Transport optimal sous contrainte de type martingale

Armand Riera
Tunan Zhu

Encadré par Bertrand Maury

juin 2015

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Problème classique KP **4**
- 2.1 Quelques rappels sur les mesures 4
- 2.2 Existence d'une solution 5

3 Formalisation du problème **9**
- 3.1 Désintégration 9
- 3.2 Condition nécessaire et suffisante 11

4 Existence et unicité de la solution **17**
- 4.1 Fonctions potentielles 17
- 4.2 Ordre convexe positif 19
- 4.3 Ombre 20
  - 4.3.1 Existence d'une ombre 20
  - 4.3.2 Métrique de Kantorovich 22
  - 4.3.3 Formule de sommation 23
- 4.4 Plan de transport martingale monotone 25
  - 4.4.1 Définition et lemme variationnel 25
  - 4.4.2 Construction de π_{lc} 26
  - 4.4.3 Unicité de π_{lc} 28
- 4.5 Optimalité 30

A Lemme variationnel **31**

B Théorème de Prokhorov **33**

Chapitre 1

Introduction

Le problème du transport optimal fut introduit pour la première fois par le mathématicien français Gaspard Monge en 1781 lorsqu'il étudiait le coût d'envoi des minerais aux usines. Mathématiquement le problème se modélise de la manière suivante : étant donnés deux espaces topologiques X, Y et μ mesure de probabilité sur X, ν mesure de probabilité sur Y (par rapport à la tribu borélienne), on cherche à étudier pour une fonction de coût donnée $c : X \times Y \to [0, +\infty]$,

$$\inf \left\{ M(T) = \int_{X \times Y} c(x, T(x)) \mathrm{d}\mu(x), T\#\mu = \nu \right\}$$

Depuis, cette théorie a été développée par Kantorovich au XX siècle pour ses multiples applications en économie. Le problème (KP), nommé ainsi en son honneur, est une relaxation du problème initial, plus facile à manipuler, et revient à étudier (on reprend les mêmes notations) :

$$\inf \left\{ K(\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) \mathrm{d}\pi(x, y), \pi \in \Pi(\mu, \nu) \right\}$$

où $\Pi(\mu, \nu) = \left\{ \pi \text{ probabilité sur } X \times Y, proj^x_{\#}\pi = \mu, proj^y_{\#}\pi = \nu \right\}$.

Récemment, de nouveaux problèmes liés à cette théorie sont apparus, notamment en finance où la complexification des marchés financiers impose de nouvelles contraintes de type martingale. En fait, le problème se pose naturellement de la manière suivante :

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} c(x, y) \mathrm{d}\pi(x, y), \pi \in \Pi_M(\mu, \nu) \right\}$$

où

$$\Pi_M(\mu, \nu) = \left\{ \begin{array}{c} \pi \in \Pi(\mu, \nu) : \forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mesurable bornée,} \\ \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x)(x - y) \mathrm{d}\pi(x, y) = 0 \end{array} \right\}$$

Dans cet article, on commencera par introduire le problème de Kantorovich dans le cas général et par démontrer certains résultats concernant l'existence d'un minimum. Plus précisément on montrera que lorsque X et Y sont des espaces polonais et c une fonction continue inférieurement la borne inférieure du problème (KP) est bien atteinte. On s'intéressera ensuite au problème sous contrainte martingale, en dimension 1, dont l'étude constitue le thème principale de cet article.

Chapitre 2

Problème classique KP

On cherche à determiner l'existence d'une solution au problème KP. Soit c une fonction de $X \times Y$ dans $[0; +\infty]$, et soit μ une mesure de probabilité sur X et ν une mesure de probabilité sur Y. On pose :

$$\Pi(\mu, \nu) = \{\pi \in \wp(X \times Y), proj_x \pi = \mu, , proj_y \pi = \nu\}$$

et

$$\forall \pi \in \Pi(\mu, \nu), K(\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) \, \mathrm{d}\pi(x, y).$$

On s'intéresse à caractériser $\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} K(\pi)$. Il faut remarquer que $\Pi(\mu, \nu)$ est bien non vide, puisque $\mu \otimes \nu \in \Pi(\mu, \nu)$. On va montrer dans cette section que sous certaines hypothèses de régularité, il existe une mesure réalisant la borne inferieure.

2.1 Quelques rappels sur les mesures

Dans cette section on va introduire certains resultats d'intégration et d'analyse fonctionnelle.

Définition 2.1.1 (lsc). *Soit X un espace métrique, et f une fonction de X dans* $[0; +\infty]$ *on dit qu'une fonction est lsc (de l'anglais lower semi continous) si : pour toute suite* x_n *de X telle qu'il existe x dans X tel que* x_n *converge vers x on a*

$$f(x) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} f(x_n)$$

Lemme 2.1.2. *Soit X métrique compact, et f lsc alors il existe x dans X tel que* $f(x) = \inf_{y \in X} f(y)$

Preuve. *Il suffit de considérer une suite* x_n *minimisante, comme X est métrique compact quitte à faire une extraction, on peut supposer qu'il existe x dans X tel que* x_n *converge vers x. On a alors* $f(x) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} f(x_n)$ *d'où x convient.*

Il est utile, pour montrer des résultats d'existence de s'intéresser au caractère compact de certains espaces.

Theorème 2.1.3 (Prokhorov)**.** *Soit Ω métrique complet, séparable. Soit μ_n des probabilités sur Ω. On dit que la suite μ_n est tendue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe K compact de Ω tel que pour tout n, $\mu_n(K) > 1 - \epsilon$. Alors on a équivalence entre : μ_n est tendue et il existe une extractrice ϕ et une probabilité μ sur Ω telle que $\mu_{\phi(n)}$ converge en loi vers μ.*

Voir une idée de la preuve dans l'annexe.

Lemme 2.1.4. *Soit π_n une suite de $\Pi(\mu, \nu)$, et π mesure sur $X \times Y$ tel que π_n converge en loi vers π. Alors π est dans $\Pi(\mu, \nu)$*

Preuve. *Soit π_n dans $\Pi(\mu, \nu)$ convergeant en loi vers π mesure sur $X \times Y$. Alors soit f fonction continue bornée de X dans $\mathbb{R}$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{X\times Y} f(x)\,\mathrm{d}\pi_n(x, y). = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Donc comme $\int_{X\times Y} f(x)\,\mathrm{d}\pi_n(x, y)$. converge vers $\int_{X\times Y} f(x)\,\mathrm{d}\pi(x, y)$. alors :

$$\int_{X\times Y} f(x)\,\mathrm{d}\pi(x, y). = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Donc $proj^x_{\#}\pi = \mu$ de la même manière on prove que $proj^y_{\#}\pi = \nu$

Theorème 2.1.5 (Théorème d'Ulam)**.** *Soit (E,d) un espace métrique séparable et complet. Soit μ mesure positive de masse finie sur les boréliens de E. Alors μ est tendue.*

Preuve. *Soit $\epsilon > 0$ et soit x_n suite dense dans E, pour tout p entier positif, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, 2^{-p}) = E$. $\lim_{n\to+\infty} \mu(\bigcup_{k=0}^{n} B(x_k, 2^{-p})) = \mu(E)$. Il existe donc n_p telle que $\mu(E\backslash\bigcup_{k=0}^{n_p} B(x_k, 2^{-p})) \leq 2^{-p-1}\epsilon$. On pose $A_\epsilon = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{n_p} B(x_k, 2^{-p})$ il est fermé et précompact donc compact (car E est complet).De plus $\mu(E \setminus A_\epsilon) \leq \sum_{p\in\mathbb{N}} 2^{-(p+1)}\epsilon = \epsilon$*

2.2 Existence d'une solution

Dans cette section on va montrer que lorsque X et Y sont des espaces polonais, et c est lsc alors le problème (KP) admet une solution. Pour cela on commence par le prouver dans le cas compact métrisable.

Proposition 2.2.1. *Soit X et Y des espaces compacts métrisables. Soit μ, ν deux mesures de probabilité sur X et Y respectivement,et c une fonction continue de $X \times Y$ dans $[0; +\infty[$. Alors le problème (KP) associé admet une solution.*

Preuve. *Comme X et Y sont compacts métrisables alors $X \times Y$ est compact métrisable. c est donc bornée. Prenons π_n une suite de mesure dans $\Pi(\mu, \nu)$ tel que $K(\pi_n)$ converge vers sa borne inferieur. On va utiliser le théorème de Prokhorov. On a bien que $X \times Y$ est un espace complet séparable. Quitte à extraire, on peut supposer qu'il existe π probabilité sur $X \times Y$ tel que π_n converge en loi vers π. D'après le lemme précédent on a que π appartient à $\Pi(\mu, \nu)$. Comme la fonction c est continue bornée, π est solution du problème.*

On va montrer qu'on peut supposer c lsc.

Proposition 2.2.2. *Soit X et Y des espaces métriques compacts. Soit μ, ν deux mesures de probabilité dans X et Y respectivement et c une fonction de $X \times Y$ dans $[0; +\infty]$ lsc. Alors le problème (KP) associé admet une solution.*

Le résultat découle du lemme suivant :

Lemme 2.2.3. *Soit f une fonction allant de X, espace métrique, dans $[0; +\infty]$ lsc. On note J la fonction allant de M_+ dans $[0; +\infty]$ telle que :*

$$J(\lambda) = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

Alors si λ_n est une suite de mesures positives convergeant en loi ver λ. On a que :

$$J(\lambda) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} J(\lambda_n)$$

Preuve. *On commence par montrer qu'on peut écrire f comme sup de fonctions continues. Pour cela on considère pour tout y dans X et k dans $\mathbb{N}$, la fonction $g_{y,k}$ allant de X dans $\mathbb{R}$ tel que :$\forall x \in X, g_{y,k}(x) = f(y) + kd(x, y)$ (où d est la distance dans X). On pose $f_k(x) = \inf_y g_{y,k}(x)$. On va démontrer que f_k est k-lips. Soit x_1, x_2 dans X, soit y dans X, alors on a que :*

$$f_k(x_1) - f_k(x_2) \leq g_y(x_1) - g_y(x_2) + g_y(x_2) - f_k(x_2)$$

$g_{y,k}$ étant k-lips, on obtient que :

$$f_k(x_1) - f_k(x_2) \leq kd(x_1, x_2) + g_y(x_2) - f_k(x_2)$$

Ceci étant vrai pour tout y, on a $f_k(x_1) - f_k(x_2) \leq kd(x_1, x_2)$. On conclut par symétrie que f est k-lips, et donc continue. De plus : $0 \leq f_k(x) \leq f(x)$ pour tout x dans X. Par construction f_k est croissante(par rapport à k). On va montrer que pour tout x dans X, $f_k(x)$ converge, lorsque k tend vers $+\infty$, vers f(x). Soit x dans X, on appelle l la limite de $f_k(x)$. On sait déjà que $l \leq f(x)$ On considère a_k une suite de nombres strictement positifs convergeant vers 0. Il existe alors une suite y_k d'éléments de X tels que :

$$f(y_k) + kd(x, y_k) \leq f_k(x) + a_k \quad (*)$$

D'où

$$d(x, y_k) \leq \frac{f_k(x) + a_k}{k}$$

Donc on obtient que y_k converge vers x. En réutilisant (*) on a :

$$f(y_k) \leq f_k(x) + a_k$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient que $f(x) \leq l$. On a donc montré que $f = sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$. Il faut noter que les f_k sont positives et que c'est une suite croissante. De plus quitte à prendre $f_k \wedge k$,ce qui ne change pas les résultats précedents, on peut supposer f_k bornée. Finalement pour achever la démonstration du lemme, on remarque grâce au théorème de convergence monotone que :

$$\begin{aligned} J(\lambda) &= \int_X f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x). \\ &= \int_X sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)\,\mathrm{d}\lambda(x). \\ &= sup_{k\in\mathbb{N}} \int_X f_k(x)\,\mathrm{d}\lambda(x). \end{aligned}$$

On pose $J_k(\lambda) = \int_X f_k(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$.. On a $J = sup_{k\in\mathbb{N}} J_k$. Alors si λ_n est une suite de mesures positives convergeant en loi vers λ. Pour tout k dans $\mathbb{N}$.

$$J(\lambda_n) \geq J_k(\lambda_n)$$

ceci étant vrai pour tout n. D'où comme les f_k sont continues et bornées,

$$\begin{aligned} \liminf_n J(\lambda_n) &\geq \liminf_n J_k(\lambda_n) \\ &\geq J_k(\lambda) \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vérifiée pour tout k dans $\mathbb{N}$, on conclut :

$$\liminf_n J(\lambda_n) \geq J(\lambda)$$

D'où le résultat.

On va maintenant déduire la proposition.

Preuve. *Soit π_n une suite de mesures dans $\Pi(\mu, \nu)$ telle que $K(\pi_n)$ converge vers sa borne inferieure. D'après le théorème de Prokhorov, on peut supposer que π_n converge en loi vers une mesure π. Comme la fonction c est lsc, on peut appliquer le lemme précedent. On a alors*

$$\liminf_n K(\pi_n) \geq K(\pi)$$

La mesure π est donc solution du problème (KP).

On va maintenant démontrer le théorème d'existence lorsque X et Y sont des espaces polonais.

Theorème 2.2.4 (Existence d'une solution). *Soit X et Y des espaces complets séparables. Soit μ et ν deux probabilités dans X et Y respectivement et c une fonction de $X \times Y$ dans $[0; +\infty]$ lsc. Alors le problème (KP) associé admet une solution.*

Preuve. *Soit* π_n *une suite de mesure dans* $\Pi(\mu, \nu)$ *telle que* $K(\pi_n)$ *converge vers sa borne inferieure. Montrons que le théorème de Prokhorov s'applique encore. Soit* $\epsilon \geq 0$*, comme* μ *et* ν *sont des mesures positives de masse finie, alors d'après le théorème d'Ulam, il existe* A_1 *compact de* X *et* A_2 *compact de* Y*, tels que* $\mu(X \setminus A_1) \leq \epsilon$ *et* $\nu(Y \setminus A_2) \leq \epsilon$*. Alors soit* π *dans* $\Pi(\mu, \nu)$*, on a que :*

$$\begin{aligned}\pi(X \times Y \setminus A_1 \times A_2) &\leq \pi((X \setminus A_1) \times Y) + \pi(X \times (Y \setminus A_2)) \\ &\leq 2\epsilon\end{aligned}$$

Donc la suite π_n *est tendue puisque elle est dans* $\Pi(\mu, \nu)$*. Donc on peut supposer qu'elle converge en loi vers une probabilité* π*. En appliquant le lemme à la fontion* K *définie par,*

$$\forall \pi \in \Pi(\mu, \nu), K(\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) \, \mathrm{d}\pi(x, y).$$

On conclut que π *est solution du problème (KP).*

Chapitre 3

Formalisation du problème

Dans cette section on va s'intéresser au cas martingale. On veut minimiser étant donner deux mesures dans $\mathcal{M}_+$, μ et ν,

$$E(c(X,Y))$$

où c est une fonction de coût, et X, Y des variables aléatoires respectivement de loi μ et ν telles que $E(Y|X) = X$. Le problème qu'on abordera dans les paragraphes est l'existence de telles variables aléatoires. On notera dorénavant $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des mesures sur $\mathbb{R}$ qui sont positives finies et qui admettent un moment d'ordre 1.

3.1 Désintégration

On va commencer par caractériser la propriété martingale grâce à des mesures. Pour cela on note $\Pi_M(\mu,\nu)$ l'ensemble des mesures π sur $\mathbb{R}^2$ appartenant à $\Pi(\mu,\nu)$ et telles que si X et Y sont des variables aléatoire sur $\mathbb{R}$ telles que la loi de (X,Y) soit π alors $E(Y|X) = X$. Ceci est équivalent à que pour toute fonction mesurable, f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornée on a que :

$$\int_{X\times Y} f(x)(x-y)\,\mathrm{d}\pi(x,y). = 0$$

On va caractériser autrement les éléments de $\Pi_M(\mu,\nu)$. Pour cela on définit la désintégration des mesures.

Définition 3.1.1 (Désintégration)**.** *Soit X, Y deux espaces topologiques,*π *une mesure sur* $X \times Y$ *et* ω *une mesure sur Y. Une désintégration de* π *par rapport à* ω *est une application,* $P : B(X) \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que*
$\forall y \in Y, P(.,y)$ *est une mesure sur X.*
$\forall A \in B(X), P(A,.)$ *est* ω *mesurable*
$\pi(A\times B) = \int_B P(A,y)\,\mathrm{d}\omega(y)$*pour A,B mesurables.*

Theorème 3.1.2. *Soient X, Y deux espaces topologiques,π une mesure positive de masse finie sur $X \times Y$ et ω sa mesure marginale par rapport à Y. Alors il existe une désintégration de π par rapport à ω*

Preuve. *La preuve repose sur le théorème de Radon Nikodym. Soit A un ensemble mesurable de X. On a que $\pi(A \times .)$ est une mesure positive finie sur Y, absolument continue par rapport à ω. Il existe donc $P(A \times .)$ intégrable par rapport à ω tel que $\pi(A \times .) = P(A \times .)\omega$. Après il faut vérifier à la main que P est bien une désintégration.*

Proposition 3.1.3. *On va donner une nouvelle caractérisation des éléments de $\Pi_M(\mu, \nu)$. Soit π dans $\Pi(\mu, \nu)$ alors si on note P sa désintégration par rapport à μ, π_x la mesure sur Y tel que $\pi_x(B) = P(B, x)$, on a que π est dans $\Pi_M(\mu, \nu)$ si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}} y \, \mathrm{d}\pi_x(y) = x$$

Preuve. *On commence par montrer que c'est une condition suffisante. Soit f une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x) y \, \mathrm{d}\pi(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} y \, \mathrm{d}\pi_x \, \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) x \, \mathrm{d}\mu(x)
\end{aligned}$$

Réciproquement si π est dans $\Pi_M(\mu, \nu)$. Posons g la fonction définie par $g(x) = \int_{\mathbb{R}} y \, \mathrm{d}\pi_x(y)$ On a que pour toute fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(g(x) - x) \, \mathrm{d}\mu(x) = 0$$

donc $g(x) = x$.

On va chercher maintenant une condition nécessaire et suffisante pour que $\Pi_M(\mu, \nu)$ soit non vide. Grâce à l'inégalité de Jensen, on a que si π est dans $\Pi_M(\mu, \nu)$ et si ϕ est une fonction convexe alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \phi(y) \, \mathrm{d}\nu(y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(y) \, \mathrm{d}\pi(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \, \mathrm{d}\pi_x(y) \, \mathrm{d}\mu(x) \\
&\geq \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \, \mathrm{d}\mu(y)
\end{aligned}$$

On a donc la condition nécessaire.

Proposition 3.1.4. *Si $\Pi_M(\mu, \nu)$ est non vide alors il faut que pour toute fonction convexe, ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \, \mathrm{d}\nu(y)$$

On montrera dans la section suivante que cette condition est en fait suffisante.

3.2 Condition nécessaire et suffisante

Définition 3.2.1 (Ordre convexe)**.** *Soit μ et ν deux mesures sur $\mathbb{R}$, alors on dit que μ est plus petite que ν dans l'ordre convexe si pour toute fonction convexe, ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,\mathrm{d}\nu(x)$$

On écrit alors : $\mu \preceq_c \nu$

Afin de simplifier les preuves, on va considérer certaines classes de fonctions qui permettent d'approcher les fonctions convexes.

Lemme 3.2.2 (Approximation)**.** *Soit μ et ν deux mesures dans $\mathcal{M}+$ de même masse et moyenne et telles que pour tout r dans R*

$$\int_{R} |x-r|\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{R} |x-r|\,\mathrm{d}\nu(x)$$

Alors $\mu \preceq_c \nu$

Preuve. *On donne un schéma de preuve. Soit ϕ une fonction convexe de R dans R. Comme μ et ν ont même moyenne et masse, on peut supposer, quitte à additionner une fonction affine que ϕ est positive. Il faut maintenant approcher ϕ par des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $x \mapsto (x-a)_+$ et $x \mapsto (x-a)_-$. L'idée est de créer une suite croissante f_n de fonctions positives de ce type qui converge simplement vers ϕ. Pour cela on utilise le caractère convexe de ϕ. Pour construire f_n, on subdivise $[-n;n]$ en intervalles disjoincts de taille 2^{-n}. Comme ϕ est convexe, on peut prendre sur chacun de ces intervalles f_n affine telle qu'elle soit de la forme voulue et telle que sur le compact $[-n;n]$ f_n soit suffisamment proche. On peut construire la suite f_n voulue, et conclure par convergence monotone.*

Il sera intéressant par la suite étant donner une mesure positive sur $\mathbb{R}$ de pouvoir l'écrire à l'aide de la mesure de Lebesgue. La proposition suivante va dans cette direction.

Proposition 3.2.3 (Fonction quantile)**.** *Soit μ mesure positive de masse finie,m , sur $\mathbb{R}$. On pose F_μ la fonction définie par*

$$F_\mu(x) = \mu(]-\infty;x])$$

On définit la fonction $G :]0;m[\to \mathbb{R}$ telle que

$$G(y) = \inf\{x, F_\mu(x) > y\}$$

Si on note $\lambda_{]0;m[}$ la restriction de la mesure de Lebesgue à l'ensemble $]0;m[$ alors,

$$G\#\lambda_{]0;m[} = \mu$$

Preuve. *On reprend les mêmes notations. On a que si* $G(y) \leq x$ *alors* $y \leq F_\mu(x)$*. D'autre part si* $y < F_\mu(x)$ *alors* $G(y) \leq x$*. On remarque que* $G\#\lambda_{]0;m[}$ *et* μ *ont même masse. D'autre part si on prend a dans* $\mathbb{R}$ *alors* $\int_{\mathbb{R}} 1_{]-\infty;a]} \,\mathrm{d}\mu(x) = F_\mu(a)$*. De plus,*

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{]-\infty;a]} \,\mathrm{d}G\#\lambda_{]0;m[}(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{G(x)\leq a} \,\mathrm{d}\lambda_{]0;m[}(x)$$

Donc cette intégrale est suprérieure ou égale à : $\int_{\mathbb{R}} 1_{x<F_\mu(a)} \,\mathrm{d}\lambda_{]0;m[}(x) = F_\mu(a)$*. Mais elle est inférieure ou égale à* $\int_{\mathbb{R}} 1_{x\leq F_\mu(a)} \,\mathrm{d}\lambda_{]0;m[}(x) = F_\mu(a)$*. Comme on a égalité sur un pi-système engendrant les boréliens et que les mesures sont de masses finies, on a donc bien* $G\#\lambda_{]0;m[} = \mu$

On va commencer par montrer que $\Pi_M(\mu, \nu)$ est non vide, lorsque $\mu \preceq_c \nu$ et μ s'écrit comme somme finie de mesures atomiques. Pour a dans $\mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de dirac en a.

Proposition 3.2.4. *Soit a dans* $\mathbb{R}$ *et* λ *un réel strictement positif. Soit* ν *mesure positive de même masse et même moyenne que* $\lambda\delta_a$*. Alors on a* $\lambda\delta_a \preceq_c \nu$ *et* $\Pi_M(\lambda\delta_a, \nu)$ *non vide.*

Preuve. *Soit* ϕ *fonction convexe, alors d'après l'inégalité de Jensen, on a :*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \,\mathrm{d}\nu(x) &\geq \lambda\phi(\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\lambda} \,\mathrm{d}\nu(x)) \\ &\geq \lambda\phi(a)\end{aligned}$$

Donc elles sont bien dans l'ordre convexe. On considère la mesure $\frac{\lambda\delta_a\otimes\nu}{\lambda}$*. De plus, si f est une fonction mesurable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)y \,\mathrm{d}\frac{\lambda\delta_a \otimes \nu}{\lambda}(x) = a\lambda f(a)$$

Donc $\frac{\lambda\delta_a\otimes\nu}{\lambda}$ *appartient à* $\Pi_M(\lambda\delta_a, \nu)$*.*

On va montrer par récurrence le résultat lorsque μ est somme finie de mesures atomiques. Pour cela on commence par prouver un lemme qui nous permettra de faire le pas de récurrence.

Lemme 3.2.5. *Soit* μ_1 *une mesure positive de masse finie. On pose* $\mu = \mu_1 + \alpha\delta_a$ *avec* α *réel strictement positif. Soit* ν *mesure dans* $\mathcal{M}_+$ *telle que* $\mu \preceq_c \nu$*. Alors il existe* ν' *telle que* $\nu' \leq \nu$ *et* $\alpha\delta_a \preceq_c \nu'$*. On pose* $\nu_1 = \nu - \nu'$*, on peut prendre* ν' *telle que* $\nu_1(I) = 0$*, où* $I = conv(Int(support(\nu')))$*, et* $\mu_1 \preceq_c \nu_1$

Preuve. *On commence par construire* ν'*. Il est naturel de le chercher comme une troncature de* ν*. On pose, pour tout s positif* $\lambda_{]s;s+m[}$ *la restriction de la mesure de Lebesgue à l'ensemble* $]s; s+m[$ *où m est la masse de* $\lambda\delta_a$*. On note* $\nu_s = G\#\lambda_{]s;s+m[}$ *(G c'est la function quantile associée à* ν*). Notons k la moyenne de* $\alpha\delta_a$*. Il faut maintenant choisir s de manière à que la moyenne de* ν_s *soit k.*

On pose pour ν dans $\mathcal{M}_+$ la fonction $B(s,\nu)$ définie par $B(s,\nu) = \int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}\nu_s(x)$. Elle est continue, puisque $B(s,\nu) = \int_{\mathbb{R}} G(t)\,\mathrm{d}\lambda_{]s;s+m[}(t)$. On va montrer que $B(0,\nu) \leq k \leq B(\nu(\mathbb{R}) - k, \nu)$. On pose $t = \nu(\mathbb{R}) - k$, montrons que $k \leq B(t,\nu)$, on a que :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} x - G(t)\,\mathrm{d}\alpha\delta_a(x) &\leq \int_{\mathbb{R}} (x - G(t))_+ \,\mathrm{d}\alpha\delta_a(x)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}} (x - G(t))_+ \,\mathrm{d}\nu(x)\\
&\leq \int_{]t;t+m[} (G(u) - G(t))\,\mathrm{d}\lambda(x)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}} (u - G(t))\,\mathrm{d}\nu_t(x)
\end{aligned}$$

Donc comme elles ont même masse ont peut simplifier les $G(t)$ et donc on a bien $k \leq B(t,\nu)$, de même on prouve que $B(0,\nu) \leq k$ et on conclut par le théorème des valeures intermédiaires qu'il existe s_0 tel que $B(s_0,\nu) = k$. On pose donc $\nu' = \nu_{s_0}$. Il faut encore montrer que μ_1 est plus petite dans l'ordre convexe que $\nu_1 = \nu - \nu'$, les autres propriétés découlent directement de la construction de ν'. On va utiliser le lemme d'approximation, on considère ϕ fonction convexe positive telle que $\limsup_{|x|\to+\infty} \frac{|\phi(x)|}{|x|} < +\infty$. On reprend les notations du lemme, on définit la fonction φ égale à ϕ sur $\mathbb{R} \setminus I$ et affine sur I. Grâce à la propriété de $\limsup$, on peut supposer φ convexe superieure à ϕ même si I est non borné.On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x) &\leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\alpha\delta_a(x)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\nu(x) - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\alpha\delta_a(x)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\nu(x) - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\nu'(x)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}\nu_1(x)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,\mathrm{d}\nu_1(x)
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du lemme.

On a tous les utils pour montrer la proposition suivante :

Proposition 3.2.6. *Soit μ somme finie de mesures atomiques. Soit ν une mesure dans $\mathcal{M}_+$ telle que $\mu \preceq_c \nu$ alors $\Pi_M(\mu,\nu)$ est non vide.*

Preuve. *On raisonne par récurrence sur le nombre de mesures atomiques nécessaire pour construire μ. On a déjà montré le cas 1. On suppose montré le* *résultat jusqu'au rang n entier positif. Supposons que* $\mu = \mu_1 + \mu'$ *où* μ' *est une mesure atomique. Alors d'après le lemme précédent, il existe* ν_1 *et* ν' *des mesures positives telles que* $\nu = \nu_1 + \nu'$, $\mu_1 \preceq_c \nu_1$ *et* $\mu' \preceq_c \nu'$. *Alors prenons* π_1 *dans* $\Pi_M(\mu_1, \nu_1)$ *et* π' *dans* $\Pi_M(\mu', \nu')$, *ce qui est possible par hypothèse de récurrence. Alors en posant* $\pi = \pi_1 + \pi'$, *on a que* π *appartient à* $\Pi_M(\mu, \nu)$. *Car si on prend* f , *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *mesurable positive alors*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x)y \,\mathrm{d}\pi(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)y \,\mathrm{d}\pi_1(x) + \int_{\mathbb{R}^2} f(x)y \,\mathrm{d}\pi'(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)x \,\mathrm{d}\pi_1(x) + \int_{\mathbb{R}^2} f(x)x \,\mathrm{d}\pi'(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x)x \,\mathrm{d}\pi(x)\end{aligned}$$

Proposition 3.2.7 (Approximation d'une mesure dans l'ordre convexe)**.** *Soit* μ *dans* $\mathcal{M}_+$, *il existe une suite* (μ_n), *telle que pour tout n,* μ_n *est somme finie de mesures atomiques,* $\mu_n \preceq_c \mu_{n+1} \preceq_c \mu$, μ_n *converge en loi vers* μ. *Il y a aussi convergence du moment d'ordre* 1.

Preuve. *L'idée de la preuve est la même que pour définir l'intégrale de Riemann. Soit k, N deux entiers non nuls. On note* $I_{k,N}$ *les intervalles bornés dans la partition de* $\mathbb{R}$ *:*

$$\bigcup_{-2^k N}^{(2^k-1)N} \left] \frac{i}{2^k}; \frac{i+1}{2^k} \right] \cup \,]N; +\infty[\,\cup\,]-\infty; -N]$$

Pour tout intervalle I dans $I_{k,N}$ *on pose* μ_I *sa restriction à I. On a alors* $\mu = \sum_{I \in I_{k,N}} \mu_I$. *Pour chaque* μ_I *on considère* τ_I *une mesure atomique de même moyenne et même masse. On pose finalement :*

$$\mu_{k,N} = \sum_{I \in I_{k,N}} \tau_I$$

Par construction, on a bien pour tout k, N entiers positifs, $\mu_{k,N} \preceq_c \mu$. *On remarque que, puisque la masse et la moyenne sur chaque intervalle se préserve,* $\mu_{k,N} \preceq_c \mu_{k+1,N}$ *et* $\mu_{k,N} \preceq_c \mu_{k,N+1}$. *De plus si f est une fonction continue telle qu'il existe a,b deux réels positifs tels que* $|f(x)| < a|x| + b$. *Soit* $\epsilon > 0$, *alors il existe N tel que* $\int_{|x|>N} |f(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) < \epsilon$. *D'où pour k entier :*

$$\begin{aligned}|\int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\mu_{k,N}(x)| &\leq |\int_{|x|>N} f(x) \,\mathrm{d}\mu(x)| + |\int_{|x|>N} f(x) \,\mathrm{d}\mu_{k,N}(x)| \\ &\quad + |\int_{|x|\leq N} f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) - \int_{|x|\leq N} f(x) \,\mathrm{d}\mu_{k,N}(x)| \\ &\leq 2\epsilon + |\int_{|x|\leq N} f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) - \int_{|x|\leq N} f(x) \,\mathrm{d}\mu_{k,N}(x)|\end{aligned}$$

Puisque $\mu_{k,N} \preceq_c \mu$. Or f est uniformément continue sur $]-N;+N]$ Donc pour k suffisament grand

$$| \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\mu_{k,N}(x)\, | \leq 3\epsilon$$

D'où le résultat en considérant $\mu_{N,N}$.

On va finir cette section en montrant que la condition d'ordre convexe est équivalente à $\Pi_M(\mu,\nu)$ soit non vide, et à l'existence d'une solution du problème (KP) sous contrainte martingale. Ces deux résultats découlent du lemme suivant :

Lemme 3.2.8. *Soit μ et ν des mesures dans $\mathcal{M}_+$. Soit π_n une suite de mesures dans $\Pi(\mu,\nu)$ telle qu'elle converge en loi vers une mesure π (on sait qu'elle appartient à $\Pi(\mu,\nu)$). Alors si on prend f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\exists L \in \mathbb{R}_+, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x,y)| \leq L(|x|+|y|+1)$ alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\pi_n(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\pi(x,y)$$

Preuve. *Tout repose sur le fait que μ et ν ont un moment d'ordre 1 fini. Par convergence dominée on a que $\lim_{M\to+\infty} \int_{|x|>M} |x|\,\mathrm{d}\mu(x) = 0$ et $\lim_{M\to+\infty} \int_{|x|>M} |y|\,\mathrm{d}\nu(y) = 0$. On considère f comme dans l'énoncé du lemme (on reprend les mêmes notations). Soit $\epsilon > 0$ il existe a telle que $\forall \pi' \in \Pi(\mu,\nu)$*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2\setminus]-a;a[^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}\pi'(x,y) &\leq \int_{\mathbb{R}^2\setminus]-a;a[^2} L(|x|+|y|+1)\,\mathrm{d}\pi'(x,y)\\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

Posons pour b réel positif $g_b = 1_{[-b;b]^2} f$. Les points de discontinuité de g_b sont inclus dans le périmètre du carré de sommet (b,b), (-b,b), (b,-b) et (-b,-b), notons ce périmétre C_b. Comme π est de masse finie, l'ensemble des C_b tels que $\pi(C_b) > q$, q rationnel positif, est forcément fini. On a donc que l'ensemble des C_b tels que $\pi(C_b) > 0$ est au plus dénombrable. Il existe donc $b_0 > a$ tel que $\pi(C_{b_0}) = 0$, d'après le théorème de Alexandroff (théorème du Portemanteau), on a que (g_{b_0} est bien une fonction mesurable bornée)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} g_{b_0}(x,y)\,\mathrm{d}\pi_n(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} g_{b_0}(x,y)\,\mathrm{d}\pi(x,y)$$

Donc il existe N entier, tel que pour tout entier n tel que si $n > N$

$$\lim_{n\to+\infty} | \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\pi_n(x,y) - \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\pi_(x,y)| < 2\epsilon$$

On a donc bien le résultat voulu.

Theorème 3.2.9. *Soit μ et ν des mesures dans $\mathcal{M}_+$. Alors $\mu \preceq_c \nu$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $\Pi_M(\mu, \nu)$ soit non vide.*

Preuve. *On considère une suite μ_n de mesures, où chaque μ_n est somme finie d'atomes, telle qu'elle converge en loi vers μ (proposition d'appoximation de mesures dans l'ordre convexe). On sait que $\Pi_M(\mu_n, \nu)$ est non vide pour tout n entier positif. On peut considérer π_n dans $\Pi_M(\mu_n, \nu)$. Montrons qu'elle est tendue. Soit $\epsilon > 0$, on remarque que μ_n est une suite tendue donc il existe un compact A_1 tel que pour tout n, $\mu_n(\mathbb{R} \setminus A_1) < \epsilon$. Il existe aussi A_2 tel que $\nu(\mathbb{R} \setminus A_2) < \epsilon$. On a alors pour tout n,*

$$\begin{aligned} \pi_n(X \times Y \setminus A_1 \times A_2) &\leq \pi_n((X \setminus A_1) \times Y) + \pi_n(X \times (Y \setminus A_2)) \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Donc la suite des π_n est tendue, quitte à extraire, on peut supposer qu'elle converge vers une mesure π dans $\Pi(\mu_n, \nu)$ (puisque les μ_n converge en loi vers μ). Montrons que π est dans $\Pi_M(\mu_n, \nu)$. Pour cela on utilise le lemme précédent, pour $f(x, y) = h(x)y$ où h est une fonction continue bornée. On a alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} h(x)y \, \mathrm{d}\pi_n(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x)y \, \mathrm{d}\pi(x, y)$$

et comme

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x)y \, \mathrm{d}\pi_n(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x)x \, \mathrm{d}\pi_n(x, y)$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x)y \, \mathrm{d}\pi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x)x \, \mathrm{d}\pi(x, y)$$

On a bien π dans $\Pi_M(\mu, \nu)$.

Theorème 3.2.10 (Existence d'une solution sous containte martingale)**.** *Soit μ et ν des mesures dans $\mathcal{M}_+$ dans l'ordre convexe ($\mu \preceq_c \nu$) et c une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $[0; +\infty]$ lsc. Alors le problème (KP) sous contrainte martingale associé admet une solution.*

Preuve. *On considère une suite minimisante π_n. C'est aussi une suite d'éléments dans $\Pi(\mu, \nu)$, on peut donc quitte à extraire, supposer qu'elle converge en loi vers une certaine mesure π dans $\Pi(\mu, \nu)$. D'après la preuve précédente π est dans $\Pi_M(\mu, \nu)$. D'après les résultats de la première section, $K(\pi) \leq \liminf_{n \to +\infty} K(\pi_n)$, puisque c est lsc. π est donc optimale.*

Chapitre 4

Existence et unicité de la solution

On contruit dans ce chapitre un plan de transport martingale monotone dont on donnera la définition. On verra que ceci est une solution optimale, dans le cas où le problème admet des solutions de coût fini, et on montrera qu'elle est unique à l'aide du lemme variationnel, dont la démonstration est donné dans l'annexe. Pour commencer, on introduit des outils qui sont nécessaires pour faire la construction, à savoir les fonctions potentielles et les ombres.

4.1 Fonctions potentielles

Proposition 4.1.1 (dérivée faible des fonctions convexes)**.** *Soit f une fonction convexe,alors elle admet une dérivée à droite, on la note f'_d. De plus $f' = f'_d$ au sens des distributions, elle est croissante, et f'' est positive (au sens des distributions).*

Preuve. *f convexe, donc son taux de variation est croissante.Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ converge lorsque h tend vers 0 par valeures positives. On pose $f'_d(x)$ cette limite. On peut definir aussi une dérivée à gauche, en faisant tendre h vers 0 par valeur négative, grâce à la croissance du taux de variations la dérivée à gauche est inférieure ou égale à la dérivée à droite. De plus si on prend $x < z < y$ des réels, on a $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ donc en faisant tendre z vers y puis vers x, on montre que f'_d est croissante. Montrons que $f' = f'_d$. Soit*

ϕ fonction dans C_c^∞, on a :

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0, h>0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)\phi(x-h)}{h}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)\phi(x)}{h}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{h\to 0, h>0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+h)\phi(x)}{h}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)\phi(x)}{h}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} f'_d(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

On a donc le résultat voulu. De plus comme f'_d est croissante, alors $f'' \geq 0$ (il suffit de prendre une fonction test et d'utiliser la limite du taux de variation de f'_d).

Theorème 4.1.2 (Fonction potentielle)**.** *Soit μ dans $\mathcal{M}_+$ non nulle, on note u_μ la fonction définie par $u_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} |x-y|\,\mathrm{d}\mu(y)$. u_μ est convexe positive. D'autre part si on pose $k = \mu(\mathbb{R})$ et $m = \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{d}\mu(x)$, on a que $lim_{|x|\to+\infty} u_\mu(x) - k|x-m| = 0$. Réciproquement, si une fonction convexe positive vérifie ces propriétés pour m positif et k un nombre réel, il existe μ dans $\mathcal{M}_+$ tel que u_μ soit égale à cette fonction.*

Preuve. *Le sens direct se déduit du théorème de convergence dominée. On montre la réciproque. Soit f une telle fonction. Alors d'après la proposition précédente, f'' est positive au sens des distributions. Donc il existe ν dans $\mathcal{M}_+$ telle que $f'' = \nu$. Or, si on pose $\mu = \frac{\nu}{2}$ alors on vérifie aisément que $u''_\mu = \nu$. Il existe alors a et b tels que $f(x) = u_\mu(x) + ax + b$, d'où $f(x) - k|x-m| = u_\mu(x) - k|x-m| + ax + b$. Posons $k' = \mu(\mathbb{R})$ et $m' = \frac{1}{k'}\int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{d}\mu(x)$. Comme $lim_{x\to\infty} u_\mu(x) - k'|x-m'| = 0$ et $lim_{|x|\to+\infty} f(x) - k|x-m| = 0$ alors*

$$lim_{|x|\to+\infty} k'|x-m'| - k|x-m| + ax + b = 0$$

D'où $k' - k + a = 0$ (x vers $+\infty$) et $k' - k - a = 0$ (x vers $-\infty$)). Donc $k = k'$ et $a = 0$. De même, on obtient $km' - km + b = 0$ et $km - km' + b = 0$. On en déduit que $b = 0$ et que $m = m'$. On a donc $f = C_\mu$

Une propriété simple qu'on va utiliser plusieures fois de la fonction potentielle est l'équivalence entre $\mu \leq \nu$ et $u_\mu - u_\nu$ concave.

Proposition 4.1.3. *Soit μ_n une suite de mesures dans $\mathcal{M}_+$ de même masse, et même moyenne. Alors on a équivalence entre : il existe μ dans $\mathcal{M}_+$ telle que μ_n converge en loi vers μ de même que le moment d'ordre 1 des μ_n converge vers celui de μ et il existe μ dans $\mathcal{M}_+$ telle que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $u_{\mu_n}(x)$ converge vers $u_\mu(x)$.*

Preuve. *On commence par le sens direct. Soit x dans $\mathbb{R}$, on pose f_x la fontion définie par, $f_x(y) = |y-x| - |y|$. C'est une fonction continue bornée, donc $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_x(y)\,\mathrm{d}\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f_x(y)\,\mathrm{d}\mu(x)$. Or comme les moments d'ordre 1 convergent aussi, on a bien que $u_{\mu_n}(x)$ converge vers $u_\mu(x)$. Réciproquement, soit φ une fonction dans C_c^∞. On a que $\int_{\mathbb{R}} 2\varphi(y)\,\mathrm{d}\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}} u_{\mu_n}(x)\varphi''(x)\,\mathrm{d}x$.*

On conclut, grâce au théorème de convergence dominée que $\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} 2\varphi(y)\,\mathrm{d}\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}} 2\varphi(y)\,\mathrm{d}\mu(x)$. *On a donc convergence vague, mais comme toutes les mesures ici considérées ont même masse, on a bien convergence en loi. Pour la convergence des moments d'ordre 1 il suffit de considérer la suite* $u_{\mu_n}(0)$ *qui converge vers* $u_\mu(0)$

4.2 Ordre convexe positif

Définition 4.2.1 (ordre convexe positif)**.** *Soient* μ *et* ν *deux mesures dans* $\mathcal{M}_+$*,on dit que* μ *est plus petit que* ν *au sens de l'ordre convexe si pour toute fonction convexe positive* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$*, on a*

$$\int \varphi \mathrm{d}\mu \leq \int \varphi \mathrm{d}\nu$$

On note $\mu \preceq_E \nu$.

On remarque immédiatement que $\mu \preceq_C \nu$ implique $\mu \preceq_E \nu$, et la réciproque est vraie si μ, ν ont même masse. Pour voir ce dernier point, il suffit de vérifier pour les fonctions $x \mapsto |x-a|$, qui s'écrivent en fait comme somme de $x \mapsto (x-a)$ et $x \mapsto 2(x-a)_+$.

Proposition 4.2.2. *Soient* μ *et* ν *dans* $\mathcal{M}_+$ *telles que* $\mu \preceq_E \nu$*, alors il existe une mesure* $\theta \leq \nu$ *telle que* $\mu \preceq_C \theta$.

Preuve. *On note* k *la masse de* μ *et* m *sa moyenne. On note* λ^s *la mesure de Lebesgue restreinte à* $[0, \nu(\mathbb{R})] \setminus [s, s+\nu(\mathbb{R})-k]$*, et on cherche* θ *sous la forme* $G_\nu \# \lambda^s$ *avec pour moyenne* m*, on remarque que c'est déjà de masse* k*. On garde les notations du chapitre précédent,* $\nu_s = G_\nu \# \lambda^s$ *et* $B(s,\nu)$ *représente la moyenne de* ν_s*, on remarque que* $B(s,\nu) = \int u \mathrm{d}\nu_s(u) = \int G_\nu(u)\mathrm{d}\lambda^s$*, donc* $B(\cdot,\nu)$ *est continue. Il suffit maintenant de montrer* $B(0,\nu) \geq k$ *et* $B(k,\nu) \leq k$ *pour pouvoir appliquer le théorème de valeurs intermédiaires. On voit que*

$$\int (u - G_\nu(\nu(\mathbb{R})-k))\mathrm{d}\mu(u) \leq \int (u - G_\nu(\nu(\mathbb{R})-k))_+ \mathrm{d}\mu(u)$$

$$\leq \int (u - G_\nu(\nu(\mathbb{R})-k))_+ \mathrm{d}\nu(u) = \int (u - G_\nu(\nu(\mathbb{R})-k))\mathrm{d}\nu_0(u)$$

Comme μ *et* ν_0 *sont de même masse, on a*

$$B(0,\nu) = \int u \mathrm{d}\nu_0(u) \geq \int u \mathrm{d}\mu(u) = k$$

On montre de même que $B(k,\nu) \leq k$ *en considérant* $u \mapsto (G_\nu(k) - u)_+$*. On a* $\theta \leq \nu$*. Pour avoir l'inégalité convexe, on prend une fonction convexe* φ*. Quitte à ajouter une fonction affine, on peut supposer que* $\varphi(G_\nu(s)) = \varphi(G_\nu(s+1-k)) = 0$*. Alors*

$$\int \varphi \mathrm{d}\mu(u) \leq \int \varphi_+ \mathrm{d}\mu(u) \leq \int \varphi_+ \mathrm{d}\nu(u) = \int \varphi \mathrm{d}\theta(u)$$

On note F_μ^ν l'ensemble des mesures η qui satisfont $\eta \leq \nu$ et $\mu \preceq_C \eta$. Cet ensemble ordonné par $\preceq_C$ admet un élément maximal (c'est en réalité ce qu'on a construit) et un élément minimal. Dans la section suivante, on va étudier son élément minimal.

4.3 Ombre

4.3.1 Existence d'une ombre

Lemme 4.3.1. *Soient μ et ν dans $\mathcal{M}_+$ telles que $\mu \preceq_E \nu$, alors il existe une mesure $S^\nu(\mu)$, qu'on appelle l'ombre de μ dans ν, qui vérifie les conditions suivantes :*
(i)$S^\nu(\mu) \leq \nu$
(ii) $\mu \preceq_C S^\nu(\mu)$
(iii) si η une autre mesure qui vérifie les conditions i) et ii), alors $S^\nu(\mu) \preceq_C \eta$

On remarque que l'ombre est unique, si elle existe. En effet, si on a deux ombres S_1 et S_2, on a $S_1 \preceq_C S_2$ et $S_2 \preceq_C S_1$. Donc elles ont les mêmes fonctions potentielles, et on a $S_1 = S_2$

Preuve. *On note k la masse de μ et m sa moyenne.On note $f = u_\mu$, $g = u_\nu$ et on passe à la recherche d'une fonction convexe h telle que*
(1) $h - g$ soit concave
(2) $f \leq h$ et $\lim_{|x|\to\infty} h(x) - k\,|x-m| = 0$
(3) $h \leq h_2$ pour toute fonction h_2 dans l'ensemble

$$U_F = \{h_2 \text{ fonction convexe vérifiant (1) et (2)}\} = \left\{h_2 = u_\eta, \eta \in F_\mu^\nu\right\}$$

On a vu que F_μ^ν est non vide, donc on peut poser

$$\bar{h} = \inf_{h_2 \in U_F} h_2$$

Il reste à vérifier que $\bar{h}$ est dans U_F. On voit aisément que $\bar{h}$ vérifie les conditions (2) et (3), et comme $\bar{h} - g = \inf_{h_2 \in U_F}(h_2 - g)$ avec les $h_2 - g$ concaves, on a $\bar{h} - g$ concave. Pour montrer la convexité de $\bar{h}$, on montre que son épigraphe $\mathcal{E}(\bar{h})$ est convexe. Pour ceci, on examine que U_F est stable par l'opération qui suit : h_1, h_2 dans U_F,

$$h_{min}(x) = \inf_{a,b\geq 0,(a,b)\neq(0,0)} \frac{bh_1(x-a) + ah_2(x+b)}{a+b}$$

Autrement dit, h_{min} est le bord de $\mathcal{E}(h_1 \wedge h_2)$.

Vu leurs comportements asymptotiques, on remarque que, lorsque x est fixé, en prenant une suite (a_n, b_n) réalisant la borne inf, on ne peut pas trouver une sous-suite telle que a_n et b_n tendent simultanément vers $+\infty$. On peut donc supposer que les a_n sont bornées, et on extrait pour avoir une convergence $a_n \to a$. Si $a = 0$, l'inf est atteinte ($= h_1(x)$) ; sinon, on montre encore une fois que les

b_n ne peuvent pas avoir une sous-suite convergeant vers $+\infty$ et on peut extraire une deuxième fois pour avoir $b_n \to b$. Ainsi la borne inf est un minimum. Par conséquent, h_{min} vérifie la condition (2). Pour voir la concavité de $h_{min} - g$, on utilise la caractérisation : f concave si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une fonction affine l avec $l(x) = f(x)$ telle que $l \geq f$ au voisinage de x. Ici, si $h_{min}(x) = h_i(x), i = 1, 2$, comme $h_{min} - g \leq h_i - g$, on prend une fonction affine qui fonctionne pour $h_i - g$ en x; sinon, $h_{min}(x) = \frac{bh_1(x-a)+ah_2(x+b)}{a+b}$, $a, b > 0$, comme h_{min} est convexe, son graphe est en dessous de la corde $[(x-a, h_1(x-a)), (x+b, h_2(x+b))]$, alors h_{min} est affine sur $[x-a, x+b]$ et $h_{min} - g$ est concave au voisinage de x. Ainsi, $h_{min} \in U_F$.

On revient à la convexité de $\bar{h}$. Soient $y < x < z$ et $\epsilon > 0$. Il existe $h_1, h_2 \in U_F$ telles que $h_1(y) \leq \bar{h}(y) + \epsilon, h_2(z) \leq \bar{h}(z) + \epsilon$. Considérons h le bord de $\mathcal{E}(min(h_1, h_2))$, alors d'après ce qui précède, h est dans U_F et $(x, h(x))$ est en dessous de la corde $[(y, h(y)), (z, h(z))]$. On fait tendre ϵ vers 0.

On donne un exemple de l'ombre d'un atome, dont on connaît bien sa forme.

Exemple 4.3.2. *Soit δ un atome de masse α au point x. On suppose que $\delta \preceq_E \nu$. Alors $S^\nu(\mu)$ sera sous la forme $G_\nu \# \lambda_{[s,s']}$, avec $s' - s = \alpha$ et sa moyenne égale à x.*

Preuve. *On a vu la façon de trouver une telle mesure $\nu' = G_\nu \# \lambda_{[s,s']}$, pour montrer que c'est bien l'ombre, on prend $\eta \in F^\nu_\delta$. On note $J = [G(s), G(s')]$, alors ν' coïncide avec ν dans $\mathring{J}$, et elle est nulle en dehors de J, donc on a $\nu' - \nu' \wedge \eta$ portée par J et $\eta - \nu' \wedge \eta$ portée par $\mathbb{R} \backslash \mathring{J}$ et soit une fonction ϕ convexe, ψ une fonction affine qui a la même valeur que phi à l'extrémité de J, on a*

$$\int \phi \mathrm{d}(\nu' - \nu' \wedge \eta) \leq \int \psi \mathrm{d}(\nu' - \nu' \wedge \eta) = \int \psi \mathrm{d}(\eta - \nu' \wedge \eta) \leq \int \phi \mathrm{d}(\eta - \nu' \wedge \eta)$$

On a donc $\mu' \preceq_C \eta$, ce qui montre le résultat.

Enfin on donne un résultat d'approximation.

Proposition 4.3.3. *Supposons que $(\mu_n)_n$ est croissante au sens $\preceq_C$ et $\mu_n \preceq_C \mu \preceq_E \nu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(\mu_n)_n, (S^\nu(\mu_n))_n$ convergent toutes les deux dans $\mathcal{M}_+$. Si on note μ_∞, S_∞ les limites, alors la mesure S_∞ est l'ombre de μ_∞ dans ν.*

Preuve. *On utilise les fonctions potentielles. On a $u_{\mu_0} \leq u_{\mu_1} \leq \cdots \leq u_{\mu_n}$ et $u_{\mu_n} \leq u_\mu$. On a pour tout x, $(u_{\mu_n}(x))$ converge, donc $u_\infty = \lim_{n\infty} u_{\mu_n}$ existe. Comme u_∞ est aussi majorée par u_μ, et tous les u_{μ_n} avec u_μ vérifient $\lim_{|x|\to\infty} u(x) - k|x-m| = 0$, on en déduit que u_∞ a la même propriété asymptotique. D'ailleurs, étant borne sup (point par point) de fonctions convexes u_{μ_n}, u_∞ est convexe. u_∞ est donc la fonction potentielle d'une mesure μ_∞, qui a la même masse et moyenne que les μ_n et μ.*

D'autre part, la famille $F^\nu_{\mu_n}$ est décroissante en n, et $F^\nu_\mu \subset \cap_n F^\nu_{\mu_n}$, donc la famille $S^\nu(\mu_n)$, étant l'élément minimal de $F^\nu_{\mu_n}$, est croissante au sens de *l'ordre convexe, et est majorée par $S^\nu(\mu)$. Pour la même raison que les μ_n, $S^\nu(\mu_n)$ converge vers S_∞ dans $\mathcal{M}_+$.*

On montre ensuite que $S^\nu(\mu_\infty) = S_\infty$. Comme pour tout n, $\mu_n \preceq_C S^\nu(\mu_n)$, on passe à la limite à l'aide des fonctions potentielles : $\mu_\infty \preceq_C S_\infty$. On a aussi $S^\nu(\mu_n) \leq \nu$, i.e. $u_{S^\nu(\mu_n)} - u_\nu$ est concave. Or $(u_{S^\nu(\mu_n)} - u_\nu)_n$ est croissante, par un argument sur les cordes, on a $u_{S_\infty} - u_\nu$ concave, i.e. $S_\infty \leq \nu$. Donc $S^\nu(\mu_\infty) \preceq_C S_\infty$. On montre l'autre inégalité. Comme $\mu_n \preceq_C \mu_\infty$, $S^\nu(\mu_n) \preceq_C S^\nu(\mu_\infty)$, en passant à la limite, on obtient $S_\infty \preceq_C S^\nu(\mu_\infty)$. Enfin, $S^\nu(\mu_\infty) \preceq_C S_\infty$ et $S_\infty \preceq_C S^\nu(\mu_\infty)$ impliquent que $S^\nu(\mu_\infty) = S_\infty$.

4.3.2 Métrique de Kantorovich

Proposition 4.3.4. *La fonction définie sur $\mathcal{M}_+$ par*

$$W(\nu,\hat{\nu}) = \begin{cases} +\infty & si\ \nu(\mathbb{R}) \neq \hat{\nu}(\mathbb{R}) \\ \sup_{f\,\textit{1-lips}}(\int f \mathrm{d}\nu - \int f \mathrm{d}\hat{\nu}) & sinon \end{cases}$$

est une distance sur $\mathcal{M}_+$ et dans un sous-espace de masse $k > 0$, la convergence pour cette distance correspond à la convergence introduite dans le chapitre 3 qui inclut la convergence pour les fonction continues bornées et la convergence pour les moments d'ordre 1. De plus, dans le cas où $\nu(\mathbb{R}) = \hat{\nu}(\mathbb{R})$, on a la formule de dualité

$$W(\nu,\hat{\nu}) = \|F_\nu - F_{\hat{\nu}}\|_1 = \|G_\nu - G_{\hat{\nu}}\|_1$$

La norme $\|\|_1$ est la norme de $L^1(\mathbb{R})$ et $L^1([0,\nu(\mathbb{R})])$ respectivement.

On admet cette proposition.

Notations : On fixe $\alpha \in]0,\nu(\mathbb{R})]$, et on note $\nu_s = G_\nu \# \lambda_{[s,s+\alpha]}$ et pour $s \in [0,\nu(\mathbb{R}) - \alpha]$, $B(s,\nu) = \int_\mathbb{R} x \mathrm{d}\nu_s(x) = \int_0^\alpha G_\nu(s+t)\mathrm{d}\lambda(t)$.

Lemme 4.3.5. *On a les propriétés vraies lorsque $\nu(\mathbb{R}) = \hat{\nu}(\mathbb{R})$:*

$$W(\nu_r,\nu_s) = |B(r,\nu) - B(s,\nu)|$$

$$W(\nu_s,\hat{\nu_s}) \leq W(\nu,\hat{\nu})$$

Preuve. *Pour la première, on note que $G_{\nu_s}(t) = G_\nu(s+t)$ sur $[0,\alpha]$ et que G_ν est croissante , donc*

$$\begin{aligned} W(\nu_r,\nu_s) = \|G_{\nu_r} - G_{\nu_s}\|_1 &= \int_0^\alpha |G_\nu(r+t) - G_\nu(s+t)| \,\mathrm{d}\lambda(t) \\ &= |B(r,\nu) - B(s,\nu)| \end{aligned}$$

Pour la seconde,

$$W(\nu_s,\hat{\nu_s}) = \|G_{\nu_s} - G_{\hat{\nu_s}}\|_1 = \int_s^{s+\alpha} |G_\nu(t) - G_{\hat{\nu}}(t)| \,\mathrm{d}\lambda(t)$$

$$\leq \int_0^{\nu(\mathbb{R})} |G_\nu(t) - G_{\hat{\nu}}(t)| \,\mathrm{d}\lambda(t) = W(\nu,\hat{\nu})$$

Soit x dans $\mathbb{R}$, considérons les ν de masse k telles que $B(0,\nu) \leq x \leq B(k-\alpha,\nu)$. Ce sont exactement les mesures telles qu'il existe $s \in \mathbb{R} : B(s,\nu) = x$, pour lesquelles $S^{\mu}(\delta)$ est bien définie et est égale à ν_s (voir l'exemple de la section précédente).

Lemme 4.3.6. *Soit $k > 0$, $\delta = \alpha\delta_x$ un atome de masse $\alpha < k$, alors $\nu \mapsto S^{\nu}(\delta)$ est continue dans son domaine de définition à l'intérieur du sous-espace de $\mathcal{M}_+$ de masse k.*

Preuve. *Soient $\nu, \hat{\nu}$ deux telles mesures. On peut écrire $S^{\nu}(\delta) = \nu_r$ et $S^{\hat{\nu}}(\delta) = \hat{\nu}_s$. Les deux mesures ont la même moyenne, d'où*

$$W(S^{\nu}(\delta), S^{\hat{\nu}}(\delta)) = W(\nu_r, \hat{\nu}_s) \leq W(\nu_r, \nu_s) + W(\nu_s, \hat{\nu}_s)$$

$$= |B(r,\nu) - B(s,\nu)| + W(\nu_s, \hat{\nu}_s)$$

$$= |B(s,\hat{\nu}) - B(s,\nu)| + W(\nu_s, \hat{\nu}_s) = 2W(\nu_s, \hat{\nu}_s) \leq 2W(\nu, \hat{\nu})$$

4.3.3 Formule de sommation

La formule de sommation est nécessaire pour faire la construction du plan de tranport martingale monotone et pour démontrer son unicité. Pour démontrer cette formule, on commence par énoncer quelques lemmes.

Lemme 4.3.7. *Soit δ un atome et supposons que $\delta \preceq_E \eta \leq \nu$, alors*

$$\eta - S^{\eta}(\delta) \leq \nu - S^{\nu}(\delta)$$

Preuve. *$\delta \preceq_E \nu$ donc $S^{\nu}(\delta)$ est bien définie. On a vu la forme de l'ombre pour un atome : $S^{\nu}(\delta) = G_{\nu}\#\lambda_Q$, où Q est un sous-intervalle de $[0, \nu(\mathbb{R})]$. Donc $S^{\nu}(\delta)$ coïncide avec ν sur un intervalle $\mathring{I}$ et est nulle hors I, I fermé, $S^{\eta}(\delta)$ coïncide avec η sur un intervalle $\mathring{J}$ et est nulle hors J, J fermé. Quitte à restreindre, on peut supposer que les extrémités de I se trouvent dans le support de $S^{\nu}(\delta)$, de même pour $S^{\eta}(\delta)$. En appliquant à des fonctions $x \mapsto (x-u)_-$ et $x \mapsto (x-u)_+$, on montre que $I \subseteq J$. On peut ainsi écrire $S^{\eta}(\delta) = G_{\nu}\#\lambda_{Q'} \wedge \eta$ avec Q' un intervalle qui contient Q. Finalement,*

$$\eta - S^{\eta}(\delta) = \eta - G_{\nu}\#\lambda_{Q'} \wedge \eta = (\eta - G_{\nu}\#\lambda_{Q'})_+$$

$$\leq \nu - G_{\nu}\#\lambda_{Q'} \leq \nu - G_{\nu}\#\lambda_Q = \nu - S^{\nu}(\delta)$$

Ici on utilise des propriétés de décomposition d'une mesure signée.

On commence par trouver la formule de sommation des cas particuliers.

Lemme 4.3.8. *Considérons $\delta+\gamma$ où δ est un atome. Supposons que $\delta+\gamma \preceq_E \nu$, alors $\gamma \preceq_E \nu - S^{\nu}(\delta)$ et*

$$S^{\nu}(\delta+\gamma) = S^{\nu}(\delta) + S^{\nu - S^{\nu}(\delta)}(\gamma)$$

Preuve. *On note $\nu' = \nu - S^\nu(\delta)$, et on suppose que $S^\nu(\delta)$ est concentrée sur $\bar{I}$, où I un intervalle. Un résultat direct est $\nu'(I) = 0$. Soit $\varphi \geq 0$ une fonction convexe telle que $\limsup_{|x|\to\infty} \frac{|\varphi(x)|}{|x|} < +\infty$. On introduit ψ qui coïncide avec φ sur $\mathbb{R}\backslash I$ et qui est linéaire sur I. Alors*

$$\int \varphi \mathrm{d}\gamma \leq \int \psi \mathrm{d}\gamma \leq \int \psi \mathrm{d}\nu - \int \psi \mathrm{d}\delta$$

Or ψ est linéaire sur I, donc $\int \psi \mathrm{d}\delta = \int \psi \mathrm{d}S^\nu(\delta) \geq \int \varphi \mathrm{d}S^\nu(\delta)$, par conséquent,

$$\int \varphi \mathrm{d}\gamma \leq \int \psi \mathrm{d}\nu - \int \varphi \mathrm{d}S^\nu(\delta) = \int \varphi \mathrm{d}\nu'$$

D'où $\gamma \preceq_E \nu'$.

On remarque que $\delta + \gamma \preceq_C S^\nu(\delta) + S^{\nu - S^\nu(\delta)}(\gamma)$ et $S^\nu(\delta) + S^{\nu - S^\nu(\delta)}(\gamma) \leq \nu$, donc $S^\nu(\delta + \gamma) \preceq_C S^\nu(\delta) + S^{\nu - S^\nu(\delta)}(\gamma)$.

Soit $\eta \leq \nu$ telle que $\delta + \gamma \preceq_C \eta$, alors $S^\eta(\delta) + S^{\eta - S^\eta(\delta)}(\gamma) \leq S^\eta(\delta) + \eta - S^\eta(\delta) = \eta$. Mais $S^\eta(\delta) + S^{\eta - S^\eta(\delta)}(\gamma)$ et η ont la même masse, donc $S^\eta(\delta) + S^{\eta - S^\eta(\delta)}(\gamma) = \eta$. Comme $\eta \leq \nu$, on a d'après le lemme précédent $\eta - S^\eta(\delta) \leq \nu - S^\nu(\delta)$, donc $F_\gamma^{\eta - S^\eta(\delta)} \subseteq F_\gamma^{\nu - S^\nu(\delta)}$, ce qui implique que $S^{\nu - S^\nu(\delta)}(\gamma) \preceq_C S^{\eta - S^\eta(\delta)}(\gamma)$, de plus, on a $S^\nu(\delta) \preceq_C S^\eta(\delta)$, d'où en sommant,

$$S^\nu(\delta) + S^{\nu - S^\nu(\delta)}(\gamma) \preceq_C \eta$$

Ainsi $S^\nu(\delta) + S^{\nu - S^\nu(\delta)}(\gamma) \preceq_C S^\nu(\delta + \gamma)$.

Une conséquence immédiate est le lemme suivant.

Lemme 4.3.9 (L'ombre d'une somme finie d'atomes)**.** *Soit $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'atomes au point x, de masse $\alpha_i \in [0, +\infty[$. Pour tout n, $\mu_n = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$ et on suppose que $\mu_n \preceq_E \nu$. La suite $(\nu_n)_n$ définie par $\nu_n = S^\nu(\mu_n)$ vérifie les relations de récurrence :*

(i) $\nu_0 = 0$

(ii) $\nu_n = \nu_{n-1} + S^{\nu - \nu_{n-1}}(\delta_n)$ pour $n \geq 1$

Preuve. *On fait par induction à l'aide du lemme précédent.Les cas $n = 0, 1$ sont triviaux. Supposons le vrai jusqu'à n ($n \geq 1$). On note $\mu'_n = \delta_2 + \cdots + \delta_{n+1}$. Comme $\mu_{n+1} = \delta_1 + \mu'_n \preceq_E \nu$, on peut appliquer le lemme, qui donne $\mu'_n \preceq_E \nu'$ et*

$$S^\nu(\mu_{n+1}) = S^\nu(\delta_1) + S^{\nu'}(\mu'_n)$$

Où on note $\nu' = \nu - \nu_1$. Par l'hypothèse d'induction, l'ombre $\nu'_n = S^{\nu'}(\mu'_n)$ vérifie $\nu'_n = \nu'_{n-1} + S^{\nu' - \nu'_{n-1}}(\delta_{n+1})$. Or par le lemme précédent, on a $\nu_n = \nu_1 + \nu'_{n-1}$. On reprend l'égalité en haut, qui donne

$$\nu_{n+1} = \nu_1 + \nu'_n = \nu_1 + \nu'_{n-1} + S^{\nu' - \nu'_{n-1}}(\delta_{n+1}) = \nu_n + S^{\nu' - \nu'_{n-1}}(\delta_{n+1})$$

Or $\nu' - \nu'_{n-1} = (\nu_1 + \nu') - (\nu_1 + \nu'_{n-1}) = \nu - \nu_n$, d'où le résultat.

On utilise ce lemme et les résultats d'approximations pour déduire le reste de cette partie.

Lemme 4.3.10. *Considérons $\gamma+\delta$ où δ est un atome. Supposons que $\gamma+\delta \preceq_E \nu$, alors $\delta \preceq_E \nu - S^\nu(\gamma)$ et*

$$S^\nu(\gamma+\delta) = S^\nu(\gamma) + S^{\nu - S^\nu(\gamma)}(\delta)$$

Preuve. *On a démontré le cas où γ est une somme finie d'atomes. On peut considérer une telle suite $\gamma^{(n)}$ qui s'approche de γ de façon croissante au sens de l'ordre convexe (voir la proposition 3.2.7). On a*

$$S^\nu(\gamma^{(n)}+\delta) = S^\nu(\gamma^{(n)}) + S^{\nu - S^\nu(\gamma^{(n)})}(\delta)$$

Par la proposition 4.3.3, $S^\nu(\gamma^{(n)})$ converge vers $S^\nu(\gamma)$ et $S^\nu(\gamma^{(n)}+\delta)$ converge vers $S^\nu(\gamma+\delta)$. On a aussi $\delta \preceq_E \nu - S^\nu(\gamma^{(n)})$, en passant à la limite (cela garde l'inégalité $\preceq_E$), $\delta \preceq_E \nu - S^\nu(\gamma)$, et que δ est de masse plus petite que ν, on applique le lemme 4.3.6 et on obtient $S^{\nu - S^\nu(\gamma^{(n)})}(\delta)$ converge vers $S^{\nu - S^\nu(\gamma)}(\delta)$.

On arrive finalement à la formule générale grâce à tout ce qui précède.

Theorème 4.3.11 (Formule de sommation)**.** *Soient γ_1, γ_2 et ν trois mesures de $\mathcal{M}_+$ et supposons que $\gamma_1+\gamma_2 \preceq_E \nu$, alors $\gamma_2 \preceq_E \nu - S^\nu(\gamma_1)$ et*

$$S^\nu(\gamma_1+\gamma_2) = S^\nu(\gamma_1) + S^{\nu - S^\nu(\gamma_1)}(\gamma_2)$$

Preuve. *Si γ_2 est une somme finie d'atomes, alors en faisant une récurrence à l'aide du lemme précédent, on peut montrer la formule. Dans le cas général, comme précédemment, on approche γ_2 par une suite $(\gamma_2^{(n)})$ consitituée de somme finie d'atomes et qui est croissante au sens de l'ordre convexe. On a*

$$S^\nu(\gamma_1+\gamma_2^{(n)}) = S^\nu(\gamma_1) + S^{\nu - S^\nu(\gamma_1)}(\gamma_2^{(n)})$$

et il suffit de tendre n vers l'infini.

4.4 Plan de transport martingale monotone

Le fait que $S^\nu(\mu) \leq S^\nu(\mu')$ lorsque $\mu \leq \mu' \preceq_E \nu$ nous sert à construire un plan de transport martingale monotone. On donne d'abord sa définition.

4.4.1 Définition et lemme variationnel

Définition 4.4.1. *Un plan de transport martingale π sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est dit monotone s'il existe un ensemble borélien $\Gamma \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ avec $\pi(\Gamma)=1$ tel que pour (x,y^-), (x,y^+), (x',y') des points dans Γ, on ne peut pas avoir :*

$$x < x', y^- < y' < y^+$$

Définition 4.4.2. *Soit α une mesure sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ possédant un moment d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable. Soit α' une autre mesure dans le même espace vérifiant la même propriété. On dit que α' est un compétiteur de α si elles ont les même lois marginales et pour $proj^x_\# \alpha$ presque tout x,*

$$\int y \mathrm{d}\alpha_x(y) = \int y \mathrm{d}\alpha'_x(y)$$

où $(\alpha_x)_{x\in\mathbb{R}}$ et $(\alpha'_x)_{x\in\mathbb{R}}$ sont des désintégrations par rapport à $proj^x_\# \alpha$.

Lemme 4.4.3 (variationnel)**.** *Supposons μ, ν deux mesures sur $\mathbb{R}$ dans l'ordre convexe, $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de coût satisfaisant $c(x, y) \geq a(x) + b(y)$, avec a,b intégrables. Supposons que $\pi \in \Pi_M(\mu, \nu)$ soit une solution optimale de coût fini, alors il existe un ensemble borélien Γ tel que $\pi(\Gamma) = 1$ et que, si α est une mesure sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, à support fini inclus dans Γ, l'inégalité ci-dessous est vérifiée pour tout α' compétiteur de α :*

$$\int c \mathrm{d}\alpha \leq \int c \mathrm{d}\alpha'$$

4.4.2 Construction de π_{lc}

Theorème 4.4.4 (définition de π_{lc})**.** *Supposons que $\mu \preceq_C \nu$ deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$, alors il existe une unique mesure de probabilité π_{lc} sur $\mathbb{R}^2$ qui transporte $\mu_{]-\infty,x]}$ à $S^\nu(\mu_{]-\infty,x]})$ pour tout x. De plus, π_{lc} est dans $\Pi_M(\mu, \nu)$.*

$S^\nu(\mu_{]-\infty,x]})$ est bien définie car $\mu_{]-\infty,x]} \leq \mu \preceq_C \nu$ implique que $\mu_{]-\infty,x]} \preceq_E \nu$.

Preuve. *La condition dans l'énoncé du théorème implique que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\pi_{lc}(]-\infty, x] \times A) = S^\nu(\mu_{]-\infty,x]})(A)$$

Par la formule de sommation, on peut montrer que $(x, y) \mapsto S^\nu(\mu_{]-\infty,x]})(]-\infty, y])$ est une fonction de répartition. Donc cela définit une mesure de façon unique sur la tribu produit.

On voit aisément que $proj^x_\# \pi_{lc} = \mu$, et $proj^y_\# \pi_{lc} = S^\nu(\mu)$. On a $S^\nu(\mu) \leq \nu$ et $S^\nu(\mu)$, ν ont la même masse 1, donc $S^\nu(\mu) = \nu$, i.e. $proj^y_\# \pi_{lc} = \nu$. Ainsi $\pi_{lc} \in \Pi_(\mu, \nu)$ et on vérifie enfin la propriété martingale. Il suffit de vérifier pour des fonctions caractéristiques de la forme $\rho = \mathbf{1}_{]-\infty,x']}, x' \in \mathbb{R}$.

$$\int \rho(x)(y - x)\mathrm{d}\pi_{lc}(x, y) = \int y \mathrm{d}S^\nu(\mu_{]-\infty,x']})(y) - \int x \mathrm{d}(\mu_{]-\infty,x']})(x) = 0$$

La dernière égalité vient du fait que $\mu_{]-\infty,x']} \preceq_C S^\nu(\mu_{]-\infty,x']}$

Theorème 4.4.5. *Le plan de transport martingale construit π_{lc} est monotone.*

Preuve. *On considère les fonctions de coût de la forme*

$$c_{s,t}(x,y) = \mathbf{1}_{]-\infty,s]}(x)\,|y-t|$$

On montre que pour tout (s,t), π_{lc} est un plan optimal pour $c_{s,t}$. Soit $\pi \in \Pi_M(\mu,\nu)$, on note $\nu_s^\pi = proj_\#^y(\pi_{]-\infty,s]\times\mathbb{R}})$. Alors $\nu_s^\pi \leq \nu$ et $\mu_{]-\infty,s]} \preceq_C \nu_s^\pi$. La première égalité est évidente et on montre la deuxième. Les deux mesures ont la même masse et moyenne (propriété martingale). On vérifie l'ordre convexe pour les fonctions $x \mapsto (x-a)_+$, où $a \in \mathbb{R}$. Cela suffira parce qu'on peut écrire toute fonction $x \mapsto |x-a|$ comme somme de $x \mapsto (x-a)$ et $x \mapsto 2(x-a)_+$.

$$\int (x-a)_+ \mathrm{d}\mu_{]-\infty,s]}(x) = \int \mathbf{1}_{[a,s]}(x)(x-a)\mathrm{d}\mu(x) = \int \mathbf{1}_{[a,s]}(x)(x-a)\mathrm{d}\pi(x,y)$$

$$=^{(*)} \int \mathbf{1}_{[a,s]}(x)(y-a)\mathrm{d}\pi(x,y)$$

$$\leq \int \mathbf{1}_{]-\infty,s]}(x)(y-a)_+\mathrm{d}\pi(x,y) = \int (y-a)_+\mathrm{d}\nu_s^\pi(y)$$

Pour (*), on a utilisé la propriété martingale de π. Par définition de l'ombre, on a $S^\nu(\mu_{]-\infty,s]}) \preceq_C \nu_s^\pi$ et on en déduit que

$$\int c_{s,t}(x,y)\mathrm{d}\pi_{lc}(x,y) = \int |y-t|\,\mathrm{d}S^\nu(\mu_{]-\infty,s]})(y) \leq \int |y-t|\,\mathrm{d}\nu_s^\pi(y)$$

$$= \int c_{s,t}(x,y)\mathrm{d}\pi(x,y)$$

En appliquant le lemme variationnel aux $c_{s,t}$ avec π_{lc} optimal, on obtient des ensembles boréliens $\Gamma_{s,t}$ de mesure 1. On note $\Gamma = \bigcap_{s,t\in\mathbb{Q}^2}\Gamma_{s,t}$, on a $\pi_{lc}(\Gamma) = 1$ et on montre la monotonie dans Γ. Supposons par l'absurde qu'il existe $(x,y^-), (x,y^+)$, (x',y') dans Γ tels que $x < x', y^- < y' < y^+$, ils sont aussi dans un $\Gamma_{s,t}$ dont on choisit (s,t) pour avoir $s \in]x,x'[$ et $t \in]y',y^+[$. $\lambda \in]0,1[$ tel que $y' = (1-\lambda)y^- + \lambda y^+$. On pose

$$\alpha = (1-\lambda)\delta_{(x,y^-)} + \lambda\delta_{(x,y^+)} + \delta_{(x',y')}$$

$$\alpha' = (1-\lambda)\delta_{(x',y^-)} + \lambda\delta_{(x',y^+)} + \delta_{(x,y')}$$

On voit que α est à support fini dans $\Gamma_{s,t}$, et on vérifie sans peine que α' est un compétiteur de α. Mais

$$\int c_{s,t}\mathrm{d}\alpha - \int c_{s,t}\mathrm{d}\alpha' = 2\lambda(y^+ - t) > 0$$

Ce qui contredit le lemme variationnel, qui nous dit que α a un coût inférieur à ses compétiteurs.

4.4.3 Unicité de π_{lc}

On commence par deux lemmes qui sont nécessaires pour la preuve de l'unicité.

Lemme 4.4.6. *Si $\mu \preceq_C \nu$, alors on est dans l'un des cas suivants :*
(i) $\mu(]a, +\infty[) > 0$ et $\nu(]a, +\infty[) > 0$ pour tout a
(ii) $a = sup(supp(\mu))$ est finie et $\nu(]a, +\infty[) > 0$
(iii) $a = sup(supp(\mu))$ est finie et $\nu(]a, +\infty[) = 0$, de plus, $\nu(\{a\}) \geq \mu(\{a\})$

Preuve. *On a $\int (x-a)_+ \mathrm{d}\mu \leq \int (x-a)_+ \mathrm{d}\nu$, ce qui implique que $sup(supp(\mu)) \leq sup(supp(\nu))$. Le cas (i) correspond à $sup(supp(\mu)) = sup(supp(\nu)) = +\infty$; le cas (ii) correspond à $sup(supp(\mu)) < sup(supp(\nu))$; le cas (iii) correspond à $sup(supp(\mu)) = sup(supp(\nu)) < +\infty$. Dans le cas (iii), on utilise la propriété martingale.*

$$a\mu(\{a\}) = \int \mathbf{1}_{\{a\}}(x) x \mathrm{d}\pi(x,y) = \int \mathbf{1}_{\{a\}}(x) y \mathrm{d}\pi(x,y) = \int y \mathrm{d}\nu^{\pi}_{\{a\}}(y)$$

Où on note $\nu^{\pi}_{\{a\}}(y) = proj^y_{\#}\pi_{\{a\}\times\mathbb{R}}$, et $\nu^{\pi}_{\{a\}}(y)$ est nulle sur $]a, +\infty[$, donc

$$\int y \mathrm{d}\nu^{\pi}_{\{a\}}(y) \leq a\nu^{\pi}_{\{a\}}(\mathbb{R}) = a\mu(\{a\})$$

L'égalité a lieu donc $\nu^{\pi}_{\{a\}}$ est portée par $\{a\}$, alors $\nu(\{a\}) \geq \nu^{\pi}_{\{a\}}(\{a\}) = \mu(\{a\})$

On définit pour u,v réels et $u < v$, $g_{u,v} = (v - x)\mathbf{1}_{[u,v]}(x)$. On remarque que g est convexe sur $[u, +\infty[$.

Lemme 4.4.7. *Soit σ une mesure signée non triviale de masse 0. Notons $\sigma = \sigma^+ - \sigma^-$ sa décomposition de Jordan. Alors il existe $a \in supp(\sigma^+)$ et $b > a$ tels que $\int g_{a,b}(x)\mathrm{d}\sigma(x) > 0$.*

Preuve. *On remarque que, au lieu d'approximer f positive mesurable par rapport à une mesure positive μ par une suite croissante de fonctions en escalier, on peut modifier les escaliers en un segment de $\mathbb{R}^2$ de pente -1, dont l'extrémité de gauche coïncide avec celui de l'escalier. On définit une nouvelle intégrale avec ces fonctions en escaliers biaisés, notée $I'(f)$. On arrive à montrer que $I(f) - \int \epsilon \mathrm{d}\mu \leq I'(f) \leq I(f)$ pour tout ϵ, comme μ est de masse finie, $I'(f) = I(f)$.*

On note que tout morceau d'escalier biaisé s'écrit comme $g_{u,v} - g_{u,v'}$, avec $u \leq v \leq v'$. Comme σ est non triviale, il existe u et $\alpha > 0$ tels que $\int g_{u,u+\alpha}\mathrm{d}\sigma \neq 0$ car sinon toute intégrale des fonctions en escaliers biaisés est nulle. On fixe α, et $\iint g_{u,u+\alpha}(x)\mathrm{d}\sigma(x)\mathrm{d}u = 0$, il existe donc u, α tels que $\int g_{u,u+\alpha}\mathrm{d}\sigma > 0$. On voit donc que $supp(\sigma_+) \cap [u, u+\alpha] \neq \varnothing$. On pose $a = \inf\{supp(\sigma_+) \cap [u, u+\alpha]\}, b = u + \alpha$, alors $\int g_{a,b}\mathrm{d}\sigma \geq \int g_{u,u+\alpha}\mathrm{d}\sigma > 0$

Theorème 4.4.8. *Soit π un plan de transport martingale monotone de μ à ν, alors $\pi = \pi_{lc}$*

Preuve. *On note*

$$\nu_x^\pi = proj_\#^y \pi_{]-\infty,x]\times\mathbb{R}}$$

$$\nu_x^{\pi_{lc}} = proj_\#^y \pi_{lc|]-\infty,x]\times\mathbb{R}} = S^\nu(\mu_{]-\infty,x]})$$

Si pour tout x, $\nu_x^\pi = \nu_x^{\pi_{lc}}$, *alors par la définition de* π_{lc}, $\pi = \pi_{lc}$. *On suppose par l'absurde qu'il existe* x *tel que* $\pi \neq \pi_{lc}$, *on note* $\sigma_x = \nu_x^{\pi_{lc}} - \nu_x^\pi \neq 0$, *par le lemme précédent, on peut trouver* $u \in supp(\sigma^+)$ *et* $v > u$ *tels que* $\int g_{u,v}\mathrm{d}\sigma_x > 0$. *On note* Γ *l'ensemble de monotonie de* π. *Comme* $\sigma_x^+ \leq \nu - \nu_x^\pi = proj_\#^y \pi_{]x,+\infty[\times\mathbb{R}}$ *et* $u \in supp(\sigma_x^+)$, *pour tout intervalle ouvert* I *contenant* u *on a* $\pi(]x,+\infty[\times I) > 0$, *ainsi on peut trouver une suite* (x_n, u_n) *telle que* $x_n > x, (x_n, u) \in \Gamma$ *et* $u_n \to u$. *Par la monotonicité de* Γ, *si on note* $\Gamma_t = \{y \in \mathbb{R} : (t,y) \in \Gamma\}$, *alors pour tout* $t \leq x$ *et tout* n, Γ_t *ne peut pas intersectionner* $]-\infty, u_n[$ *et* $]u_n, +\infty[$ *en même temps, donc en passant* n *à l'infini, on a*

$$\text{pour tout } t \leq x,\ \Gamma_t \cap]-\infty, u[= \varnothing \text{ ou } \Gamma_t \cap]u, +\infty[= \varnothing$$

On distingue deux cas selon les positions relatives de u *et* x.

(1) $u < x$. *Le fait que* π *soit un plan de transport martingale implique que l'ensemble des* $t \leq u$ *tels que* $\Gamma_t \subseteq]u, +\infty[$ *est* μ *négligeable, ainsi* π *transporte la masse de* $]-\infty, u]$ *à* $]-\infty, u]$. *De même,* π *transporte la masse de* $]u, x]$ *à* $[u, +\infty[$.

(i) On a $\mu_{]-\infty,u]} \preceq_C \nu_u^\pi$ *(voir la démonstration dans le théorème où on montre que* π_{lc} *est monotone), et* $\nu_u^\pi \leq \nu$, *donc par la définition de* π_{lc}, $\nu_u^{\pi_{lc}} \preceq_C \nu_u^\pi$. *On applique le lemme 4.4.6 et on obtient que* $\nu_u^{\pi_{lc}}$ *est concentrée sur* $]-\infty, u]$, *de plus,*

$$\nu_u^{\pi_{lc}}(\{u\}) \leq \nu_u^\pi(\{u\})$$

(ii) On montre que $\nu_x^{\pi_{lc}} - \nu_u^{\pi_{lc}} \preceq_C \nu_x^\pi - \nu_u^\pi$. *On voit que* $\nu_x^\pi - \nu_u^\pi$ *est concentrée sur* $[u, +\infty[$, *donc*

$$\nu_x^\pi - \nu_u^\pi \leq (\nu - \nu_u^\pi)_{[u,+\infty[} \leq^{(*)} (\nu - \nu_u^{\pi_{lc}})_{[u,+\infty[} \leq \nu - \nu_u^{\pi_{lc}}$$

(*) vient du fait que ν_u^π *et* $\nu_u^{\pi_{lc}}$ *sont concentrées sur* $]-\infty, u]$ *et que* $\nu_u^{\pi_{lc}}(\{u\}) \leq \nu_u^\pi(\{u\})$. *De plus on a* $\mu_{]u,x]} \preceq_C \nu_x^\pi - \nu_u^\pi$ *(voir la démonstration du théorème de monotonie de* π_{lc}, *l'idée est la même). Finalement, on a* $S^{\nu - \nu_u^{\pi_{lc}}}(\mu_{]u,x]}) \preceq_C \nu_x^\pi - \nu_u^\pi$. *Or par la formule de sommation des ombres,*

$$\begin{aligned}\nu_x^{\pi_{lc}} &= S^\nu(\mu_{]-\infty,u]} + \mu_{]u,x]}) = S^\nu(\mu_{]-\infty,u]}) + S^{\nu-\nu_u^{\pi_{lc}}}(\mu_{]u,x]}) \\ &= \nu_u^{\pi_{lc}} + S^{\nu-\nu_u^{\pi_{lc}}}(\mu_{]u,x]})\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\nu_x^{\pi_{lc}} - \nu_u^{\pi_{lc}} = S^{\nu-\nu_u^{\pi_{lc}}}(\mu_{]u,x]}) \preceq_C \nu_x^\pi - \nu_u^\pi$$

On remarque que $g_{u,v}$ *est convexe sur* $[u, +\infty[$, *donc* $\int g_{u,v}\mathrm{d}(\nu_x^{\pi_{lc}} - \nu_u^{\pi_{lc}}) \leq \int g_{u,v}\mathrm{d}(\nu_x^\pi - \nu_u^\pi)$. *D'ailleurs,* $\int g_{u,v}\mathrm{d}\nu_u^{\pi_{lc}} \leq \int g_{u,v}\mathrm{d}\nu_u^\pi$ *car* $\nu_u^{\pi_{lc}}(\{u\}) \leq \nu_u^\pi(\{u\})$. *En sommant, on obtient* $\int g_{u,v}\mathrm{d}\nu_x^{\pi_{lc}} \leq \int g_{u,v}\mathrm{d}\nu_x^\pi$, *ce qui est contradictoire avec* $\int g_{u,v}\mathrm{d}\sigma_x > 0$.

(2) $x \leq u$. *Le plan* π *transporte la masse de* $]-\infty, x]$ *à* $]-\infty, u]$, *donc* ν_x^π *est concentrée sur* $]-\infty, u]$. *On a* $\nu_x^{\pi_{lc}} \preceq_C \nu_x^\pi$ *et en appliquant le lemme 4.4.6, on a* $\int g_{u,v}\mathrm{d}\nu_x^{\pi_{lc}} \leq \int g_{u,v}\mathrm{d}\nu_x^\pi$, *contradiction.*

4.5 Optimalité

On va montrer que le plan de transport martingale monotone est l'unique solution optimale, s'il existe des plans de coût fini. Pour démontrer ceci, on montre que toute solution optimale doit être monotone, comme on connaît déjà l'existence d'une solution optimale grâce à la compacité faible de $\Pi_M(\mu,\nu)$.

Theorème 4.5.1. *Supposons que $c(x,y) = h(y-x)$ vérifiant la condition suffisante d'intégrabilité, i.e. $c(x,y) \geq a(x) + b(y)$, avec a,b intégrables et h une fonction différentiable de dérivée strictement convexe. S'il existe un plan de transport martingale fini, alors π_{lc} est l'unique solution optimale.*

Preuve. *Soit π une solution optimale finie. En appliquant le lemme variationnel, on obtient un ensemble borélien Γ tel que $\pi(\Gamma) = 1$. On montre la monotonie sur Γ par l'absurde. Supposons qu'il existe $(x,y^-),(x,y^+),(x',y')$ dans Γ tels que $x < x', y^- < y' < y^+$. Soit $\lambda \in]0,1[$ tel que $y' = (1-\lambda)y^- + \lambda y^+$. On considère*

$$\alpha = (1-\lambda)\delta_{(x,y^-)} + \lambda\delta_{(x,y^+)} + \delta_{(x',y')}$$

$$\alpha' = (1-\lambda)\delta_{(x',y^-)} + \lambda\delta_{(x',y^+)} + \delta_{(x,y')}$$

On voit que α' est un compétiteur de α, on calcule

$$\int c\mathrm{d}\alpha - \int c\mathrm{d}\alpha' = d(x) - d(x')$$

où $d(t) = (1-\lambda)h(y^- - t) + \lambda h(y^+ - t) - h(y' - t)$
Or par convexité stricte de h',

$$d'(t) = -(1-\lambda)h'(y^- - t) - \lambda h'(y^+ - t) + h'(y' - t) < 0$$

Ce qui implique que $d(x) - d(x') > 0$, contradictoire avec le lemme variationnel.

On peut aussi penser aux autres cas où le plan monotone est une solution optimale.

Annexe A

Lemme variationnel

La preuve du lemme variationnel repose sur quelques résultats difficiles à démontrer, on va donc les admettre.

Theorème A.0.2. *Soit (Z,ζ) un espace polonais de probabilité et $M \subseteq Z^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors on est dans l'un des deux cas suivants :*

(i) Il existe une suite $M_i \subseteq Z^n, i = 1,..,n$ telle que $M \subseteq \cup_{i=1}^n M_i$ et que pour tout i, $\zeta(proj^i(M_i)) = 0$.

(ii) Il existe une mesure γ sur Z^n qui vérifie $\forall i, proj^i_{\#}\gamma \leq \zeta$ et $\gamma(M) > 0$.

Une preuve de ce théorème se déduit du théorème de Kellerer, voir [6].

Lemme A.0.3 (variationnel)**.** *Supposons μ, ν deux mesures sur $\mathbb{R}$ dans l'ordre convexe, $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de coût satisfaisant $c(x,y) \geq a(x)+b(y)$, avec a,b intégrables. Supposons que $\pi \in \Pi_M(\mu,\nu)$ soit une solution optimale de coût fini, alors il existe un ensemble borélien Γ tel que $\pi(\Gamma) = 1$ et que, si α est une mesure sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, à support fini inclus dans Γ, l'inégalité ci-dessous est vérifiée pour tout α' compétiteur de α :*

$$\int \mathrm{c}\mathrm{d}\alpha \leq \int \mathrm{c}\mathrm{d}\alpha'$$

Preuve. *On fixe $n \in \mathbb{N}$. On veut commencer par construire un Γ_n qui vérifie la propriété d'optimalité pour les α tels que $|supp(\alpha)| \leq n$. On pose*

$$M = \left\{ \begin{array}{c} ((x_i,y_i))_{1\leq i \leq n} \in (\mathbb{R}^2)^n : \exists \alpha \textit{ tel que} \\ 1)\alpha \textit{ est une mesure sur } \mathbb{R}^2 \textit{ et supp}(\alpha) \subseteq \{(x_i,y_i), 1 \leq i \leq n\} \\ 2)\exists \alpha' \textit{ compétiteur de } \alpha, \int \mathrm{c}\mathrm{d}\alpha' < \int \mathrm{c}\mathrm{d}\alpha \end{array} \right\}$$

On discute selon les deux cas du théorème précédent :

(1) Il existe une suite $M_i \subseteq (\mathbb{R}^2)^n, i = 1,..,n$ telle que $M \subseteq \cup_{i=1}^n M_i$ et que pour tout i, $\pi(proj^i(M_i)) = 0$. On note $N = \cup_{i=1}^n proj^i M_i$, alors $\pi(N) = 0$. On pose $\Gamma_n = \mathbb{R}^2 \backslash N$, qui est de mesure 1, on a $M \subseteq (N\times(\mathbb{R}^2)^{n-1})\cup\cdots\cup((\mathbb{R}^2)^{n-1}\times N)$, ce qui implique que $(\Gamma_n)^n \cap M = \varnothing$, Γ_n a donc la propriété d'optimalité

voulue pour tout α telle que $|supp(\alpha)| \leq n$. Enfin, en posant $\Gamma = \cap_{n\in\mathbb{N}^*}\Gamma_n$, on a bien l'ensemble voulu qui fonctionne pour tout α à support fini.

(2) On veut montrer que ce cas ne peut pas avoir lieu par une contradiction avec l'optimalité de la mesure π.

D'après le théorème, il existe une mesure γ sur $(\mathbb{R}^2)^n$ qui vérifie $\forall i, proj^i_{\#}\gamma \leq \pi$ et $\gamma(M) > 0$. Quitte à restreindre et diviser par n, on peut supposer que γ est concentrée sur M et que $\forall i, proj^i_{\#}\gamma \leq \frac{1}{n}\pi$. On pose $\omega = \sum_{i=1}^n proj^i_{\#}\gamma$, alors $\omega \leq \pi$. On cherche un ω' compétiteur de ω telle que $\int \mathrm{cd}\omega' < \int \mathrm{cd}\omega$, alors en prenant $\pi - \omega + \omega'$, ceci contredit l'optimalité de π. On note, pour tout $p = ((x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n))$ dans $(\mathbb{R}^2)^n$, $\alpha_p = \sum_{i=1}^n \delta_{(x_i,y_i)}$. On vérifie que $\int \alpha_p \mathrm{d}\gamma(p) = \sum_{i=1}^n proj^i_{\#}\gamma = \omega$. Si $p \in M$, par la définition de M, il existe β_p à support dans $\{(x_i, y_i), 1 \leq i \leq n\}$ qui n'est pas optimale parmi ses compétiteurs. La procédure de l'algorithme simplexe permet de montrer que α_p n'est pas non plus la solution optimale et nous permet de trouver α'_p p-mesurable compétiteur de α_p de coût strictement inférieur. En posant $\omega' = \int \alpha'_p$, on voit que $\int \mathrm{cd}\omega' = \iint c(x, y)\mathrm{d}\alpha_p(x, y)\mathrm{d}p < \iint c(x, y)\mathrm{d}\alpha'_p(x, y)\mathrm{d}p = \int \mathrm{cd}\omega$. Ce qui conduit à la contradiction de l'optimalité de π comme indiqué précédemment.

Annexe B

Théorème de Prokhorov

Theorème B.0.4 (Prokhorov)**.** *Soit Ω métrique complet, séparable. Soit μ_n des probabilités sur Ω. On dit que la suite μ_n est tendue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe K compact de Ω tel que pour tout n, $\mu_n(K) > 1-\epsilon$. Alors on a équivalence entre : μ_n est tendue et il existe une extractrice ϕ telle que il existe μ probabilité sur Ω telle que $\mu_{\phi(n)}$ converge en loi vers μ.*

Preuve. *On donne une idée de preuve du sens direct, qui repose sur le théorème de représentation de Riesz. La suite μ_n peut être considérée comme une suite d'éléments du dual de $C_0(\Omega)$, c'est une suite bornée donc quitte à extraire on peut supposer qu'il existe une mesure μ, tel que μ_n converge faible * vers μ. Pour passer au fonction continue bornée, on utilise le caractère tendue. Lorsque la suite de mesures μ_n est tendue, on peut considérer une suite de compacts $(A_i)_{i\in N}$ telle que pour tout n, on a $\mu_n(\Omega \setminus A_i) < 2^{-i}$. Pour conclure il faut montrer que pour toute fonction f continue bornée et tout i entier,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_i} f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) = \int_{A_i} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Ce qui se fait en régularisant la fonction $f\mathbf{1}_{A_i}$

Bibliographie

[1] F. Hirsch and B. Roynette. A new proof of Kellerers theorem. *ESAIM Probab. Stat.* 2012

[2] F. Santambrogio. Optimal transport for applied mathematicians.2015

[3] M. Beiglböck, N. Juillet. On a problem of optimal transport under marginal martingale constraints, *preprint (Aug. 2012), arXiv :1208.1509.*

[4] M. Beiglböck, P. Henry-Labordère, and F. Penkner. Model-independent bounds for option pricesa mass transport approach.*Finance Stoch.*, 17(3) :477-501, 2013.

[5] Z. Yoav. Optimal transportation, continuous and discrete.2012

[6] M. Beiglböck, M. Goldstern, G. Maresch, and W. Schachermayer. Optimal and better transport plans. *J. Funct. Anal., 256(6) :1907-1927*, 2009