première équation par l'équation d'Einstein :

$$G = \mathrm{Ric} - \frac{1}{2} g S = 8\pi T. \tag{2.1}$$

Par construction, les termes de gauche et de droite de l'égalité ont une divergence nulle. Il n'y a donc plus de contradiction à ce niveau là. D'autre part, en prenant la trace dans cette égalité, on trouve $S = -8\pi\ tr(T)$ et donc

$$\mathrm{Ric} = 8\pi(T - \frac{1}{2} g\ tr(T)).$$

Dans le cadre Newtonien, on a $tr(T) \approx -\rho$ et on retrouve la première équation obtenue qui s'avère fausse dans le cadre général.

2.3 La solution de Schwarzschild

Il est bien évidemment très délicat de résoudre l'équation d'Einstein de manière générale. Karl Schwarzschild, en 1916, fut le premier à en proposer une solution dans un cadre restreint. On cherche la métrique correspondant au champ gravitationnel d'un corps statique à symétrie sphérique. La solution possède alors une forme particulière simple et agréable à étudier. La métrique de Schwarzschild constituera donc un cas non trivial sur lequel vérifier la validité de nos futurs résultats. Donnons plus de précision quant à la staticité :

Définition 2.2. Un espace-temps est dit *statique* s'il possède :

(*i*) un groupe d'isométries $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ dont les orbites sont des courbes de genre temps.

(*ii*) une hypersurface fermée Σ de genre espace, l'espace des données initiales, qui est orthogonale aux orbites des isométries $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

La famille d'isométrie (ϕ_t) peut être vue comme le flot d'un certain champ de vecteur ξ, que l'on appelle un champ de Killing. Nous supposerons que notre espace-temps est causal, c'est à dire que deux points assez proches d'une hypersurface de genre espace ne pourront être liés par une courbe de genre temps. Dans ces conditions, il sera possible de trouver, si ξ ne s'annule pas sur Σ, un voisinage V de Σ dans M tel que $\xi|_V \neq 0$, et chaque point de $V \cap \Sigma$ se trouve sur une unique orbite du groupe d'isométrie. Une bonne manière de paramétrer localement l'espace-temps est alors de se donner des coordonnées (x^i) sur $V \cap \Sigma$ (quitte à prendre V plus petit) et de repérer un point p proche de Σ par le temps t qu'il a fallu pour l'atteindre en parcourant l'orbite à laquelle il appartient à partir de Σ. Comme ξ est orthogonal à Σ, il l'est aussi à Σ_t, l'ensemble des points de coordonnée temporelle t. La métrique g prend une expression simplifiée dans ce système de coordonnées :

$$\mathrm{d}s^2 = \xi^\alpha \xi_\alpha \mathrm{d}t^2 + h_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j,$$

où la somme sur les i et j portent uniquement sur les indices spatiaux. On a ainsi traduit le découplage du temps et de l'espace. La paramétrisation de Σ deviendra globale grâce aux hypothèses de symétrie sphérique.

Définition 2.3. Un espace-temps est dit *à symétrie sphérique* s'il possède un groupe d'isométrie isomorphe à $SO(3)$ dont les orbites sont difféomorphes à des sphères de dimension 2.

Ce groupe d'isométrie est bien entendu à penser comme un groupe de rotation qui laisse invariant notre système. Par symétrie sphérique, chacune des orbites de $SO(3)$ est caractérisée par son aire A. On pose $r = (A/4\pi)^{\frac{1}{2}}$ et la métrique restreinte à chaque sphère s'écrit dans des coordonnées sphériques

$$\mathrm{d}s^2 = r^2(\mathrm{d}\theta^2 + sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2).$$

Prenons cependant garde à ne pas se méprendre : les orbites n'ont ni centre ni rayon ; ces dernières sont simplement difféomorphes à des sphères et on rappelle qu'un système de coordonnées correspond simplement à une carte dans laquelle est vue notre variété.

Dans le cadre qui nous intéresse, l'espace-temps est à la fois stationnaire et à symétrie sphérique. On peut alors construire un système de coordonnées particulièrement agréable à manipuler. Remarquons tout d'abord que, si on le suppose unique, le champ de Killing ξ doit être invariant sous toutes les rotations. Cela force ξ à être orthogonal aux orbites sphériques. Ainsi, chaque sphère est incluse dans une certaine hypersurface Σ_t. On peut donc munir une sphère arbitraire de Σ de coordonnées sphériques (θ, ϕ), transporter ces coordonnées à l'ensemble des sphères de Σ via des géodésiques radiales et enfin choisir des coordonnées (r, θ, ϕ) sur Σ. En rajoutant le paramètre temporel pour paramétrer l'espace-temps entier, on trouve que la métrique a la forme bien plus pratique à étudier :

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + h(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2,$$

où $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2$. Ce travail n'aura donc pas été vain : nous sommes passés de seize fonctions inconnues $g_{\mu\nu}$ dépendant de quatre variables à deux fonctions f et h dépendant d'une unique variable. On peut désormais résoudre l'équation d'Einstein dans le vide, c'est-à-dire avec $T = 0$. Cette situation correspond à la présence d'un trou noir sans rotation à l'origine de notre système. Après de longs calculs, on trouve :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 + \frac{C}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2,$$

où C est une constante à déterminer. La valeur de C peut être trouvée en regardant le comportement de la métrique à une très grande distance de l'origine. La métrique devenant alors proche de celle de Minkowski, on peut, en étudiant comment évolue un corps en faible gravitation, trouver que la constante vaut $C = -2M$, où M est la masse totale d'un corps qui se trouverait au centre de notre système. La forme finale de la métrique de Schwarzschild est donc :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{2.2}$$

Deux singularités semblent apparaître dans cette forme, en $r = 2M$ et en $r = 0$. S'il s'avère que la singularité en $r = 2M$ est effaçable et provient uniquement d'un mauvais système de coordonnées, l'origine se trouve être une véritable singularité : la courbure diverge lorsqu'on s'y approche. On retrouve ici l'idée de la présence d'un trou noir à l'origine de notre système. De plus, on peut montrer que si un photon ou une particule en chute libre, qui parcourt donc une géodésique de genre lumière ou espace, rencontre la zone $\{r \leq 2M\}$, alors il ne pourra jamais en sortir. Nous verrons plus tard que la solution de

Schwarzschild décrit alors un trou noir de rayon $R_s = 2M$. L'hypersurface de séparation $r = 2M$ s'appelle l'horizon du trou noir. La relation entre le rayon de l'horizon et la masse du trou noir est au coeur des inégalités de Penrose et on reparlera de ce sujet en détail à la dernière partie.

La métrique de Schwarzschild prend une autre forme si on ne se limite plus au vide. On peut par exemple s'intéresser à un fluide parfait, modélisant par exemple une étoile, dont le tenseur énergie-impulsion s'écrit $T_{ij} = \rho u_i u_j + P(g_{ij} + u_i u_j)$. Les quantités ρ et P sont respectivement la densité massique et la pression du fluide au repos. Le champ de vecteur u représente la 4-vitesse du fluide en un point de l'espace-temps. On demande de plus, pour des raisons de compatibilité avec la métrique, à ce qu'il soit colinéaire au champ de Killing associé à notre groupe d'isométries temporelles. La métrique de Schwarzschild s'écrit alors :

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{2\phi}\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2,$$

où $m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2\mathrm{d}r'$ et ϕ est déterminé par une certaine équation différentielle. Dans le cas d'une étoile, on a $\rho(r) = 0$, $P(r) = 0$ pour $r \geq R$, le rayon de l'étoile. Dans ce cas là, la masse de l'étoile peut être défini comme $M = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2\mathrm{d}r$ et la métrique à l'extérieur de l'étoile sera la même que celle trouvée dans le vide. Notons que ceci ne rentre pas en contradiction avec le fait que la métrique de Schwarzschild dans le vide décrive un trou noir de rayon $R_s = 2M$. En effet, en pratique, $R_s \ll R$ et ce n'est donc pas la solution dans le vide qui apparaît dans la zone $r \leq R_s$ correspondant au trou noir.

On peut montrer que, à rayon R fixé, il existe essentiellement deux comportements. Si la masse de l'étoile est suffisamment petite, l'étoile atteindra l'équilibre en devenant une naine blanche ou une étoile à neutrons. Dans le cas contraire, l'équilibre ne sera jamais atteint. L'étoile subira alors un effondrement gravitationnel et deviendra à terme un trou noir. Cette dichotomie constitue une "réciproque" aux inégalités de Penrose qui seront discutées plus loin. Ces dernières affirment que la masse d'un trou noir doit être suffisamment grande par rapport à son aire, tandis qu'ici, on affirme que si la masse d'une étoile est trop grande par rapport à son aire, elle s'effondrera en un trou noir.

2.4 Les équations de contraintes

Comme nous l'avons vu dans le cadre d'espaces-temps statiques, on est souvent amené à se donner un espace de données initiales Σ. L'équation d'Einstein est alors vue comme un problème d'évolution temporelle. Comme le tenseur g est symétrique, elle constitue un système de 10 équations non linéaires du second ordre. Ces équations étant tensorielles, elles doivent de plus bien se comporter vis-à-vis des difféormorphismes. Ceci indique que ces équations ne sont pas indépendantes et qu'on a en réalité seulement 6 degrés de liberté. Il est légitime de penser qu'alors, si l'on se donne une métrique initiale $\overline{g}$ sur Σ et sa tendance d'évolution à $t = 0$, il existera un unique espace-temps Lorentzien (M, g) satisfaisant les équations d'Einstein tel que $g_\Sigma = \overline{g}$.

Définition 2.4. On appelle *données de Cauchy* pour les équations d'Einstein dans le vide un triplet $(\Sigma, \overline{g}, K)$ où

(i) Σ est une variété orientable de dimension 3.

(ii) $\overline{g}$ est une métrique Riemannienne sur Σ.

(iii) K est un 2-tenseur symétrique sur Σ.

Le *problème de Cauchy* associé consiste à trouver une variété Lorentzienne de dimension 4 (M, g), tel que

(i) Σ est une hypersurface de genre temps de M.

(ii) $\overline{g}$ est la métrique induite par g sur Σ.

(iii) K est la seconde forme fondamentale de l'hypersurface Σ.

(iv) g vérifie l'équation d'Einstein dans le vide.

Une question se pose : des donneés de Cauchy $(\Sigma, \overline{g}, K)$ étant fixées arbitrairement, existe-t-il une solution au problème de Cauchy associé ? Cette solution, sous réserve d'existence, est-elle unique ? Bien que, comme nous l'avons dit, on est en présence d'un problème avec six degrés de liberté que fixent justement les données initiales de Cauchy, l'équation d'Einstein impose des conditions sur la manière dont doivent être reliées ces différentes données. On appelle ces conditions les équations de contraintes. Commençons par une formule qui nous permettra de trouver ces équations.

Théorème 2.1 (L'équation de Gauss)**.** *Soit (M, g) une variété Lorentzienne et Σ une hypersurface orientable de genre espace de M. On notera avec une barre la restriction d'une quantité à Σ. Si K est la seconde forme fondamentale de Σ et ν le champ des normales à Σ orienté vers le futur, alors, pour tout champ de vecteurs X, Y, Z, W de Σ, que l'on étend arbitrairement à M, on a l'équation de Gauss :*

$$Rm(X, Y, Z, W) = \overline{Rm}(X, Y, Z, W) + K(X, W)K(Y, Z) - K(X, Z)K(Y, W) \tag{2.3}$$

Notons qu'ici, puisque nos variétés sont Lorentziennes, même si la définition de la forme fondamentale K reste la même, comme $g(\nu, \nu) = -1$, on n'a plus $g(\nabla_X Y, \nu) = K(X, Y)$ mais $g(\nabla_X Y, \nu) = -K(X, Y)$ et donc l'équation de Weingarten devient :

$$g(\nabla_X \nu, Y) = K(X, Y).$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X(\overline{\nabla}_Y Z) + \nabla_X(K(Y, Z)\nu) \\ &= \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + K(X, \overline{\nabla}_Y Z)\nu + K(Y, Z)\nabla_X \nu + \nabla_X(K(Y, Z))\nu. \end{aligned}$$

En procédant de manière analogue avec les autres termes de $R(X, Y)Z$ et en gardant à l'esprit que ν est normal à W, on obtient :

$$\begin{aligned} Rm(X, Y, Z, W) &= g(R(X, Y)Z, W) \\ &= g(\overline{R}(X, Y)Z + K(Y, Z)\nabla_X \nu - K(X, Z)\nabla_Y \nu, W) \\ &= \overline{Rm}(X, Y, Z, W) + K(X, W)K(Y, Z) - K(X, Z)K(Y, W), \end{aligned}$$

où on utilise l'équation de Weingarten, que l'on avait établie lors des préliminaires, à la dernière ligne.

□

On peut, grâce à cette identité, trouver une équation supplémentaire, l'équation de contrainte Hamiltonienne, que doit vérifier les données de Cauchy pour permettre l'existence d'une solution. Cette équation forme, avec une autre équation, les équations de contraintes :

Théorème 2.2. *Le problème de Cauchy est bien posé : si on se donne des données de Cauchy vérifiant les équations de contraintes suivantes,*

(i) $\overline{S} + {H_\Sigma}^2 - |K|^2 = 0$

(ii) $\mathrm{div}^{\overline{g}}(K) - \mathrm{d}H_\Sigma = 0,$

où $|K|^2 = K_{ij}K^{ij}$, alors il existe une unique solution au problème de Cauchy associé.

Pour une preuve de ce résultat, nous renvoyons à l'article de Choquet-Bruhat et Geroch [4]. Il lui existe une réciproque : une solution au problème de Cauchy vérifie forcément ces deux équations.

Théorème 2.3. *Soit (M, g) une variété Lorentzienne de dimension 4 munie d'un tenseur énergie-impulsion T, possédant une hypersurface Σ de genre espace avec un champ des normales ν. Si M vérifie l'équation d'Einstein, on a, avec les même notations que d'habitude :*

(i) $\overline{S} + {H_\Sigma}^2 - |K|^2 = 16\pi\rho$

(ii) $\mathrm{div}^{\overline{g}}(K) - \mathrm{d}H_\Sigma = 8\pi J$,

où $\rho = T(\nu, \nu)$ est la densité d'énergie et $J = T(\nu, .)$ est le vecteur de Poynting correspondant à la densité du flux d'énergie dans une direction donnée.

Ces équations de contraintes ont une importance capitale en relativité générale : elles entrent en jeu dès que l'on considère un problème d'évolution temporelle. Remarquons dès à présent qu'elles imposent la positivité de $\overline{S}$ si la courbure principale est positive. Cette hypothèse sera celle qui nous permettra de conclure à la positivité de la masse dans la partie suivante. Dans la suite de l'exposé, nous utiliserons de manière récurrente la première de ces deux équations, appelée l'équation de contrainte Hamiltonienne. Nous nous contenterons donc de montrer cette dernière.

Démonstration. Il est plus pratique de travailler dans un système de coordonnées locales en p où $\nu = \partial_0$ en p et où $(\partial_i)_{i=1..3}$ engendre $T\Sigma$. Dans la suite, tous nos tenseurs seront évalués en ce p, de sorte que les calculs prennent une forme simplifiée. Rappelons de plus que les lettres latines indiquent une sommation uniquement sur les indices spatiaux tandis que les lettres grecques indiquent une sommation sur l'ensemble des indices. L'équation d'Einstein donne :

$$16\pi\rho = 2G_{00} = 2R_{00} - Sg_{00} = 2R_{00} + S.$$

Réexprimons R_{00}, en gardant à l'esprit que $g_{00} = -1$ et qu'en p la base est orthonormée :

$$
\begin{aligned}
R_{00} = R_{\alpha 00}{}^{\alpha} &= R_{000}{}^{0} + R_{i00}{}^{i} \\
&= R_{i00}{}^{i} = -R_{i0}{}^{0i} = -R_{i0}{}^{0i} - R_{ij}{}^{ji} + R_{ij}{}^{ji} \\
&= -R_{i\alpha}{}^{\alpha i} + R_{ij}{}^{ji} \\
&= -R_{\alpha i}{}^{i\alpha} + R_{ij}{}^{ji} \\
&= -R_{i}{}^{i} + R_{ij}{}^{ji} = R_{0}{}^{0} - R_{\alpha}{}^{\alpha} + R_{ij}{}^{ji} \\
&= -R_{00} - S + R_{ij}{}^{ji},
\end{aligned}
$$

de sorte que $2R_{00} + S = R_{ij}{}^{ji}$. Finalement, en utilisant l'équation de Gauss, on trouve :

$$
\begin{aligned}
16\pi\rho &= R_{ij}{}^{ji} = g^{kj} g^{li} R_{ijkl} \\
&= g^{kj} g^{li} (\overline{R}_{ijkl} + K_{il} K_{jk} - K_{ik} K_{jl}) \quad = \overline{R}_{ij}{}^{ji} + K_i^i K_j^j - K_{ij} K^{ij} \\
&= \overline{S} + {H_\Sigma}^2 - \overline{g}(K, K).
\end{aligned}
$$

□

Mentionnons que la démarche faite dans cette partie ne s'applique pas uniquement au cas du vide, $T = 0$, mais aussi à un tenseur T plus général. Il faudrait cependant alors considérer des données de Cauchy $(\Sigma, \overline{g}, K, J, \rho)$, qui doivent vérifier des équations de contraintes supplémentaires afin d'assurer l'existence d'un tenseur énergie-impulsion T sur notre variété (M, g).

Chapitre 3

Le théorème de masse positive

Le théorème de la masse positive stipule que, si la courbure scalaire d'une variété Riemannienne est partout positive, alors la masse (définie plus loin) de la variété est positive. Nous nous penchons ici sur le cas où la variété est le graphe d'une fonction lisse et asymptotiquement plate $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que l'on munit de la métrique induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$.

3.1 La masse d'un espace-temps asymptotiquement plat

Tandis qu'aussi bien en mécanique Newtonienne qu'en relativité restreinte le concept de masse d'un système apparaît comme un invariant naturel, il est délicat de définir une notion pertinente de masse dans le cadre de la relativité générale. Notons qu'il serait tentant de simplement définir la masse totale de l'espace-temps comme l'intégrale de la densité d'énergie ρ sur une tranche de type espace. Mais ceci serait peu satisfaisant : la masse ne provient pas uniquement de la matière présente mais aussi de l'énergie gravitationnelle. Ainsi, la solution de Schwarzschild constitue un exemple d'espace-temps vide (i.e. $T = 0$) possédant une masse non nulle. Un troisième terme d'énergie potentielle peut exister et contribuer de manière négative à la masse totale, de sorte qu'on n'a pas a priori d'inégalité triviale entre la masse totale et la masse de la matière présente.

3.1.1 Platitude asymptotique

Nous donnons une définition générale et originelle des métriques asymptotiquement plates, puis traduisons ces hypothèses sur la fonction f dont notre variété sera le graphe.

Définition 3.1. Une variété Riemannienne (M, g) est dite *asymptotiquement plate* s'il existe un compact $K \subset M$, et un difféomorphisme $\Phi : M \setminus K \to \mathbb{R}^n \setminus B$, tel que dans les coordonnées ainsi définies, on ait

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \delta_{ij} + O(|x|^{-p}) \\ |x||g_{ij,k}(x)| + |x|^2|g_{ij,kl}(x)| &= O(|x|^{-p}) \\ |S(x)| &= O(|x|^{-q}), \end{aligned}$$

pour un certain $p > (n-2)/2$ et $q > n$.

Les conditions imposées sur p et q sont présentes uniquement pour que la masse totale du système (voir plus loin) soit bien définie.

Ainsi, en dehors d'un compact et asymptotiquement, la géométrie de M ressemble à celle de $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne. Si g représente le champ gravitationnel, cela signifie que loin du centre de la variété (typiquement loin d'une étoile ou d'un trou noir), les effets de gravitation sont faibles.

Maintenant, si $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et g' la métrique induite par la métrique euclidienne sur Γ, alors (Γ, g') est isométrique à $(M, g) = (\mathbb{R}^n, \delta + \mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f)$, via l'application $\phi : \mathbb{R}^n \to \Gamma$, $x \mapsto (x, f(x))$. On a alors $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$. Les conditions énoncées plus haut motivent la définition suivante :

Définition 3.2. Une fonction lisse $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *asymptotiquement plate* si elle vérifie les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} f_i(x) &= O(|x|^{-p/2}), \\ |x||f_{ij}(x)| + |x|^2|f_{ijk}(x)| &= O(|x|^{-p/2}). \end{aligned}$$

3.1.2 Définition de la masse

Dans le cas où la variété considérée est asymptotiquement plate, il est cependant possible de définir la masse totale (ou masse ADM, du nom des trois physiciens Arnowitt, Deser et Misner, qui ont été à l'origine de cette définition).

Définition 3.3. La *masse* m d'une variété asymptotiquement plate est définie par la formule

$$m = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)w_{n-1}} \int_{S_r} \sum_{i,j} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \nu_j \mathrm{d}S_r,$$

où w_{n-1} est le volume de la $(n-1)$-sphère unité, S_r est la sphère de rayon r, ν est le vecteur normal à S_r et $\mathrm{d}S_r$ est l'élément de surface de S_r.

R. Bartnik a de plus montré que cette définition ne dépendait pas du système de coordonnées asymptotiquement plat choisi [2]. Remarquons que si cette définition s'avère être satisfaisante pour décrire la masse totale d'un système, on ne dispose pas de notion pertinente de masse dans une région bornée de l'espace-temps.

3.1.3 Une motivation de la définition

D'après l'heuristique qui vient d'être faite, on s'attend à ce que, dans le cas où les effets gravitationnels sont négligeables, la masse soit égale à l'intégrale de la densité massique, ce qui serait satisfaisant en ce qui concerne la pertinence de notre définition. Nous nous appuierons sur les notes de Piotr T. Chrusciel (voir [5]). Montrons ce résultat en nous inspirant d'abord du cadre Newtonien : en mécanique Newtonienne, le potentiel gravitationnel ϕ vérifie $\Delta\phi = 4\pi\rho$, où ρ est la densité massique du système. La formule de Stokes nous permet alors d'exprimer m la masse totale de l'espace comme

$$m = \int_{\mathbb{R}^3} \rho = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_r} \nabla\phi \cdot \nu \mathrm{d}S_r.$$

Analysons le raisonnement qui vient d'être mené : la densité massique ρ a été mise sous la forme $\rho = \mathrm{div}^\delta\, \mathbb{U}$, où $\mathbb{U} = \frac{1}{4\pi}\nabla\phi$. On a alors été en mesure d'exprimer la masse m comme

$$m = \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \mathbb{U} \cdot \nu \mathrm{d}S_r.$$

On peut de même essayer d'exprimer la densité massique ρ en relativité générale sous la forme d'une divergence. Voyons donc notre variété Riemannienne de dimension 3, Σ, comme étant une hypersurface de genre espace dans une variété Lorentzienne de dimension 4. Nous avons déjà vu que la bonne définition de la densité massique se trouve alors être $\rho = T(\nu,\nu)$, où ν est le champ des normales à Σ.

La densité massique ρ apparaît dans l'équation de contrainte Hamiltonienne. On peut donc essayer, dans cette égalité, de faire apparaître une divergence en négligeant, puisque les effets gravitationnels sont ici faibles, les termes quadratiques en ∂g :

$$\begin{aligned} 16\pi\rho &= \overline{S} + {H_\Sigma}^2 - \overline{g}(K,K) = \overline{S} + O\left((\partial g)^2\right) \\ &= g^{ij}\left(\Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{kl} + \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^l_{kj}\Gamma^k_{il} - \Gamma^k_{kj,i}\right) + O\left((\partial g)^2\right) \\ &= g^{ij}\left(\Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^k_{kj,i}\right) + O\left((\partial g)^2\right). \end{aligned}$$

Or, $\Gamma^k_{kj} = \frac{1}{2}g^{kl}(g_{kl,j}+g_{jl,k}-g_{jk,l}) = \frac{1}{2}g^{kl}g_{kl,j}$. Ainsi, $\Gamma^k_{kj,i} = \frac{1}{2}g^{kl}g_{kl,ij}+O\left((\partial g)^2\right)$ et on a :

$$\begin{aligned}
16\pi\rho &= g^{ij}\left(\Gamma^k_{ij,k} - \frac{1}{2}g^{kl}g_{kl,ij}\right) + O\left((\partial g)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}g^{ij}g^{kl}\left(g_{il,jk} + g_{jl,ik} - g_{ij,lk} - g_{kl,ij}\right) + O\left((\partial g)^2\right)\\
&= g^{ij}g^{kl}\left(g_{il,jk} - g_{kl,ij}\right) + O\left((\partial g)^2\right)\\
&= \partial_j(g^{ij}g^{kl}\left(g_{il,k} - g_{kl,i}\right)) + O\left((\partial g)^2\right).
\end{aligned}$$

Puisqu'on souhaite intégrer cette expression, multiplions cette quantité par $\sqrt{|g|}$ pour faire apparaître la divergence par rapport à la métrique g : $16\pi\rho = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_j\left(\sqrt{|g|}\mathbb{U}^j\right) + O\left((\partial g)^2\right) = \mathrm{div}^g\,\mathbb{U} + O\left((\partial g)^2\right)$, où :

$$\mathbb{U}^j = g^{ij}g^{kl}(g_{il,k} - g_{kl,i}).$$

Ainsi, par la formule de Stokes, et puisqu'à l'infini g_{ij} tend vers δ_{ij} :

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \rho &\approx \lim_{r\to\infty}\frac{1}{16\pi}\int_{S_r}\mathbb{U}\cdot\nu\mathrm{d}S_r\\
&\approx \lim_{r\to\infty}\frac{1}{16\pi}\int_{S_r}\sum_{i,j}(g_{ij,i} - g_{ii,j})\nu^j\mathrm{d}S_r\\
&\approx m.
\end{aligned}$$

Notre objectif est donc atteint : la masse est bien égale à l'intégrale de ρ lorsque les effets gravitationnels sont faibles.

3.1.4 La masse de la solution de Schwarzschild

Vérifions maintenant que notre définition redonne bien la masse pour la métrique de Schwarzschild, dont nous redonnons la forme :

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2.$$

La solution de Schwarzschild peut être vue comme un problème d'évolution, et l'espace des données initiales $\Sigma = \{t = 0\}$ constitue une variété Riemannienne de dimension 3 asymptotiquement plate, de métrique :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

Pour se rendre compte que la variété est bien asymptotiquement plate, il est pratique de reformuler la métrique de Schwarzschild dans un système de coordonnées plus pratique : on cherche u tel que $\mathrm{d}s^2$ soit de la forme

$$\mathrm{d}s^2 = \psi(\mathrm{d}u^2 + u^2\mathrm{d}\Omega^2).$$

Un calcul direct montre que pour $r = \left(1 + \frac{M}{2u}\right)^2 u$ et $\psi = \left(1 + \frac{M}{2u}\right)^4$, on a bien la forme désirée, de sorte qu'en passant dans le système de coordonnées cartésiens associé, on a :

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{M}{2|x|}\right)^4 \delta,$$

où δ désigne la métrique Euclidienne plate.

Revenons au calcul de la masse. Puisque $g_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, il s'agit essentiellement de calculer $g_{ii,j}$. En utilisant le fait que si f est radiale on a $\partial_j f = \frac{x^j}{r}\partial_r f$, on trouve :

$$g_{ii,j} = -x^j \frac{2M}{r^3}\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^3.$$

Avec $\nu^j = \frac{x^j}{r}$, il vient :

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} \sum_{i,j} (g_{ij,i} - g_{ii,j})\nu^j \mathrm{d}S_r \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} \sum_{i\neq j} x^j \frac{2M}{r^3}\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^3 \frac{x^j}{r}\mathrm{d}S_r \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} \sum_{j} \frac{4M}{r^4}\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^3 (x^j)^2\mathrm{d}S_r \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} \frac{4M}{r^2}\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^3 \mathrm{d}S_r \\
&= M
\end{aligned}$$

Notons que ce calcul n'est pas vain : il constitue une preuve que la constante C apparaissant dans la métrique est bien égale à $-2M$, ce que nous n'avions pas vraiment expliqué jusqu'alors.

3.2 Le théorème et sa preuve

Dans cette section, les indices seront levés ou baissés à l'aide de la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

3.2.1 Enoncé

Le théorème de la masse positive s'énonce ainsi dans le cas d'un graphe de fonction lisse :

Théorème 3.1. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction asymptotiquement plate,* $(M, g) = (\mathbb{R}^n, \delta + \mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f)$ *son graphe muni de la métrique induite par la métrique euclidienne de* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Soit* S *la courbure scalaire et* m *la masse totale de* (M, g)*. Notons* ∇f *le gradient de* f *dans la métrique plate, et* $|\nabla f|$ *sa norme. Soit* $\mathrm{d}V_g$ *la forme volume sur* M*. Alors*

$$m = \frac{1}{2(n-1)w_{n-1}} \int_M \frac{S}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \mathrm{d}V_g.$$

Cette formule montre en particulier que si S est positive, alors m est positive.

3.2.2 La preuve de Lam

La démonstration consiste à calculer explicitement la courbure, de l'exprimer comme une divergence et d'exprimer la masse comme une intégrale dépendant de la courbure à l'aide du théorème de Stokes.

Commençons par remarquer que $(\delta_{ik} + f_i f_k)(\delta^{kj} - \frac{f^k f^j}{1+|\nabla f|^2}) = \delta_i^j$ (où la norme de ∇f est la norme euclidienne) et que donc l'inverse de g_{ij} est

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \frac{f^i f^j}{1 + |\nabla f|^2}.$$

On peut alors calculer les symboles de Christoffel de (M, g) grâce à la formule 1.1 :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\left(\delta^{kl} - \frac{f^k f^l}{|\nabla f|^2}\right)(f_{ij} f_l + f_i f_{jl} + f_{ij} f_l + f_j f_{il} - f_{il} f_j - f_i f_{jl}) \\
&= \left(\delta^{kl} - \frac{f^k f^l}{|\nabla f|^2}\right) f_{ij} f_l \\
&= f_{ij} f^k - \frac{f_{ij} f^k |\nabla f|^2}{1 + |\nabla f|^2} \\
&= \frac{f_{ij} f^k}{1 + |\nabla f|^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit, puisque $|\nabla f|^2 = f_l f^l$:

$$\Gamma_{ij,r}^k = \frac{f_{ijr} f^k + f_{ij} f_r^k}{1 + |\nabla f|^2} - 2\frac{f_{ij} f^k f_{lr} f^l}{(1 + |\nabla f|^2)^2}.$$

Il reste à effectuer le calcul de la courbure scalaire. Par la formule 1.3, et les calculs précédents, on a

$$\begin{aligned}
S &= g^{ij}\left(\Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{kl} + \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^l_{kj}\Gamma^k_{il} - \Gamma^k_{kj,i}\right) \\
&= \left(\delta^{ij} - \frac{f^i f^j}{1+|\nabla f|^2}\right)\left(\frac{f_{ij}f^l}{1+|\nabla f|^2}\frac{f_{kl}f^k}{1+|\nabla f|^2} + \frac{f_{ijk}f^k + f_{ij}f^k_k}{1+|\nabla f|^2} - 2\frac{f_{ij}f^k f_{lk}f^l}{(1+|\nabla f|^2)^2}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{f_{kj}f^l}{1+|\nabla f|^2}\frac{f_{il}f^k}{1+|\nabla f|^2} - \frac{f_{kji}f^k + f_{kj}f^k_i}{1+|\nabla f|^2} + 2\frac{f_{kj}f^k f_{li}f^l}{(1+|\nabla f|^2)^2}\right) \\
&= \left(\delta^{ij} - \frac{f^i f^j}{1+|\nabla f|^2}\right)\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}(f_{il}f_{jk} - f_{ij}f_{lk})f^k f^l + f_{ij}f^k_k - f_{kj}f^k_i\right) \\
&= \frac{1}{1+|\nabla f|^2}\left(\frac{f^k f^l}{1+|\nabla f|^2}(f_{ml}f^m_k - f^m_m f_{lk}) + (f^m_m f^k_k - f^m_k f^k_m)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{f^i f^j f^k f^l}{(1+|\nabla f|^2)^2}(f_{il}f_{jk} - f_{ij}f_{lk}) - \frac{f^i f^j}{1+|\nabla f|^2}(f_{ij}f^k_k - f_{kj}f^k_i)\right).
\end{aligned}$$

Finalement, par symétrie et en réorganisant les indices :

$$S = \frac{1}{1+|\nabla f|^2}\left(\frac{2f^i f^j}{1+|\nabla f|^2}(f_{ki}f^k_j - f_{ij}f^k_k) + f^i_i f^j_j - f^j_i f^i_j\right).$$

Il est alors aisé de vérifier que la courbure s'écrit comme une divergence :

$$S = \operatorname{div}^\delta\left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}(f^i_i f^j - f^{ij}f_i)\partial_j\right). \tag{3.1}$$

Calculons maintenant la masse. On a $\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii} = f_{ii}f_j + f_{ij}f_i - 2f_{ij}f_i = f_{ii}f_j - f_{ij}f_i$, et par platitude asymptotique, on a

$$\frac{1}{1+|\nabla f|^2} \xrightarrow[r\to\infty]{} 1,$$

si bien que dans l'intégrale définissant la masse on peut rajouter le terme $\frac{1}{1+|\nabla f|^2}$. Remarquons enfin que si $\mathrm{d}V_\delta$ (resp. $\mathrm{d}V_g$) désigne la forme volume dans $(\mathbb{R}^n,\delta)$ (resp. (M,g)), on a $\mathrm{d}V_g = \sqrt{det(g)}\mathrm{d}V_\delta = \sqrt{1+|\nabla f|^2}\mathrm{d}V_\delta$. Il vient donc, par les remarques précédentes, la formule 3.1 et le théorème de Stokes :

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)w_{n-1}} \int_{S_r} \sum_{i,j} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu^j \mathrm{d}S_r \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)w_{n-1}} \int_{B_r} \mathrm{div}^\delta \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2} \sum_j \left(\sum_i f_{ii}f_j - f_{ij}f_i \right) \partial_j \right) \mathrm{d}V_\delta \\
&= \frac{1}{2(n-1)w_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} S \mathrm{d}V_\delta \\
&= \frac{1}{2(n-1)w_{n-1}} \int_M \frac{S}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \mathrm{d}V_g,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 3.1.

3.3 Validité physique du théorème

Le théorème de la masse positive nous assure la positivité de la masse sous une hypothèse de positivité de la courbure scalaire. Est-il raisonnable d'un point de vue physique de considérer des systèmes avec une courbure scalaire partout positive ? L'équation de contrainte Hamiltonienne permet d'exprimer la courbure scalaire $\overline{S}$:

$$\overline{S} = 16\pi\rho - {H_\Sigma}^2 + |K|^2.$$

Comme la métrique $\overline{g}$ est Riemannienne, il est aisé de voir que la quantité $|K|^2$ est toujours positive. De plus, la densité d'énergie ρ est considérée positive : cette hypothèse s'appelle la condition faible sur l'énergie et la quasi-totalité des formes de matière physiquement réalistes obéit à cette condition. Ainsi, si la courbure moyenne de l'espace des données initiales Σ est nulle, la positivité de la courbure scalaire est assurée et on peut appliquer le théorème de la masse positive. Demander l'annulation de la courbure moyenne H_Σ équivaut à demander que Σ soit une surface minimale, c'est-à-dire qu'en tout point on puisse trouver un voisinage U dans Σ tel qu'on ne puisse trouver de surfaces ayant pour bord le bord de U et d'aire inférieure à celle de U. On s'intéresse donc souvent au cas où l'espace de données initiales choisi est une surface minimale. Dans ce cas, et avec la condition faible sur l'énergie, la courbure scalaire est positive et donc la masse aussi.

Les surfaces minimales sont ainsi d'une grande importance en relativité générale. Brill et Deser vont jusqu'à considérer l'existence d'une hypersurface minimale comme faisant partie de la définition d'un espace-temps non pathologique et on peut en effet montrer que sous différentes hypothèses (voir [13]) alors il existe effectivement une hypersurface minimale.

Il convient d'évoquer le cas d'égalité dans le théorème de masse positive : une masse nulle implique que la métrique est plate. Dans notre cadre, le théorème que nous avons démontré donne seulement que la courbure scalaire est nulle, mais la forme très particulière de notre métrique permet de montrer qu'alors la métrique est plate (i.e la fonction f est constante).

Mentionnons de plus l'existence d'une version plus forte du théorème de la masse positive. On souhaite cette fois ci que la masse soit positive non plus si la courbure scalaire est positive mais sous la condition dominante sur l'énergie. Cette dernière stipule que pour tout champ de vecteur Y causal (c'est-à-dire de genre temps ou lumière) dirigé vers le futur alors le champ de vecteur $-T^{\alpha}{}_{\beta}Y^{\beta}$ est aussi causal et dirigé vers le futur. D'un point de vue physique, cela revient à demander que l'énergie ne puisse pas se propager plus vite que la lumière, et constitue donc une condition tout à fait raisonnable.

Chapitre 4

Une inégalité de type Penrose

4.1 Approche intuitive de l'inégalité de Penrose

L'inégalité de Penrose affirme que la masse totale d'un système gravitationnel isolé est supérieure à la contribution en masse de ses trous noirs. Si nous en avions déjà rencontré dans l'étude de la métrique de Schwarzschild, nous n'avons pas encore défini ce qu'était un trou noir. Intuitivement, dans une hypersurface de genre espace Σ d'un espace-temps, c'est une zone de laquelle la lumière ne peut s'échapper une fois qu'elle y est entrée : on ne pourra jamais voir, de l'extérieur, un trou noir.

Précisons quelque peu cette notion de manière informelle. Notons (M, g) notre variété Lorentzienne de dimension $n+1$. Soit Σ une hypersurface de genre espace, et Ω un ouvert borné régulier de Σ. Soit $C = \partial\Omega$. La surface C sera dite piégée si, lorsque considérée plongée dans son cône de futur, son volume décroît avec le temps, ce qui revient à dire que sa courbure moyenne relative à l'orientation future est positive. Notons que l'horizon, étant défini comme la frontière de l'ensemble des surfaces piégées, vérifie donc moralement des conditions d'extrémalité et sera nécessairement une surface minimale de Σ.

Nous avions déjà évoqué lors de l'étude de la métrique de Schwarzschild que tout photon atteignant la zone $\{r \leq 2M\}$ y resterait. Avec la définition qui vient d'être donnée, l'espace-temps de Schwarzschild est ainsi un trou noir d'horizon $\{r = 2M\}$. La taille du trou noir est dans ce modèle directement lié à la masse de l'espace-temps via l'égalité :

$$A = 16\pi M^2,$$

où l'on rappelle que dans le système de coordonnées construit pour la métrique de Schwarzschild, la coordonnée radiale r est définie par l'aire de l'orbite correspondante (isométrique à une sphère). Il est naturel de se demander si un lien analogue existe dans un cas plus général entre la masse ADM et l'aire des trous noirs. L'inégalité de Penrose répond comme nous l'avons déjà mentionné par la positive :

Théorème 4.1 (L'inégalité de Penrose)**.** *Soit (M, g) une variété Riemannienne asymptotiquement plate de masse m et dont l'aire de l'horizon est noté A. Si la courbure scalaire est positive, alors on a l'inégalité :*

$$m \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}},$$

l'égalité étant uniquement atteinte pour la métrique de Schwarzschild.

Tout comme pour le théorème de la masse positive, il existe une conjecture analogue, plus forte, de ce théorème, où l'on suppose la condition dominante sur l'énergie réalisée à la place de la positivité de la courbure scalaire. Cette version est ouverte et est appelée la conjecture de Penrose.

En observant de plus près l'espace-temps de Schwarzschild, il est facile de se rendre compte qu'il n'est pas possible de l'identifier entièrement à un graphe. Cependant, si l'on enlève la partie intérieure du trou noir (on ne considère alors que la partie $r > R_S$), on peut remarquer que l'extérieur du trou noir de Schwarzschild correspond au graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \setminus B(0, 2m) \to \mathbb{R}, \quad r \mapsto \sqrt{8m(r - 2m)}$.

Ainsi, nous étudierons ici le cas où f est une fonction lisse $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega \to \mathbb{R}$ asymptotiquement plate, où Ω est un ouvert borné régulier, tel que si $\Sigma = \partial\Omega$, la fonction $f|_\Sigma$ est constante, et $|\nabla f| \underset{\Sigma}{\to} \infty$. La courbure moyenne $\overline{H}^g_\Sigma$ de Σ par rapport à la métrique g et la courbure $\overline{H}^\delta_\Sigma$ par rapport à la métrique plate (toutes deux relatives à l'orientation sortante de Σ dans (M, g), et dans $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta)$) étant reliées par :

$$\overline{H}^g_\Sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \overline{H}^\delta_\Sigma,$$

la condition $|\nabla f| \underset{\Sigma}{\to} \infty$ est nécessaire pour que Σ soit une surface minimale et donc puisse effectivement être considérée comme un horizon.

Nous commençons par quelques propriétés sur le Laplacien sur une variété Riemannienne, et par quelques inégalités sur les corps convexes ; ces préliminaires nous permettront de calculer la masse en fonction de la courbure scalaire et de la géométrie de Σ.

4.2 Le Laplacien sur une variété Riemannienne et un peu d'analyse convexe

4.2.1 Le Laplacien

Définition 4.1. Si (M, g) est une variété Riemannienne et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on définit le *Laplacien* par la formule

$$\Delta f = \operatorname{div}^g \nabla f,$$

où div^g est la divergence associée à la forme volume de (M, g), définie par $\mathrm{d}(\iota_X \mathrm{d}V_g) = \operatorname{div}^g(X)\mathrm{d}V_g$, et ∇f est le gradient de f dans (M, g).

Nous pouvons calculer l'expression de la divergence en coordonnées :

$$\operatorname{div}^g X = \partial_i X^i + \frac{X^i \partial_i |g|}{2|g|},$$

où l'on a noté $|g| = \det(g)$. Cette expression permet de faire le calcul de celle du Laplacien :

$$\Delta f = (\nabla f)^k_{;k} = \partial_k \partial^k f + \Gamma^k_{kj} \partial^j f.$$

Nous allons maintenant considérer une hypersurface orientée de M et relier son Laplacien à celui de M.

Lemme 4.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n, et Σ une hypersurface orientée de M, muni de la métrique $\overline{g}$ induite par celle de M. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a*

$$\Delta f = \Delta_\Sigma f - H_\Sigma \nu(f) + H_f(\nu, \nu), \tag{4.1}$$

où $H_f = \left((\nabla f)^\alpha_{;\beta}\right)$ est la matrice hessienne de f, ν est la section normale orientée de $N\Sigma$, et H_Σ est la courbure moyenne de Σ relative à ν.

Démonstration. On choisit des coordonnées normales au voisinage d'un point $p \in \Sigma$ de sorte que ν soit de norme 1 et positivement colinéaire à ∂_0, $\nu \perp T\Sigma$, et $T\Sigma$ est engendré localement par $(\partial_i)_{i=1\cdots n-1}$. On a

$$\begin{aligned}
(\nabla f)^\alpha_{;\alpha} &= \partial_\alpha(\partial^\alpha f) + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\partial^\beta f \\
&= \partial_0 \partial^0 f + \partial_i \partial^i f + \Gamma^\alpha_{\alpha 0} g^{00} \partial_0 f + \Gamma^\alpha_{\alpha i} g^{ij} \partial_j f.
\end{aligned}$$

On a d'une part :

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha_{\alpha 0} g^{00} \partial_0 f &= g^{00} \Gamma^0_{00} \partial_0 f + g^{00} \Gamma^i_{i0} \partial_0 f \\
&= g^{00} \Gamma^0_{00} \partial_0 f + \sqrt{g^{00}} \Gamma^i_{i0} \nu(f),
\end{aligned}$$

et d'autre part :
$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha i} g^{ij} \partial_j f = g^{ij}\Gamma^0_{0i}\partial_j f + g^{ij}\Gamma^k_{ki}\partial_j f.$$
Relions maintenant les symboles de Christoffel associés à $\overline{g}$ avec ceux associés à g. On a
$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_i}\partial_j &= \overline{\nabla}_{\partial_i}\partial_j + K(\partial_i, \partial_j)\nu \\ &= \overline{\nabla}_{\partial_i}\partial_j + K_{ij}\nu,\end{aligned}$$
ce qui donne $\Gamma^k_{ij}\partial_k + \Gamma^0_{ij}\partial_0 = \overline{\Gamma}^k_{ij}\partial_k + K_{ij}\nu$, et on obtient
$$K_{ij}\nu^0 = \Gamma^0_{ij} \text{ et } \overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}.$$
Avec ces considérations, en vertu de la formule 1.4 et en regroupant les termes du Laplacien :
$$\Delta f = \underbrace{\partial_i\partial^i f + g^{ij}\overline{\Gamma}^k_{ki}\partial_j f}_{\Delta_\Sigma f} - H_\Sigma \nu(f) + \partial_0\partial^0 f + g^{00}\Gamma^0_{00}\partial_0 f + g^{ij}\Gamma^0_{0i}\partial_j f,$$
et les trois derniers termes forment exactement $H_f(\nu,\nu)$. □

4.2.2 Volumes mixtes et inégalités de Alexandrov-Fenchel

Nous faisons ici une petite bifurcation qui traitera de certaines inégalités d'analyse convexe. Nous admettrons ces résultats, qui nous permettront de relier la courbure moyenne $\overline{H}^{\delta}_{\Sigma}$, à l'aire de Σ (pour plus de détail, voir [8]). Considérons K et L des compacts convexes réguliers d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^n$, et $b_d = \text{vol}(B^d)$ le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.2 (Minkowski, Steiner)**.** *La valeur de* $\text{vol}(\lambda K + \mu L)$ *est un polynôme homogène de degré* $n+1$ *en* λ *et* μ*, qu'on peut donc écrire*
$$\text{vol}(\lambda K + \mu B) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} V_i(K,L)\lambda^i\mu^{n-i}.$$
Les coefficients $V_i(K,L)$ *sont appelés volumes mixtes de Minkowski de* K *et* L*. On a*
$$V_n(K,L) = \text{vol}(K) \text{ et } V_0(K,L) = \text{vol}(L).$$

Une interprétation de ces volumes mixtes, dans le cas $L = B$, consiste à les relier aux courbures principales du bord de K. En effet, si on note

$\overline{\kappa}_1^\delta, \cdots, \overline{\kappa}_{n-1}^\delta$ les courbures principales de $\partial K = \Sigma$ associés à l'orientation extérieure de K (dans $\mathbb{R}^n, \delta$) et

$$\sigma_k(\overline{\kappa}^\delta) = \frac{1}{\binom{n-1}{k}} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1} \overline{\kappa}_{i_1}^\delta \cdots \overline{\kappa}_{i_k}^\delta$$

là k-ième fonction symétrique normalisée des $\overline{\kappa}_i^\delta$, on a la formule suivante pour $1 \leq i \leq n$:

$$W_i := V_{n-i}(K, B) = \frac{(-1)^{i-1}}{n} \int_\Sigma \sigma_{i-1}(\overline{\kappa}^\delta) d\Sigma, \tag{4.2}$$

où $d\Sigma$ est la forme volume de Σ induite par celle de $(\mathbb{R}^n, \delta)$.

Voyons maintenant comment les coefficients V_i sont reliés entre eux. Le principal résultat sont les inégalités de Alexandrov-Fenchel ; nous présentons le théorème suivant qui est un cas particulier du théorème originel (qui traite le cas de r compacts $K_1, \cdots, K_r$).

Théorème 4.3 (Inégalités de Alexandrov-Fenchel)**.** *Nous avons les inégalités, pour tout* $1 \leq i \leq n-1$*,*

$$V_i(K, L)^2 \geq V_{i+1}(K, L) V_{i-1}(K, L).$$

Ces inégalités sont donc, selon 4.2, toutes aussi valables pour les W_i. Elles se réécrivent $\frac{W_{i+1}}{W_i} \leq \frac{W_i}{W_{i-1}}$, et nous avons donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{W_2}{W_1}\right)^{n-2} &\geq \frac{W_3}{W_2} \times \cdots \times \frac{W_n}{W_{n-1}} \\ &\geq \frac{W_n}{W_2}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$W_2^{n-1} \geq W_1^{n-2} W_n. \tag{4.3}$$

Mais :

$$\begin{aligned} nW_1 &= |\Sigma| \\ W_n &= V_0(K, B) = \mathrm{vol}(B) = b_n \\ nW_2 &= -\frac{1}{n-1} \int_\Sigma \overline{H}_\Sigma^\delta \mathrm{d}\Sigma. \end{aligned}$$

Ainsi, la formule 4.3 conduit à $-\frac{1}{n-1} \int_\Sigma \overline{H}_\Sigma^\delta \mathrm{d}\Sigma \geq n b_n^{\frac{1}{n-1}} \left(\frac{|\Sigma|}{n}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}$, et finalement :

$$\frac{1}{(n-1)(nb_n)} \int_\Sigma -\overline{H}_\Sigma^\delta \mathrm{d}\Sigma \geq \left(\frac{|\Sigma|}{nb_n}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \tag{4.4}$$

4.3 Le théorème de la masse positive en présence d'un horizon

4.3.1 Calcul de la masse

La masse comprend alors un terme lié à la géométrie de Σ, c'est-à-dire à la géométrie de l'horizon du trou noir. Le résultat est le suivant :

Théorème 4.4. *Soit Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et $\Sigma = \partial\Omega$. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction lisse asymptotiquement plate telle que $f|_\Sigma$ est constante, et telle que $|\nabla f| \underset{\Sigma}{\to} \infty$. Si $(M, g) = (\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta + \mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f)$ est le graphe de f muni de la métrique induite par celle de $\mathbb{R}^{n+1}$, nous avons*

$$m = \frac{1}{2(n-1)w_{n-1}} \left[\int_M \frac{S}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \mathrm{d}V_g + \int_\Sigma H^\delta_\Sigma \mathrm{d}\Sigma \right],$$

où H^δ_Σ est la courbure moyenne de Σ dans $(\mathbb{R}^n, \delta)$ relative à l'orientation sortante de M (ou rentrante de Ω).

Pour effectuer le calcul dans ce nouveau cadre, nous allons reprendre la démonstration du théorème de la masse positive. La différence est que l'on a un terme de bord quand on applique le théorème de Stokes. Le gradient de f sera pris relativement à la métrique plate, ainsi que sa norme (comme dans le chapitre précédent).

Démonstration. Commençons par choisir une famille lisse d'hypersurfaces (Σ_s) de $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ telle que $\Sigma_s = \partial\Omega_s$ où $\Omega \subset \Omega_s \subset B_r$ pour un certain r, $\Sigma_0 = \Sigma$ et $f|_{\Sigma_s}$ est constante pour tout s (On peut choisir $\Sigma_s = \{f = s_0 + s\} \cap \Omega^\epsilon$ où Ω^ϵ est un ϵ-voisinage de Ω et s_0 la valeur prise par f sur Σ, pour ϵ assez petit, et s encore plus petit. C'est une sous-variété puisque $\nabla f \neq 0$, et donc f est une submersion au voisinage de Σ.). Le vecteur sortant de Σ_s dans $(B_r \setminus \Sigma_s, \delta)$ est $-\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)w_{n-1}} \int_{S_r} \sum_{i,j} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu^j \mathrm{d}S_r \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)w_{n-1}} \left[\int_{B_r \setminus \Omega_s} \mathrm{div}^\delta \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2} \sum_j \left(\sum_i f_{ii}f_j - f_{ij}f_i \right) \partial_j \right) \mathrm{d}V_\delta \right. \\
&\quad \left. - \int_{\Sigma_s} \sum_{i,j} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu^j \mathrm{d}\Sigma_s \right] \\
&= \frac{1}{2(n-1)w_{n-1}} \left[\int_M \frac{S}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \mathrm{d}V_g - \int_{\Sigma_s} \sum_{i,j} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu^j \mathrm{d}\Sigma_s. \right]
\end{aligned}$$

De plus, remarquons que si $\Delta^\delta f$ et H^δ_f sont le Laplacien et la Hessienne de f dans la métrique plate, on a

$$\begin{aligned}
-\sum_{i,j} \frac{1}{1+|\nabla f|^2}(f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu^j &= \frac{1}{|\nabla f|}\sum_{i,j}\frac{1}{1+|\nabla|^2}\left(f_{ii}f_jf^j - f_{ij}f_if^j\right) \\
&= \frac{1}{1+|\nabla|^2}\left(|\nabla f|\Delta^\delta f - H^\delta_f\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \nabla f\right)\right).
\end{aligned}$$

Mais, si l'on applique le lemme 4.1 à f dans $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega_s, \delta)$, on obtient, si $H^\delta_{\Sigma_s}$ est la courbure moyenne de Σ_s relative à ν, puisque $f|_{\Sigma_s}$ est constante :

$$\Delta^\delta f = H^\delta_f(\nu,\nu) - H^\delta_{\Sigma_s}\nu(f).$$

Cela donne dans le calcul précédent

$$\begin{aligned}
-\sum_{i,j} \frac{1}{1+|\nabla f|^2}(f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu^j &= \frac{1}{1+|\nabla f|^2}\left(-|\nabla f|H^\delta_{\Sigma_s}\nu(f)\right) \\
&= -\frac{1}{1+|\nabla f|^2}|\nabla f|\langle\nabla f,\nu\rangle H^\delta_{\Sigma_s} \\
&= \frac{|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2}H^\delta_{\Sigma_s},
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$m = \frac{1}{2(n-1)w_{n-1}}\left[\int_M \frac{S}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\mathrm{d}V_g + \int_{\Sigma_s}\frac{|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2}H^\delta_{\Sigma_s}\mathrm{d}\Sigma_s\right].$$

On conclut en faisant tendre s vers 0. □

4.3.2 L'inégalité de Penrose

Le théorème 4.3.1 et l'inégalité 4.4 donnent le résultat suivant, puisque $\overline{H}^\delta_\Sigma = -H^\delta_\Sigma$, et que $nb_n = w_{n-1}$:

Théorème 4.5 (Inégalité de Penrose pour les graphes de fonctions lisses)**.** *Avec les hypothèses du théorème précédent, et sous la condition que Ω est convexe, on a*

$$m \geq \frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma|}{nb_n}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \frac{1}{2n(n-1)b_n}\int_M \frac{S}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\mathrm{d}V_g.$$

Sous hypothèse de courbure scalaire positive, on obtient l'inégalité de Penrose :

$$m \geq \frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma|}{nb_n}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Bibliographie

[1] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. The dynamics of general relativity. In *Gravitation : An introduction to current research*, pages 227–265. Wiley, New York, 1962.

[2] Robert Bartnik. The mass of an asymptotically flat manifold. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39 :661–693, 1986.

[3] Hubert L. Bray. Proof of the riemannian penrose inequality using the positive mass theorem. *Journal of Differential Geometry*, 59, 2001.

[4] Yvonne Choquet-Bruhat and Robert Geroch. Global aspects of the cauchy problem in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 14 :329–335, 1969.

[5] Piotr T. Chrusciel. Lectures on energy in general relativity. March-April 2010.

[6] Mau-Kwong George Lam. The graphs cases of the riemannian positive mass and penrose inequalities in all dimensions. *Cornell University*, 2010.

[7] John M. Lee. *Riemannian manifolds : an introduction to curvature*. Springer, 1997.

[8] Schneider. *Convex Bodies : the Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge University Press, 1993.

[9] Richard Schoen and Shing Tung Yau. Positivity of the total mass of a general space-time. *Physical Review Letters*, 43, 1979.

[10] Jérémie Szeftel. Introduction à la relativité générale d'un point de vue mathématique. (Cours en ligne).

[11] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.

[12] Edward Witten. A new proof of the positive energy theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 80, 1981.

[13] A. E. Fisher Y. Choquet-Bruhat and J.E. Marsden. Maximal hypersurfaces and positivity of mass. *Isolated Gravitating Systems in General Relativity*, 1979.