INÉGALITÉ DE LOJASIEWICZ ET APPLICATIONS

LI JIALUN, PORTE MATTHIEU

Résumé. On étudie ici des une application de l'inégalité de Lojasiewicz à la convergence en temps longs de solutions d'équations d'évolution, sous hypothèses d'analycité de la non-linéarité de l'équation. L'inégalité de Lojasiewicz, et sa transposition de Lojasiewicz-Simon en dimension infinie, transcrit l'information contenue par l'analycité du second membre. Nous étudions successivement le problème en dimension finie, avec un rappel de la théorie classique, puis l'équation de la chaleur, à nouveau avec un rappel de la théorie classique, et donnons une preuve de l'inégalité de Lojasiewicz-Simon à partir de l'inégalité de Lojasiewicz.

Table des matières

1. Introduction

Les problèmes les plus classiques de la théorie des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles sont l'existence et l'unicité de solutions dans certains espaces fonctionnels, sous certaines conditions aux limites. Toutefois, ce problème n'est presque que mathématique : l'expérience d'un système physique fournit la solution empirique d'un tel problème. Tout au plus la résolution des problèmes de Cauchy permet-elle ainsi de valider l'adéquation du modèle à la réalité du système physique. Elle constitue tout de fois le pré-requis à toutes les autres questions sur le comportement des solutions éventuelles.

Dans cette optique, un problème complémentaire du point de vue physique est l'asymptotique des solutions de telles équations différentielles ou aux dérivées partielles, en particulier l'éventuelle convergence aux temps longs. Le problème majeur abordé ici est la convergence des solutions de l'équation de la chaleur, on donne toutefois dans un bref panorama de résultats sur la convergence des solutions d'un système gradient, en observant en quoi l'inégalité de Lojasiewicz permet de renforcer les résultats dans le cas analytique. Le coeur et reste du mémoire est consacré à la transposition du raisonnement pour l'équation de la chaleur.

2. Dimension finie et système gradient

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On s'intéresse au problème de Cauchy pour l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = -\nabla f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1. Convergence aux temps longs dans le cas général.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz et l'hypothèse C^2 sur f assurent l'existence d'une solution de (2.1) sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}, , 0 \in I$ maximal

Remarque 2.1. *A priori*, rien n'assure que $\mathbb{R}^+ \subseteq I$, i.e. que les solutions soient définies pour tout $t > 0$. Dès la dimension 1, par exemple, les solutions de $\dfrac{dx}{dt} = x^2$ explosent en temps fini.

Cette remarque illustre que nos seules hypothèses ne fournissent pas le cadre nécessaire à l'étude de la convergence aux temps longs. Le théorème de sortie des compacts, rappelé dans [7], assure que des solutions bornées sont définies pour tout temps.

Cela nous invite à considérer les solutions bornées (en $t \geqslant 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = -\nabla f(x(t)) \\ \{x(t)\}_{t \geqslant 0} \text{ borné} \end{cases} \tag{2.2}$$

Dans ce contexte, on peut formuler des résultats sur la convergence de x, qui découlent plus généralement de la théorie de Lyapunov, c.f. [7] pour un traitement plus général.

Proposition 2.2. *Soit x une solution bornée de 2.2, alors $\phi : t \mapsto f(x(t)), t \geqslant 0$ est une fonction décroissante. Si y est un point d'accumulation de $x(t)$, i.e. s'il existe $t_n \to \infty, x(t_n) \to y$, alors*
- $f(y) = \inf\{f(x(t)), t \geqslant 0\}$
- $\nabla f(y) = 0$

Démonstration. Un calcul simple montre que $\frac{d\phi}{dt}(t) = -\|\nabla f(x(t))\|^2 \leqslant 0$, d'où la décroissance de ϕ. La continuité de f et l'hypothèse de bornitude sur la trajectoire assurent de plus que ϕ est bornée. Soit y un point d'accumulation de $x(t)$ et $t_n \to \infty$ telle que $x(t_n) \to y$.

Le second point de la proposition découlent des propriétés de flot : rappelons que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \tau > 0, \forall z \in B(y, \epsilon), \exists x \in C^1([-\tau, \tau] \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)) \\ x(0) = z \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour $n \geqslant N$, on a de plus $x(t_n) \in B(y, \epsilon)$ Soit, pour $n \geqslant N$

$$x_n \colon \begin{cases} [-\tau, \tau] \to \mathbb{R} \\ \qquad t \mapsto x(t + t_n) \end{cases} \tag{2.4}$$

Alors, par continuité du flot [7] on a

$$\forall t \in [-\tau, \tau] x_n(t) \to y(t) \tag{2.5}$$

où y(t) est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = -\nabla f(y(t)) \ \forall t \in [-\tau, \tau] \\ y(0) = y \end{cases} \tag{2.6}$$

Or, on a pour tout $n \geqslant N, t \in [-\tau, \tau]$

$$f(x_n(t)) + \int_0^t \|\frac{dx}{ds}(s)\|^2 ds = f(x(0)) \tag{2.7}$$

Or, $f(x(t)) \to f(y)$ donc, à la limite :

$$f(y) + \int_0^t \|\frac{dy}{ds}(s)\|^2 ds = f(y) \tag{2.8}$$

D'où $\int_0^t \|\frac{dy}{ds}(s)\|^2 ds = 0$ et $\frac{dy}{dt}(t) = 0, \forall t \in [-\tau, \tau]$, ie $y(t) = cste = y$ et donc $\nabla f(y) = 0$. □

Remarque 2.3. Cette proposition permet de faire un premier lien entre le comportement asymptotique de x et l'ensemble des points critiques de f. En particulier, dans le cas où f n'a qu'un seul point critique, x admet un seul point d'accumulation et est bornée donc converge.

On peut également prouver simplement la convergence de x pour certains points critiques isolés, par exemple pour des minimas non dégénérés de f. On cite ici un résultat classique de la théorie de Lyapunov allant dans ce sens.

Proposition 2.4. *Soit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que f admet en y un minimum strict tel que $D^2 f(y) > \alpha Id$ pour un certain $\alpha > 0$.*

Alors, pour x_0 est assez proche de y, toute solution de 2.2 telle que $x(t) = x_0$ pour un certain $t > 0$ converge vers y.

Toutefois, aucun tel résultat élémentaire n'est a priori possible pour des fonctions f admettant un continuum de points critiques (par exemple, l'altitude dans une vallée). ϕ défini précédemment peut décroitre avec x s'approchant tangentiellement de l'ensemble des points critiques, et n'admettant pas de limite.

Une application de l'inégalité de Lojasiewicz, qui fait l'objet du paragraphe suivant, permet de lever cette possibilité dans le cas où f est analytique.

2.2. **L'inégalité de Lojasiewicz.** Pour pouvoir étudier la convergence des solutions de 2.2 pour une non-linéarité analytique, nous aurons besoin d'un résultat sur les fonctions analytiques : l'inégalité de Lojasiewicz

Théorème 2.5. *Soit $f \in C^\omega(\mathbb{R}^n)$ une fonction analytique et y un point critique de f. Alors il existe $\theta \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\sigma > 0$ tel que pour $\|x - y\| < \sigma$ on ait :*

$$\|\nabla f(x)\| \geqslant \|f(x) - f(y)\|^{1-\theta} \tag{2.9}$$

Il s'agit de la version analytique d'un résultat fin sur la géométrie modérée. Sa preuve est en dehors de la portée de ce mémoire, et n'est pas simplifiée par la restriction au cas analytique, on fait donc référence à l'article de Lojasiewicz [6] pour la preuve originale dans le cas analytique et à un article de Kurdyka [5] pour une preuve générale.

Ce résultat complexe admis, on peut en déduire assez facilement l'énoncé suivant :

Corollaire 2.6. *Soit f analytique, et x une solution C^1 de 2.2. Alors $x(t)$ converge quand $t \to \infty$.*

Donnons maintenant une preuve inspirée de [8] et [3] du théorème 2.6

Démonstration. Soit y un point limite de $x(t)$.

Comme vu précédemment

$$-\frac{df(x)}{dt}(t) = \|\nabla f(x(t))\|^2 = \|\frac{dx}{dt}(t)\|^2 \ \forall t$$

Soit θ, σ donnés par l'inégalité de Lojasiewicz au voisinage de y. On a ainsi, si $\|x(t) - y\| < \sigma$

$$-\frac{df^\theta(x(t)}{dt} = \theta \|\frac{dx}{dt}(t)\| \|\nabla f(x(t))\| f^{\theta-1}(x(t)) \tag{2.10}$$

$$\geqslant \theta \|\frac{dx}{dt}(t)\| \tag{2.11}$$

Soit s tel quel $\|x(s) - y\| < \sigma/2$: il en existe car y est point limite. Soit alors $t_\infty = sup\{u > s, \|x(t) - y\| < \sigma \ \ \forall t \in [s, u]\}$.

Supposons par l'absurde que $t_\infty < \infty$, que alors en intégrant 2.11 :

$$\int_s^{t_\infty} \|\frac{dx}{dt}(t)\| dt \leqslant \frac{1}{\theta}(f^\theta(x(s)) - f^\theta(x(t_\infty))) \tag{2.12}$$

Et donc par inégalité triangulaire :

$$\|x(t_\infty) - y\| \leqslant \|x(s) - y\| + \int_s^{t_\infty} \|\frac{dx}{dt}(t)\|dt \tag{2.13}$$

$$\leqslant \|x(s) - y\| + \frac{1}{\theta}(f^\theta(x(s)) - f^\theta(x(t_\infty))) \tag{2.14}$$

Mais, comme $f^\theta(x(t))$ converge vers $f^\theta(y)$, on peut effectuer ce raisonnement pour un s tel que $f^\theta(x(s)) \leqslant \theta f^\theta(y) + \frac{\theta\sigma}{3}$, auquel cas

$$\|x(t_\infty) - y\| < \sigma \tag{2.15}$$

D'où une contradiction avec la définition de t_∞.

Donc $t_\infty = \infty$ et la longueur de la trajectoire de $x(t)$ est finie. Il s'ensuit que $\int_0^\infty \frac{dx}{dt}(t)dt$ est absolument convergente, donc que $x(t)$ converge pour $t \to \infty$.

□

Remarque 2.7. La très forte hypothèse de structure est masquée ici par l'utilisation de l'inégalité de Lojasiewicz comme «boîte noire». Cette preuve laisse toutefois apparaître la possibilité d'une généralisation : elle peut s'adapter à des contextes plus larges pour peu qu'on réussisse à fournir une inégalité semblable à celle de Lojasiewicz.

De fait, la démarche que nous suivrons pour étudier la convergence des solutions de l'équation de la chaleur est dans l'esprit la même que celle utilisée en dimension finie.

3. L'équation de la chaleur non linéaire

3.1. **La solution de l'équation de la chaleur.** Toutes les preuves sont issues de [2]

Soit Ω un ouvert borné régulier dans $\mathbb{R}^N$, on considère l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0,.) = u_0 & \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

On va utiliser le théorème de Hille-Yosida-Philips sur les espaces de Banach pour résoudre l'équation.

Définition 3.1. Soit X est un espace de Banach. Un opérateur linéaire dans X est un couple (D, A), où D est un sous-espace vectoriel de X, et $A : D \to X$ est une application linéaire. A est dit m-dissipatif si et seulement si

$$\forall u \in D \;\; \forall \lambda > 0 \; \|u - \lambda Au\|_X \geqslant \|u\|_X$$
$$\forall f \in X \;\; \forall \lambda > 0, \; \exists u \in D(A) \;\; u - \lambda Au = f$$

Exemple 3.2. Soit $Y = L^2(\Omega)$, et définissons l'opérateur B sur Y par

$$D(B) = \{u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\}$$
$$Bu = \Delta u, \forall u \in D(B)$$

Alors B est m-dissipatif et de domaine dense. En effet

$$(u-\Delta u, u-\Delta u) = \int |u|^2 + |\nabla u|^2 + |\Delta u|^2 \geqslant \int |u|^2$$

et pour tout $f \in L^2(\Omega)$, l'équation $u-\Delta u = f$ a une solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ par le théorème de Lax-Milgram et par régularité elliptique.

Exemple 3.3. Soit $X \in C_0(\Omega)$, et définissons l'opérateur A sur X par

$$D(A) = \{u \in C_0(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \Delta u \in C_0(\Omega)\}$$
$$Au = \Delta u, \quad \forall u \in D(A)$$

Alors A est m-dissipatif. La preuve nécessite le principe maximal elliptique et la régularité elliptique.

Théorème 3.4. *(Théorème de Hille-Yosida-Phillips) Soit X un espace de Banach et A un opérateur m-dissipatif dans X, de domaine dense. Alors il existe un unique semi-groupe $T(t) \in L(X)$ défini pour $t \geqslant 0$ et tel que*

1)$T(t) \in L(X), \|T(t)x\|_X \leqslant \|x\|_X, \quad \forall t \geqslant 0 \quad x \in X$

2)$T(0) = Id$

3)$T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall s,t \geqslant 0$

4)$T(t)x \in C([0,\infty), X)$ *solution faible*

5)*Pour tout $x \in D(A)$, $u(t) = T(t)x$ est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), X) \\ u_t - Au = 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

De plus, pour tout $x \in D(A)$ on a $T(t)Ax = AT(t)x$

En particulier, quand X est un espace de Hilbert, et A est un opérateur auto-adjoint, on a un "effet régularisant".

Théorème 3.5. *Soit $x \in X$, et $u(t) = T(t)x$. Alors u est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty), X) \cap C((0,\infty), D(A)) \cap C^1((0,\infty), X) \\ u_t - Au = 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

On suppose que $(S(t))_{t\geqslant 0}$ est le semi-groupe engendré par $X = C_0(\Omega)$ $A = \Delta$, et que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est le semi-groupe engendré par $Y = L^2(\Omega)$ $B = \Delta$. Comme $D(A) \subseteq D(B)$ et par unicité des solution dans le théorème de Hille-Yosida-Phillips, on a $T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in D(A)$, donc par densité $T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in C_0(\Omega)$. Alors, pour $u_0 \in C_0(\Omega)$, on a $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $T(t)u_0$ est l'unique solution satisfaisant l'équation de la chaleur par le théorème (3.5)

$$T(t)u_0 \in C([0,\infty), L^2(\Omega)) \cap C((0,\infty), H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty), L^2(\Omega)).$$

De plus $T(t)u_0 = S(t)u_0$, en utilisant le théorème (3.4) avec $S(t)$, on a :

$$T(t)u_0 \in C([0,\infty), C_0(\Omega)), \ |T(t)u_0|_{L^\infty} \leqslant |u_0|_{L^\infty}$$

3.2. **La solution de l'équation de la chaleur non-linéaire.** Toutes les preuves sont issues de [2]

Maintenant, on considère l'équation de la chaleur non-linéaire, on suppose que f est Lipschitz continue sur un sous-ensemble borné. Soit $\varphi \in C_0(\Omega)$, on va trouver $T > 0$, et u une solution du problème

$$\begin{cases} u \in C([0,T], C_0) \cap C((0,T], H^2 \cap H_0^1) \cap C^1((0,T], L^2) \\ u_t - \Delta u = f(u) \\ u(0) = \varphi \end{cases} \tag{3.2}$$

Pour la solution, on considère la formule de Duhamel.

$$u(t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)u(s)ds \tag{3.3}$$

Proposition 3.6. *(Équivalence des deux problèmes) Soit $\phi \in C_0$, $T > 0$, et $u \in C([0,T], C_0)$, les deux équations sont équivalentes, autrement dit, u satisfait* (3.2) *si et seulement si il satisfait* (3.3).

Cette proposition illustre la propriété de régularisation, le point crucial étant que $T(t)$ a un effet régularisant. On peut utiliser le théorème du point fixe de Banach pour trouver une solution de la formule de Duhamel, donc par la proposition ci-dessus, on a :

Proposition 3.7. *(L'existence locale) Soit $\varphi \in C_0$, il existe un temps $T > 0$, et une unique solution u satisfaisant* (3.2).

Remarque 3.8. La solution n'est pas toujours globalement définie, dans certains cas elle peut exploser en temps fini.

Preuve : Pour l'unicité, soient $u,\ v$ deux solutions de (3.2), par $\|T(t)\| \leqslant 1$ on a :

$$\begin{aligned} |u - v|_{L^\infty} &\leqslant \int_0^T |T(t-s)(f(u(s)) - f(v(s)))|_{L^\infty} ds \\ &\leqslant \int_0^T |f(u(s)) - f(v(s))|_{L^\infty} ds \\ &\leqslant L(|u(s)|_{L^\infty_{t,x}} + |v(s)|_{L^\infty_{t,x}}) \int_0^T |u(s) - v(s)|_{L^\infty} ds \end{aligned}$$

ici $L(b)$ est la constante de Lipchitz de f sur $[-b, b]$. Par l'inégalité de Gronwall, on a $u = v$.

Pour l'existence, soit $M = |\varphi|_{L^\infty}$, $T_M = \frac{1}{2L(|f(0)|+2M)+2}$. On pose $K = 2M + |f(0)|$ et

$$B(K) = \{u \in C([0,T_M], C_0(\Omega)), |u|_{L^\infty_{t,x}} \leqslant K\} \subseteq C([0,T_M], C_0(\Omega))$$

On définit une application $\Phi : B(K) \to C([0,T_M], C_0(\Omega))$ par

$$\Phi_u(t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds$$

Comme

$$\begin{aligned}|\Phi_u(t)|_{L^\infty} &\leqslant |\varphi|_{L^\infty} + \int_0^t |f(u(s))|_{L^\infty} ds \\ &\leqslant M + \int_0^t (|f(0)| + L(K)|u(s)|_{L^\infty}) ds \\ &\leqslant M + T_M(|f(0)| + KL(K)) \\ &\leqslant K\end{aligned}$$

on a $\Phi : B(K) \to B(K)$. De plus

$$\begin{aligned}|\Phi_u(t) - \Phi_v(t)|_{L^\infty} &\leqslant \int_0^t |f(u(s)) - f(v(s))|_{L^\infty} ds \\ &\leqslant \int_0^t L(K)|u(s) - v(s)|_{L^\infty} ds \\ &\leqslant \frac{1}{2}|u(t) - v(t)|_{L^\infty_{t,x}}\end{aligned}$$

Donc, Φ est une application dans $B(K)$ avec constante de contraction $\frac{1}{2}$, Φ a un point fixe $u \in B(K)$, et u est la solution de (3.3). □

On pose $\tau(\varphi)$ le temps d'existence de la solution, et pour $t < \tau(\varphi)$ on définit $U(t)\varphi$ comme étant l'unique solution de (3.2). Comme $T(t)$ est une contraction dans $C_0(\Omega)$, d'après l'inégalité de Gronwall on peut prouver la proposition suivante :

Proposition 3.9. *(Dépendance continue en les conditions initiales) Soient $x_n \longrightarrow x$ dans C_0, on a $u_n \longrightarrow u$ dans $C([0,T], C_0)$, pour tout $T < \tau(x)$. Ici u_n et u sont les solutions de (3.3) avec conditions initiales x_n et x. Autrement dit, la dépendance de la solution aux conditions initiales est continue pour la norme C_0.*

Preuve : On pose $M = |u(t)|_{L^\infty_{t,\ x}([0,T]\times\Omega)}$, et

$$\tau_n = \sup\{t \in (0, \tau(x_n)] \text{tel que } |u_n(s)|_{L^\infty} < 2M,\ \forall s \in [0,t]\}$$

Pour $t \leqslant \min\{T, \tau_n\}$, on a

$$\begin{aligned}|u_n(t) - u(t)|_{L^\infty} &\leqslant |T(t)(x_n - x)|_{L^\infty} + \int_0^t |T(t-s)(f(u_n(s)) - f(u(s))|_{L^\infty} ds \\ &\leqslant |x_n - x|_{L^\infty} + \int_0^t L(2M)|u_n(s) - u(s)|_{L^\infty} ds\end{aligned}$$

donc par l'inégalité de Gronwall, on a

$$|u_n(t) - u(t)|_{L^\infty} \leqslant |x_n - x|_{L^\infty} e^{TL(2M)} \tag{3.4}$$

Quand n est suffisamment grand, $|u_n(t)|_{L^\infty} < 2M$ pour tout $t \leqslant \min\{T, \tau_n\}$. Alors, $\tau_n > \min\{T, \tau_n\}$, et par l'inégalité (3.4), on a $u_n \to u$ dans $C([0,T], C_0)$. □

Quand il y a de plus fortes hypothèses de bornitude sur f, on peut prouver la dépendance continue en les conditions initiales pour la norme $H^2 \cap H^1$.

Les résultats les plus importantes de cette partie sont l'existence locale et dépendance continue en les conditions initiales, ce qui permet l'existence de solutions stationnaires dans le théorème de convergence suivant.

3.3. **Convergence des solutions.** On suppose que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction analytique, et $f = \nabla F$. Pour simplifier on considère seulement $N = 2,\ 3$, et dont on a l'injection de Sobolev $C_0(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Pour prouver la convergence des solution, on va utiliser l'inégalité de Lojasiewicz-Simon, dont l'étude fait l'objet de la dernière partie de ce mémoire.

Théorème 3.10 (L'inégalité de Lojasiewicz-Simon)**.** *En posant*

$$\mathscr{M}(u) = \triangle u + f(x,u)$$
$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(u)dx$$

et si y est tel que $\mathscr{M}(y) = 0$ il existe $\theta \in]0, \frac{1}{2}[, \sigma > 0$ tel que pour $\|u - y\|_{H^2 \cap H_0^1} < \sigma$

$$\|\mathscr{M}(u)\| \geqslant \|E(u) - E(y)\|^{1-\theta} \tag{3.5}$$

On a le théorème de convergence suivant

Théorème 3.11. *Soit u une solution de (3.2) et*

$$\bigcup_{t \geqslant 1} \{u(t)\} \textit{est précompact dans } H^2 \cap H_0^1 \tag{3.6}$$

Alors il existe une solution ϕ de $f(\phi) = -\Delta\phi$, telle que

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t) - \phi\|_{H^2 \cap H_0^1} = 0$$

Remarque 3.12. Une fois admise l'inégalité de Lojasiewicz-Simon, la preuve suit le même schéma que dans le système de dimension finie étudié précédemment, à quelques complications techniques près. D'abord on trouve une limite qui est stationnaire, ensuite on utilise l'inégalité Lojasiewicz et une fonction de Lyapunov adaptée pour prouver que la solution va rester dans le voisinage de la limite stationnaire.

Preuve : Soit u une solution de (3.2) satisfaisant (3.6), on définit l'ensemble de ω-limite de u_0 :

$$\omega(u_0) = \{\phi \in H^2 \cap H_0^1, \exists t_n \to \infty, \lim_{n\to+\infty} \|u(t_n) - \phi\|_{H^2 \cap H_0^1} = 0\}$$

on sait que $\omega(u_0)$ est non-vide, on va prouver $\omega(u_0)$ est un sous-ensemble de $\{\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) | f(\phi) = -\Delta\phi\}$. En multipliant (3.2) par du/dt et en intégrant dans Ω, on a

$$\int_\Omega |\frac{du}{dt}|^2 dx = -\frac{d}{dt}[E(u(t))]. \tag{3.7}$$

Donc $E(u(t))$ est décroissante, et par (3.6), $E(u(t))$ a une limite quand $t \to +\infty$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \|u(t_n) - \phi\|_{H^2 \cap H_0^1} = 0$, on a

$$E(\phi) = \lim_n E(u(t_n)) = \lim_{t\to+\infty} E(u(t)), \quad \forall \phi \in \omega(u_0)$$

On considère ensuite $U(t)\phi$, puisque $u(t_n) \to \phi$ dans $H^2 \cap H_0^1$, donc dans C_0 par l'injection de Sobolev. Par la proposition(3.9) on a $u(t_n + t) \to U(t)\phi$ dans C_0. Mais $\{u(t_n + t)\}$ est pré-compact dans $H^2 \cap H_0^1$, en extrayant une sous-suite, on a $u(t_n + t) \to \psi$ dans $H^2 \cap H_0^1$. Donc $U(t)\phi = \psi$, et

$$E(U(t)\phi) = \lim_{n\to+\infty} E(u(t_n + t)) = \lim_{t} E(u(t)) = E(\phi)$$

Mais par (3.7) on a $\frac{d}{dt}U(t)\phi = 0, \quad \forall t$, et donc $-\Delta\phi = f(\phi)$.(propriété strictement Lyapunov)

Choisissons $\phi \in \omega(u_0)$, par un changement de variable $u = \phi + v$, on peut supposer que $\phi = 0$ et $f(x, 0) = 0$ $\forall x \in \Omega$. Comme $0 \in \omega(u_0)$, on a :

$$\exists t_n \to \infty, \ \|u(t_n)\|_{H^2\cap H_0^1}, \quad \text{quand } n \to \infty. \tag{3.8}$$

Par l'équation de la chaleur on a

$$\int_\Omega |\frac{du}{dt}|^2 dx = \int_\Omega |\Delta u + f(u)|^2 dx$$

donc

$$\int_\Omega |\frac{du}{dt}|^2 dx = \|\frac{du}{dt}\| \|\Delta u + f(u)\|$$

ainsi

$$-\frac{d}{dt}[E(u(t))] = \|\frac{du}{dt}\| \|\Delta u + f(u)\| \tag{3.9}$$

Par (3.8)(3.9) et le fait que $E(0) = 0$, on a $E(u(t)) \to 0$ quand $t \to \infty$ et $E(u(t)) \geqslant 0 \forall t \geqslant 0$. D'autre part en utilisant (3.8) on a

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0 (\epsilon \ll \sigma) \exists N > 0 \\ &\forall n \geqslant N \text{ on a } \|u(t_n)\|_{H^2\cap H_0^1} < \epsilon/2 \ \ \frac{1}{\theta} E(u(t_n))^\theta < \epsilon/2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

(On choisit N suffisamment grand pour que $\|u(t_n)\| < \epsilon/2$ pour $n > N$ et θ est donné par le théorème (3.10)) Posons

$$\bar{t} = \sup\{t \geqslant t_N | \ \|u(s)\|_{H^2\cap H_0^1} < \sigma, \forall s \in [t_N, t]\}$$

et supposons que $\bar{t} < \infty$. On distingue désormais deux cas, ou bien il existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $E(u(t_0)) = 0$, donc $E(u(t)) = 0$ $\forall t \leqslant t_0$: par (3.7) on a une solution stationnaire. Sinon en combinant (3.9) et (3.5), on obtient $\forall t \in (t_N, \bar{t})$,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}[E(u(t))]^\theta &= -\theta \frac{d}{dt}[E(u(t))] \ [E(u(t))]^{\theta-1} \\ &= \theta \|\frac{du}{dt}\| \|\Delta u + f(u)\| \ [E(u(t))]^{\theta-1} \\ &\geqslant \theta \|\frac{du}{dt}\| \end{aligned} \tag{3.11}$$

Intégrant (3.11) selon t dans $(t_N, \bar{t})$, on a

$$\int_{t_N}^{\bar{t}} \|\frac{du}{dt}\| dt \leqslant \frac{1}{\theta} |E(u(t_N))|^\theta. \tag{3.12}$$

Mais

$$\|u(\bar{t})\| \leqslant \int_{t_N}^{\bar{t}} \|\frac{du}{dt}\| dt + \|u(t_N)\|.$$

Combinant (3.10) et (3.12), on a

$$\|u(\bar{t})\| \leqslant \epsilon.$$

Par l'hypothèse (3.6), une suite convergeant dans L^2 est aussi convergente dans $H^2 \cap H_0^1$, il suffisant de choisir ϵ assez petit dans (3.10) tel que

$$\|u(\bar{t})\|_{H^2 \cap H_0^1} < \sigma$$

contredisant la définition de $\bar{t}$, donc $\bar{t} = \infty$. Et (3.12) devient :

$$\int_{t_N}^{\infty} \|\frac{du}{dt}\| \leqslant \frac{1}{\theta}|E(u(t_N))|^{\theta}.$$

donc

$$\|u(t) - u(s)\| \leqslant \int_s^t \|\frac{du}{dt}\| \quad \text{pour } t > s > t_N$$

Ce qui implique l'existence de la limite de $u(t)$ dans L^2. Par l'hypothèse (3.6), $u(t)$ converge aussi dans $H^2 \cap H_0^1$. □

Remarque 3.13. Le théorème peut-être généralisé à l'équation parabolique

$$\begin{cases} -u_{tt} + u_t - \Delta u & = f(u) \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u & = 0 \quad \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0,.) & = u_0 \quad \Omega \\ u_t(0,.) & = v_0 \quad \Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

ou encore à l'équation des ondes avec dissipation linéaire

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t - \Delta u & = f(u) \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u & = 0 \quad \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0,.) & = u_0 \quad \Omega \\ u_t(0,.) & = v_0 \quad \Omega \end{cases} \tag{3.14}$$

Quand la trajectoire de (u, u_t) est pré-compacte dans certains espaces, et en utilisant une nouvelle fonction de Lyapunov à la place de E, on peut également prouver que la solution converge. L'idée est la même mais l'estimation va être plus compliquée.

4. L'inégalité de Lojasiewicz-Simon

Nous avons pu voir que l'obtention d'une inégalité de type Lojasiewicz pour des systèmes différentiels assez généraux permet de montrer la convergence des solutions vérifiant des hypothèses de pré-compacité. Si, comme annoncé plus haut, la démonstration de l'inégalité de Lojasiewicz dans le cas de la dimension finie dépasse notre cadre, il est possible en l'admettant de l'étendre à des situations dépassant la seule dimension finie.

L'idée est la suivante : on ramène l'étude des points critiques de la fonction de Lyapunov du problème à une variété de dimension finie, au moyen de la théorie de Fredholm, sur laquelle on peut appliquer l'inégalité de Lojasiewicz pour la dimension finie. Autrement dit, la théorie de Fredholm nous permet de paramétrer l'ensemble des points critiques par le noyau du linéarisé du problème, de dimension finie.

On donne ici un modèle d'énoncé et de preuve de l'inégalité de Lojasiewicz-Simon dans le cas de l'équation de la chaleur, et on se reportera à [5] pour un énoncé plus général.

Théorème 4.1. *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert régulier borné, $n = 2, 3$. Avec les mêmes notations qu'en 3, et en posant*

$$\mathscr{M}: \begin{array}{l} D \to H \\ u \mapsto \triangle u + f(x, u) \end{array}$$

et si v est tel que $\mathscr{M}(v) = 0$ il existe $\theta \in]0, \frac{1}{2}[, \sigma > 0$ tel que pour $\|u - v\|_D < \sigma$

$$\|\mathscr{M}(u)\| \geqslant |E(u) - E(v)|^{1-\theta} \tag{4.1}$$

4.1. Précis sur les fonctions analytiques dans les espaces de Banach.

Dans le cas de l'équation de la chaleur, on s'intéresse à la trajectoire d'un point dans $H^2 \cap H_0^1$, espace de Banach de dimension infinie. Si la notion habituelle de fonction analytique en dimension finie privilégie un système de coordonnée pour exprimer les développements en série entière au voisinage de chaque point, cette approche n'est plus aussi intéressante en dimension infinie.

On présente donc quelques résultats sur les fonctions analytiques dans les espaces de Banach pour donner du sens à l'énoncé précédent, basés sur l'exposition donnée dans [9]. Les preuves sont essentiellement similaires à celles en dimension finie, pour la plupart, on se contente donc ici de présenter l'ordre dans lequel articuler les fondements de cette théorie plus générale.

Dans toute cette partie, E, F sont des espaces de Banach. Par commodité de notation, on se restreint au cas réel.

Notations. Soit $a_n : E^n \to F$ une application n-linéaire symétrique continue sur E. On note, pour $x, x_1, ..., x_n \in E$

$$a_n x_1 ... x_n := a_n(x_1, ..., x_n)$$
$$a_n x^n := a_n(x, ..., x)$$

Définition 4.2. Soit $f : U \to F$, U un ouvert de E et $x_0 \in E$. On dit que f est *analytique en* x_0 s'il existe une famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout n, a_n soit une application n-linéaire symétrique continue de E^n dans F et telle que, en un voisinage de x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{4.2}$$

On dit que f est *analytique sur* U si f est analytique en tout point de U.

Cette définition généralise, y compris en dimension finie, de façon indépendante de tout système de coordonnées la notion de fonction analytique. L'objectif est de retrouver les propriétés élémentaires de ces fonctions : rayon de convergence, caractère C^∞, composition et inverse de fonctions analytiques, zéros isolés et une version analytique du théorème d'inversion locale, qui est un point crucial de la preuve de l'inégalité de Lojasiewicz-Simon.

Dans toute la suite, a_n est une application n-linéaire symétrique continue.

Proposition 4.3. *Soit $x_0, x \in E$ tels que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

converge ou que ses coefficients soient bornés. Alors pour tout y tel que $\|y - x_0\| < \|x - x_0\|$, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y - x_0)^n$$

converge absolument.

Remarque 4.4. Cette proposition permet de définir un rayon de convergence en x_0 de la même manière que dans le cas classique.

Proposition 4.5. *Une fonction analytique en un point est analytique en un voisinage de ce point.*

Montrons qu'une fonction analytique en un point y est indéfiniment dérivable.

Lemme 4.6. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et supposons que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0))^n$$

ait rayon de convergence R en x_0. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) a_n(x - x_0)^n$$

a rayon de convergence R en x_0.

Proposition 4.7. *Soit x_0 tel que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

ait rayon de convergence $R > 0$. Alors f est C^∞ sur $B(x_0, R)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$D^n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} ! a_{n+k} x^k \tag{4.3}$$

où $a_{n+k}x^k(h_1, ..., h_n) = a_{n+k}(h_1, ..., h_n, x, ..., x)$

L'énoncé suivant traduit le fait que la composée de deux fonctions analytiques dont les domaines sont compatibles est analytique et que les coefficients du développement de la composée sont obtenus à partir de ceux de chaque fonction.

Proposition 4.8. *Soit E, F, G trois espaces de Banach contenant respectivement des ouverts U, V, W. Soit $f : U \to V, g : V \to W$. Soit $x \in U$ tel que f soit analytique en x et g soit analytique en $f(x)$. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r)$ soit dans le disque de convergence de f en x et que $f(B(x, r))$ soit dans le disque de convergence de g en $f(x)$. Alors $g \circ f$ est analytique en x et $B(x, r)$ est dans son disque de convergence en x. De plus, au voisinage de x, avec b_n les coefficients du développement de g et a_n ceux de f, formellement :*

$$g \circ f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n((\sum_{k=0}^{\infty} a_k(y-x)^k) - f(x))^n \tag{4.4}$$

ce qui signifie exactement

$$g \circ f(y) = g \circ f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{l_0+...+l_i=n} a_{l_0}...a_{l_i}(y-x)^n \tag{4.5}$$

On a également un résultat "d'unicité des coefficients" :

Proposition 4.9. *Supposons*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

au voisinage de 0. Alors

$$\forall n \; a_n = 0$$

On peut ainsi donner une idée de la preuve du résultat motivant cette digression : le théorème d'inversion locale, dans une version analytique pour les espaces de Banach.

Théorème 4.10. *Soit $U \subseteq E$ un ouvert, $x \in U$ et $f : U \to F$ analytique en x et telle que $Df(x)$ soit inversible. Alors il existe $V \subseteq U$, $W \subseteq f(U)$ deux ouverts tels que*

$$\tilde{f} : \begin{array}{l} V \to W \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

soit analytique et inversible, et que son inverse soit analytique.

Démonstration. Donnons une idée de la preuve, à partir du théorème d'inversion locale dans sa version C^∞ : f est un C^∞-difféomorphisme au voisinage de x. Quitte à restreindre le voisinage concerné, f y est de plus analytique. Il s'agit donc de montrer que l'inverse est analytique. Si tel est le cas, le résultat sur la composition de fonctions analytiques et l'unicité des coefficients imposent par récurrence la valeur des coefficients du développement de $\tilde{f}^{-1}$ puisque $\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f}(y) = y$. La preuve dans le cas réel donne l'absolue convergence de la série ainsi obtenue, donc $\tilde{f}^{-1}$ est bien analytique. ☐

4.2. **Preuve du Théorème de Lojasiewicz-Simon.**

Démonstration. On suppose sans perte de généralité $y = 0, f(x,0) = 0, F(x,0) = 0$. On pose

$$L\colon \begin{array}{r} D = H_0^1 \cap H^2(\Omega) \to H = L^2(\Omega) \\ u \mapsto \triangle u + \partial_u f(x,0)u \end{array} \tag{4.6}$$

Il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda Id - L$ soit coercif donc d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe $T : H \to D$ borné tel que pour tout h, v

$$\int_\Omega (\lambda Th.v - LTh.v)dx = \int_\Omega hvdx \tag{4.7}$$

Comme $D \hookrightarrow H$ est compacte et que la composée avec un opérateur compact est compacte, on peut considérer l'opérateur compact autoadjoint $T : H \to H$. De plus, pour $u \in D, h \in H$:

$$\begin{aligned} Lu = h &\Leftrightarrow \lambda u - Lu = \lambda u - h && (4.8)\\ &\Leftrightarrow u = T(\lambda u - h) && (4.9)\\ &\Leftrightarrow v + h = \lambda T(v) && (4.10)\\ &\Leftrightarrow h = (\lambda T - Id)v && (4.11)\end{aligned}$$

avec $v = \lambda u - h$.

On est ramenés à l'alternative de Fredholm [1] donc cette équation admet une solution si et seulement si $h \in (Ker(\lambda T - Id))^\perp$, de codimension finie. Or

$$\begin{aligned} u = T(\lambda u) &\Leftrightarrow \lambda u - Lu = \lambda u && (4.12)\\ &\Leftrightarrow Lu = 0 && (4.13)\end{aligned}$$

Donc $KerL$ est de dimension finie m et $Lu = h$ admet une solution si et seulement si $h \in (KerL)^\perp$

Puisque $KerL$ est de dimension finie, soit une base $\phi_1, ..., \phi_m$ de $KerL$ et $\Pi : H \to H$ la projection orthogonale sur $KerL$. Soit

$$\mathscr{L}\colon \begin{array}{r} D \to H \\ u \mapsto \Pi u + Lu \end{array} \tag{4.14}$$

et

$$\mathscr{N} : \begin{array}{r} D \to H \\ u \mapsto \Pi u + \mathscr{M} u \end{array} \tag{4.15}$$

Cet opérateur est bien défini : $M(u)$ est bien L^2 puisque $u \in D$ avec $n \leqslant 3$ implique u Hölder (et donc $f(x,u)$ est une fonction continue). L'hypothèse d'analycité sur f permet de montrer le lemme mentionné dans [3] : $u \mapsto f(x,u)$ est analytique, au sens des espaces de Banach. La base de la théorie des fonctions analytiques dans les espaces de Banach est présentée dans [9].

Comme $\nabla \mathscr{N}(0) = \mathscr{L}$, d'après le théorème d'inversion locale analytique, il existe U, V voisinages de 0 dans D, H respectivement, $\Psi : V \to$

U, $C_1, C_2 > 0$ tels que

$$\Psi(\mathscr{N}(u)) = u \ \forall u \in U \tag{4.16}$$
$$\mathscr{N}(\Psi(h)) = h \ \forall h \in V \tag{4.17}$$
$$C_1\|f-g\|_H \leqslant \|\Psi(f)-\Psi(g)\|_D \leqslant C_2\|f-g\|_H \ \forall f,g \in V \tag{4.18}$$
$$\|\mathscr{M}(u)-\mathscr{M}(v)\|_H \leqslant \|u-v\|_D \ \forall u,v \in U \tag{4.19}$$

Posons

$$\Gamma\colon \begin{array}{c} W \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ \xi = (\xi_1, ..., \xi_m) \mapsto E(\Psi(\sum_j \xi_j \phi_j)) \end{array} \tag{4.20}$$

avec W un voisinage de 0 bien choisi pour que cette définition soit cohérente.

Remarquons que $\Pi(u) = \mathscr{N}(u) - \mathscr{M}(u)$. De plus, $\|\Pi(u)\|_H \leqslant C\|u\|_D$ et donc $\|\xi\| \leqslant C\|u\|_D$. Soit $u \in D$ et ξ tel que $\sum_j \xi_j\phi_j = \Pi u$. On va ramener l'étude de $E(u)$ et $\mathscr{M}(u)$ à celle de $\Gamma(\xi)$.

En effet :

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Gamma(\xi)\|_{\mathbb{R}^n} &\leqslant C_3\|\nabla E(\Psi(\sum_j \xi_j\phi_j))\|_D && (4.21)\\
&= C_3\|\mathscr{M}(\Psi(\Pi u))\|_H && (4.22)\\
&= C_3\|\mathscr{M}(\Psi(\Pi u)) - \mathscr{M}(u) + \mathscr{M}(u)\|_H && (4.23)\\
&\leqslant C_3\|\mathscr{M}(u)\|_H + C_3\|\mathscr{M}(\Psi(\Pi u)) - \mathscr{M}(u)\|_H && (4.24)\\
&\leqslant C_3\|\mathscr{M}(u)\|_H + C_4\|\Psi(\Pi u) - u\|_D && (4.25)\\
&\leqslant C_3\|\mathscr{M}(u)\|_H + C_5\|\Pi u - \mathscr{N} u\|_H && (4.26)\\
&= C_3\|\mathscr{M}(u)\|_H + C_5\|\mathscr{M} u\|_H && (4.27)\\
&= C_6\|\mathscr{M}(u)\|_H && (4.28)
\end{aligned}$$

De plus, par le théorème fondamental du calcul différentiel :

$$\begin{aligned}
|\Gamma(\xi) - E(u)| &\leqslant \int_0^1 |\frac{d}{dt}E(u + t(\Psi(\Pi u) - u))|dt && (4.29)\\
&\leqslant \int_0^1 \|\mathscr{M}(u + t(\Psi(\Pi u) - u))\|\|\Psi(\Pi u) - u\|_H dt && (4.30)\\
&\leqslant C_7\|\Psi(\Pi u) - u\|_D^2 && (4.31)\\
&\leqslant C_8\|\mathscr{M}(u)\|_H^2 && (4.32)
\end{aligned}$$

Et, par l'inégalité de Lojasiewicz :

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Gamma(\xi))\| &\geqslant \|\Gamma(\xi)\|^{1-\theta} && (4.33)\\
&\geqslant \frac{1}{2}|E(u)|^{1-\theta} - \frac{1}{2}|\Gamma(\xi) - E(u)|^{1-\theta} && (4.34)
\end{aligned}$$

dès lors que $\|\xi\|$ est assez petite, et donc que $\|u\|_D$ est assez petite. On en déduit, si $\|u\|_D < \sigma$

$$\|\mathscr{M}(u)\| \geqslant C_9|E(u)|^{1-\theta} \tag{4.35}$$

Donc, quitte à prendre un θ plus petit et à diminuer σ :

$$\|\mathscr{M}(u)\| \geqslant |E(u)|^{1-\theta} \tag{4.36}$$

□

Références

[1] H.Brézis : *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, (1983)

[2] T.Caenave, A.Haraux : *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clarendon, Oxford, (1998)

[3] M.A.Jendoubi : A Simple Unified Approach to Some Convergence Theorems of L.Simon, *Journal of Functional Analysis* **153** (1998), 187–202.

[4] A.Haraux : *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*, Masson, Paris, (1991)

[5] K.Kurdyka : On gradients of functions definable in o-minimal structures, *Annales de l'Institut Fourier* **48** (1998), 769–793

[6] S.Lojasiewicz : Une propriété totpologique des sous-ensembles analytiques réels. *Colloques internationaux du C.N.R.S.* **117** Les équations aux dérivées partielles. (1963)

[7] V.Millot : Equations différentielles ordinaires : Notes de cours, Université Paris Diderot (2010-2011)

[8] L.Simon : *Theorems on Regularity and Singularity of Energy Minimizing Maps*, Birkhauser (1996)

[9] E.F.Whittlesey : Analytic functions in Banach spaces, *American Mathematical Society*