

Processus de percolation sur un arbre binaire

Jieao Song Skander Karkar
sous la direction de Mathieu Merle

2016

Introduction : Le but de cet exposé est de présenter quelques modèles de percolation sur un arbre régulier et le lien entre eux. On introduit d'abord le processus de percolation normal, et étudie son comportement au temps critique. Puis on construit le processus de percolation gelée, où les amas sont gelés quand ils deviennent infini, suivant la méthode décrite dans [2]. On observe le lien entre un amas gelé et un amas conditionné à être infini au temps critique dans le processus non-gelé. Finalement on essaie de généraliser les résultats pour un arbre aléatoire de loi Poisson-Galton-Watson.

1 Percolation sur un arbre binaire

Avant d'introduire le processus de percolation, on présente un modèle qui sera très utile dans l'étude du processus de percolation.

1.1 Processus de Galton-Watson

Définition 1.1. Soit $\sum_{k \geq 0} p_k \delta_k$ une loi de probabilité discrète sur \mathbb{N} , où $\sum_{k \geq 0} p_k =$

1. On se donne $\{\xi_{i,j}\}_{i \geq 0, j \geq 1}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. à valeurs entières suivant cette loi. Le *processus de Galton-Watson* est défini par

$$Z_0 = 1, Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n-1,j}.$$

Comme $\{Z_{n-1} = 0\} \subset \{Z_n = 0\}$, on s'intéresse à l'événement *d'extinction*

$$E_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \{Z_n = 0\}.$$

qui indique que le processus est réduit à zéro (vide) à partir d'une certaine génération finie. On note sa probabilité

$$r = \mathbf{P}(E_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \mathbf{P}(Z_n = 0).$$

Définition 1.2. La fonction génératrice $G_X(s)$ associée à une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} est définie par

$$G_X(s) = \mathbf{E}[s^X] = \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X = k) s^k.$$

Elle est \mathcal{C}^∞ sur $] - 1, 1]$, et elle admet les propriétés suivantes :

- $G^{(n)}(s) \geq 0$, pour tout $n \geq 0$ et $s \geq 0$;
- $G(1) = 1$, $G(0) = \mathbf{P}(X = 0)$, $G'(1) = \mathbf{E}[X]$.

On pose $G(s) = \mathbf{E}[s^\xi] = \sum_{k \geq 0} p_k s^k$ la fonction génératrice de la loi ξ définie en la Définition 1.1. Alors, par récurrence, la fonction génératrice $G_n(s)$ de Z_n est donnée par

$$\begin{aligned} G_n(s) &= \mathbf{E}[s^{Z_n}] = \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(Z_{n-1} = k) \mathbf{E}[s^{\sum_{j=1}^k \xi_{n,j}}] \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(Z_{n-1} = k) \mathbf{E}[s^\xi]^k \\ &= G_{n-1}(G(s)) \\ &= G^{\circ n}(s) = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{n \text{ fois}}(s). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n = 0) &= G_n(0) \\ &= G(G_{n-1}(0)) = G(\mathbf{P}(Z_{n-1} = 0)). \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers ∞ , on déduit par continuité de G que la probabilité d'extinction r vérifie l'équation $r = G(r)$. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Pour un processus de Galton-Watson, notons*

$$r = \mathbf{P}(E_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z_n = 0)$$

sa probabilité d'extinction. Alors,

$$r = \inf\{s \in [0, 1] \mid s = G(s)\},$$

où G est la fonction génératrice de ξ .

En particulier, si ξ est non-dégénérée (i.e. $\xi = 1$ \mathbf{P} -p.s., et dans ce cas $r = 0$), on a

- $r = 1$, si $\mathbf{E}[\xi] \leq 1$;
- $r < 1$, si $\mathbf{E}[\xi] > 1$.

Démonstration. Notons $r' = \inf\{s \in [0, 1] \mid s = G(s)\}$. On a $r \geq r'$. De plus, d'après la croissance de G , on a $0 \leq G_n(0) \leq G_{n+1}(0) \leq r'$ par récurrence. En faisant tendre n vers ∞ , on obtient $r \leq r'$. Donc $r = r'$. \square

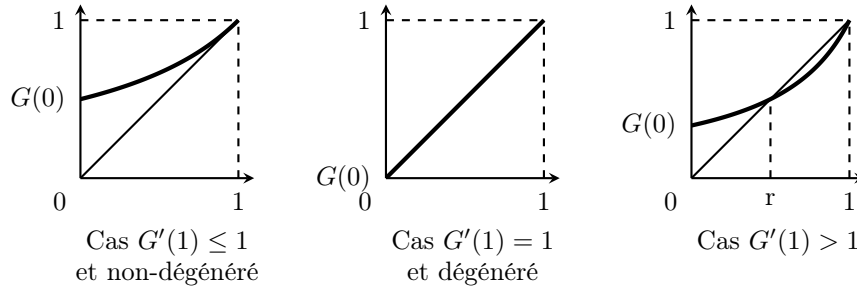


FIGURE 1 – Graphe de $G(s)$.

1.2 Percolation sur un arbre binaire

1.2.1 Problème de percolation

Définition 1.3. Soit $T = (V, E)$ un *arbre binaire infini*, c'est-à-dire où chaque sommet a degré 3. Soient $(U_e, e \in E)$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. On a un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui peut être identifié avec $[0, 1]^E$. Poser $B_t = \{e \mid U_e \leq t\}$ définit le *processus de percolation* $(B_t, 0 \leq t \leq 1)$. Une composante connexe de B_t est appelée un *amas* au temps t . S'il existe un amas de cardinal infini, on dit qu'il y a *percolation*.

Évidemment, B_0 est vide, et B_1 contient toutes les arêtes p.s.. Donc il n'y a pas de percolation au temps 0 mais il y a percolation au temps 1. On s'intéresse particulièrement au cas critique, c'est-à-dire à B_{t_c} où t_c est le temps où la probabilité de percolation devient non-nulle.

1.2.2 Cas d'un arbre binaire infini enraciné

Définition 1.4. Soit \tilde{T} un arbre avec un sommet \emptyset fixé (qui s'appelle la *racine*), tel que \emptyset est de degré 2, et tous les autres sont de degré 3. \tilde{T} est appelé un *arbre binaire infini enraciné*.

On peut classer tous les sommets de \tilde{T} en différents niveaux selon leurs distances à \emptyset . De la même façon, on classe les arêtes en différents niveaux (les arêtes incidentes à \emptyset sont dans le premier niveau).

On observe $\tilde{C}_{\emptyset, t}$ l'amas contenant \emptyset au temps t dans \tilde{T} . Notons Z_n le nombre de sommets dans le niveau n . C'est un processus de Galton-Watson avec la loi

$$(1-t)^2\delta_0 + 2t(1-t)\delta_1 + t^2\delta_2.$$

Sa fonction génératrice est $G_t(s) = ((1-t) + ts)^2$. L'équation $s = G_t(s)$ admet deux racines 1 et $(\frac{1-t}{t})^2$ sur $[0, 1]$. Comme l'événement $\{\emptyset \text{ est dans un amas infini}\}$ est exactement le complémentaire de $E_{\infty, t}$, et d'après la Proposition 1.1, on obtient la proposition suivante :

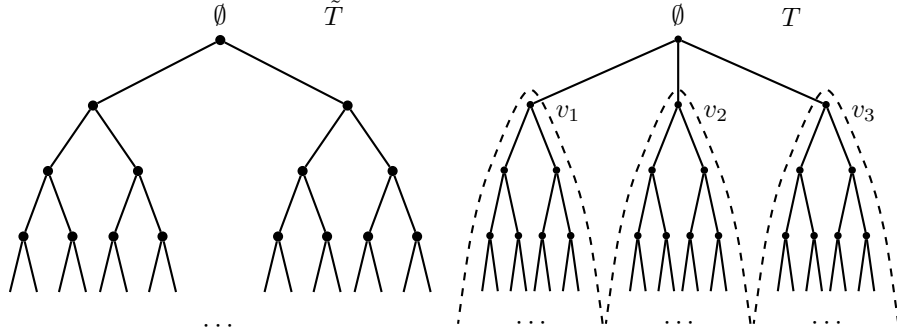


FIGURE 2 – Arbre binaire enraciné et arbre binaire complet.

Proposition 1.2. *La probabilité de percolation sur \tilde{T} au temps t est*

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_t &= \mathbf{P}(|\tilde{C}_{\emptyset,t}| = \infty) = 1 - \mathbf{P}(E_{\infty,t}) \\ &= \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - (\frac{1-t}{t})^2, & t \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

1.2.3 Cas d'un arbre binaire

On fixe un sommet \emptyset dans T comme étant la racine. Les différents niveaux selon la distance à \emptyset existent encore. Soit $C_{\emptyset,t}$ l'amas de \emptyset au temps t . Soient v_1, v_2 et v_3 les voisins de \emptyset . On peut voir que \emptyset admet 3 arbres-fils, chacun est un arbre binaire enraciné en v_i . Notons

$$\begin{aligned} V_{i,t} &= \{v_i \text{ est relié à } \emptyset \text{ au temps } t\} \\ &\cap \{v_i \text{ est la racine d'un amas infini au temps } t\}, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Tous les six événements sont indépendants. L'événement $\{|C_{\emptyset,t}| = \infty\}$ est exactement la réunion de $V_{i,t}$. Alors on a

Proposition 1.3. *La probabilité de percolation sur T au temps t est*

$$\begin{aligned} \theta_t &= \mathbf{P}(|C_{\emptyset,t}| = \infty) = \mathbf{P}(V_{1,t} \cup V_{2,t} \cup V_{3,t}) \\ &= \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - (\frac{1-t}{t})^3, & t \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

1.3 La loi des amas

Dans T un arbre binaire complet, on a le lemme suivant :

Lemme 1.1. *Soit S un sous-arbre fini de T et ∂S l'ensemble des arêtes qui sont au bord de S*

$$\partial S = \{e \in (T \setminus S) \mid e \text{ est incidente à un sommet de } S\}$$

Alors

$$|\partial S| = |S| + 3.$$

Démonstration. On peut facilement le démontrer par récurrence sur le cardinal de S : pour $S = \emptyset$, S admet bien 3 arêtes au bord. Pour S un sous-arbre de cardinal $m \geq 1$, on choisit une arête e de S qui est adjacente à deux arêtes e_1, e_2 qui sont dans ∂S . Par récurrence, $S' = S \setminus \{e\}$ admet $m + 2$ arêtes au bord, en comptant e . On a $\partial S = \partial S' \cup \{e_1, e_2\} \setminus \{e\}$. Donc $|\partial S| = m + 3 = |S| + 3$. \square

1.3.1 L'amas fini

D'après le Lemme 1.1, on a la proposition suivante

Proposition 1.4. *Soit S un sous-arbre fini contenant \emptyset . Alors*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C_{\emptyset,t} = S) &= \mathbf{P}(\forall e \in S, e \in C_{\emptyset,t}; \forall e \in \partial S, e \notin C_{\emptyset,t}) \\ &= t^{|S|}(1-t)^{|\partial S|+3}. \end{aligned}$$

Posons $\chi_t = \mathbf{E}|C_{\emptyset,t}|$ l'espérance de la taille de l'amas $C_{\emptyset,t}$ (la taille signifie toujours le nombre d'arêtes dans un arbre). On a immédiatement que $\chi_t = \infty$ pour $t > 1/2$. Pour $t < 1/2$,

$$\chi_t = \sum_{n \geq 1} 3 \cdot 2^{n-1} t^n = \frac{3t}{1-2t}.$$

Et donc $\chi_{1/2} = \infty$.

On calcule le nombre a_n de sous-arbres de taille n . Les nombres de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ comptent le nombre d'arbres binaires de taille $n-1$ (notamment le nombre de sous-arbres de taille $n-1$ contenant \emptyset dans l'arbre binaire enraciné \tilde{T}). De plus, C_n vérifient la formule de récurrence $C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$.

On choisit deux branches (deux arbres-fils) de \emptyset dans T qui forment un arbre enraciné \tilde{T}_1 , et on considère la troisième comme un autre arbre \tilde{T}_2 enraciné en v_3 attaché avec une arête (\emptyset, v_3) . Les sous-arbres de T ne contenant pas (\emptyset, v_3) correspondent aux sous-arbres de taille n de \tilde{T}_1 . Les sous-arbres de T contenant (\emptyset, v_3) induisent deux sous-arbres dans \tilde{T}_1 et \tilde{T}_2 , de tailles $n-k-1$ et k respectivement. Alors le nombre a_n de sous-arbres de taille n est :

$$\begin{aligned} a_n &= C_{n+1} + (C_n C_1 + \dots + C_1 C_n) \\ &= C_{n+2} - C_{n+1} \\ &= \frac{3}{n+3} \binom{2n+2}{n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Donc

$$\mathbf{P}(|C_{\emptyset,t}| = n) = \frac{3}{n+3} \binom{2n+2}{n} t^n (1-t)^{n+3},$$

$$\mathbf{P}(|C_{\emptyset, \frac{1}{2}}| = n) \sim n^{-\frac{3}{2}} \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

On donne ici un lemme utile :

Lemme 1.2. *Pour $t \in [0, 1/2[$,*

$$\sum_{n \geq 0} a_n(n+3)t^n(1-t)^n = \frac{3}{(1-2t)(1-t)^2}$$

Démonstration. On considère la série de Taylor de $1/\sqrt{1-4x}$ en 0 qui est valable sur $[0, 1/4[$:

$$1/\sqrt{1-4x} = \sum_{n \geq 0} \binom{-1/2}{n} (-4x)^n = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n(n+3)x^n &= 3 \sum_{n \geq 0} \binom{2n+2}{n} x^n \\ &= 3 \sum_{n \geq 0} \left(\binom{2n+3}{n+1} - \binom{2n+2}{n+1} \right) x^n \\ &= 3 \left(\frac{1}{2x^2} \cdot (1/\sqrt{1-4x} - 1 - 2x) - \frac{1}{x} \cdot (1/\sqrt{1-4x} - 1) \right). \end{aligned}$$

Posons $x = t(1-t)$, on obtient l'égalité que l'on veut. \square

1.3.2 L'amas critique conditionné à être infini

Maintenant on considère la forme d'un amas infini. On s'intéresse en particulier au cas critique $t = \frac{1}{2}$. Comme dans ce cas, $\mathbf{P}(|C_{\emptyset, 1/2}| = \infty) = 0$, on ne peut pas parler directement de la loi d'un amas critique (i.e. amas au temps critique 1/2) conditionné à être infini. Néanmoins, il existe deux façons de lui donner un sens, comme établi dans [3]. La première est de considérer la limite de la loi d'un amas conditionné à être relié avec le n -ième niveau, lorsque $n \rightarrow \infty$. Cette méthode marche en fait pour tout $t \leq \frac{1}{2}$. La deuxième est de considérer la limite de la loi d'un amas sur-critique ($t > \frac{1}{2}$) conditionné à être infini, lorsque $t \downarrow \frac{1}{2}$. On va voir que ces deux méthodes permettent de définir la même loi.

Le premier traitement

On regarde l'amas $C_{\emptyset, 1/2}$. Comme on a distingué un sommet \emptyset , tous les sommets alors se classent en différents niveaux selon leur distance de \emptyset . Le n -ième niveau a $3 \cdot 2^{n-1}$ sommets, et les n premiers niveaux (\emptyset inclus) ont en totalité $3 \cdot 2^n - 2$ sommets et $3 \cdot 2^n - 3$ arêtes. On note

$$A_n = \{\text{Il existe un chemin dans } C_{\emptyset, 1/2} \text{ de } \emptyset \text{ vers le } n\text{-ième niveau}\}.$$

L'événement $\{|C_{\emptyset, 1/2}| = \infty\}$ est la limite de $\{A_n\}$ quand n tend vers ∞ . Donc on calcule la limite faible

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\cdot | A_n\}.$$

Pour un événement cylindrique E , c'est-à-dire un événement qui peut être déterminé par un nombre fini d'arêtes (on suppose que ce sont des arêtes dans les premiers m niveaux). Il existe $2^{3 \cdot 2^m - 3}$ configurations différentes de toutes les arêtes dans les m premiers niveaux, notées $(K_i)_{i \in I}$, $I = \{1, 2, \dots, 2^{3 \cdot 2^m - 3}\}$. $(K_i)_{i \in I}$ est une partition de l'espace total. Soit J l'ensemble d'indices j tels que K_j soit contenue dans E . On a $E = \bigcup_{j \in J} K_j$, c'est une partition de E .

Pour chaque K_i , on note k_i le nombre de chemins dans $C_{\emptyset, 1/2}$ de \emptyset vers le m -ième niveau. On note $Q_m = \sum_{i \in I} k_i$ la variable aléatoire qui dénombre les chemins de \emptyset vers le m -ième niveau. Alors

$$\mathbf{P}(E \mid A_n) = \frac{\mathbf{P}(E \cap A_n)}{\mathbf{P}(A_n)} = \frac{\sum_{j \in J} \mathbf{P}(K_j) \mathbf{P}(A_n \mid K_j)}{\sum_{i \in I} \mathbf{P}(K_i) \mathbf{P}(A_n \mid K_i)}.$$

Donc pour $n \geq m$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n \mid K_i) &= \mathbf{P}(\text{Au moins un des } k_i \text{ chemins atteint le } n\text{-ième niveau} \mid K_i) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\text{Un chemin n'atteint pas le } n\text{-ième niveau})^{k_i} \\ &= 1 - (1 - \mathbf{P}(Z_{n-m} \geq 1))^{k_i} \\ &= k_i P_{n-m} + o(P_{n-m}), \end{aligned}$$

où $P_{n-m} = \mathbf{P}(Z_{n-m} \geq 1) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Ici on a utilisé le fait que, comme T est un arbre, les extrémités de deux chemins distincts sont forcément distinctes (et donc les probabilités qu'ils atteignent un certain niveau sont indépendantes). Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(E \mid A_n) &= \frac{(\sum_{j \in J} \mathbf{P}(K_j) k_j) P_{n-m} + o(P_{n-m})}{(\sum_{i \in I} \mathbf{P}(K_i) k_i) P_{n-m} + o(P_{n-m})} \\ &\rightarrow \frac{\sum_{j \in J} \mathbf{P}(K_j) k_j}{\sum_{i \in I} \mathbf{P}(K_i) k_i} \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

On a obtenu

Proposition 1.5. *Soit E un événement cylindrique, m , K_i , et Q_m définis comme précédemment, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(E \mid A_n) = \frac{\sum_{j \in J} \mathbf{P}(K_j) k_j}{\sum_{i \in I} \mathbf{P}(K_i) k_i} = \frac{\mathbf{E}[Q_m \cdot 1_E]}{\mathbf{E}[Q_m]}.$$

On remarque que l'égalité est vraie pour tout m assez grand.

Cela définit une mesure de probabilité sur l'espace Ω entier, qui est portée par $\{|C_{\emptyset,1/2}| = \infty\}$ et est donc singulière à la probabilité \mathbf{P} .

Le deuxième traitement

Maintenant, on considère la limite

$$\lim_{t \downarrow 1/2} \mathbf{P}(\cdot \mid |C_{\emptyset,t}| = \infty).$$

Elle est bien définie car la probabilité de la percolation sur un arbre binaire

$$\mathbf{P}(|C_{\emptyset,t}| = \infty) = \theta_t$$

est non-nulle pour $t > 1/2$.

Pour E un événement cylindrique, notons $(K_i)_{i \in I}$ les événements définis précédemment. Pour K_i , la probabilité que C_{\emptyset} ne soit pas infini est $(1 - \tilde{\theta}_t)^{k_i}$. Alors on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(E, |C_{\emptyset,t}| = \infty) &= 1 - \sum_{j \in J} \mathbf{P}(K_j)(1 - \tilde{\theta}_t)^{k_j} \\ &= \sum_{j \in J} \mathbf{P}(K_j)k_j \tilde{\theta}_t + o(\tilde{\theta}_t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|C_{\emptyset,t}| = \infty) &= 1 - \sum_{i \in I} \mathbf{P}(K_i)(1 - \tilde{\theta}_t)^{k_i} \\ &= \sum_{i \in I} \mathbf{P}(K_i)k_i \tilde{\theta}_t + o(\tilde{\theta}_t). \end{aligned}$$

Comme $\tilde{\theta}_t \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \frac{1}{2}$, on a

Proposition 1.6. *Soit E un événement cylindrique, m , K_i , et Q_m définis comme précédemment, alors*

$$\begin{aligned} \mu(E) &:= \lim_{t \downarrow 1/2} \mathbf{P}(E \mid |C_{\emptyset,t}| = \infty) = \lim_{t \downarrow 1/2} \frac{\mathbf{P}(E, |C_{\emptyset,t}| = \infty)}{\mathbf{P}(|C_{\emptyset,t}| = \infty)} \\ &= \frac{\sum_{j \in J} \mathbf{P}(K_j)k_j}{\sum_{i \in I} \mathbf{P}(K_i)k_i} = \frac{\mathbf{E}[Q_m \cdot 1_E]}{\mathbf{E}[Q_m]}. \end{aligned}$$

Cette limite coïncide avec la limite précédente, et permet de définir la mesure de probabilité μ sur l'espace Ω entier.

Maintenant on va considérer $C_{\emptyset,1/2} = C$ comme un arbre aléatoire (c'est-à-dire une variable aléatoire qui prend des arbres comme valeurs). On s'intéresse à la mesure image de μ par C , ce que l'on appelle la loi d'un amas critique conditionné à être infini (qui est une mesure de probabilité sur l'ensemble des arbres). On va calculer explicitement cette loi.

Proposition 1.7 (La loi d'un amas critique conditionné à être infini). *Soit S un sous-arbre fini, contenant \emptyset , avec $|S| = n$, alors*

$$\mu(S \subset C) = \frac{n+3}{3 \cdot 2^n}.$$

Démonstration. On a $\mathbf{E}[Z_m] = 1$ pour tout $m \geq 1$. Donc

$$\mathbf{E}[Q_m] = 3(1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot \mathbf{E}[Z_m]) = \frac{3}{2} \text{ pour tout } m \geq 1.$$

Soit S un sous-arbre contenant \emptyset , avec $|S| = n$. On va calculer $\mathbf{E}[Q_m \cdot 1_E]$ pour $E = \{S \subset C\}$ et $m > n$.

La probabilité que $S \subset C$ est $(1/2)^n$. D'après le Lemme 1.1, S admet $n+3$ arêtes au bords. Pour chaque $e = (u, v) \in \partial S$ avec u dans le l -ième niveau, l'espérance du nombre de chemin de u vers le m -ième niveau est $1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot \mathbf{E}[Z_{m-l}] = 1/2$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Q_m \cdot 1_E] &= \mathbf{P}(S \subset C) \mathbf{E}[Q_m \mid S \subset C] \\ &= \mathbf{P}(S \subset C) \sum_{e \in \partial S} \frac{1}{2} \\ &= \frac{n+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

On a bien

$$\mu(E) = \frac{\mathbf{E}[Q_m \cdot 1_E]}{\mathbf{E}[Q_m]} = \frac{n+3}{3 \cdot 2^n}.$$

□

On cherche une autre description de la loi de C .

Proposition 1.8. *Fixons un sommet \emptyset comme étant la racine. Construisons un arbre aléatoire C^∞ de la manière suivante :*

- *On choisit un chemin γ_∞ infini enraciné en \emptyset au hasard uniformément parmi tous les chemins possibles ;*
- *On ajoute à γ_∞ sa composante connexe dans la percolation de paramètre $1/2$ (i.e. toute autre arête est présente avec probabilité $1/2$ et on prend l'amas de γ_∞).*

Alors, l'arbre C^∞ suit la même loi que C .

Démonstration. On vérifie que pour tout S sous-arbre fini contenant \emptyset de taille n ,

$$\mathbf{P}(S \subset C^\infty) = \frac{n+3}{3 \cdot 2^n}.$$

Soit $m \geq n$, il y a $3 \cdot 2^{m-1}$ sommets dans le m -ième niveau. Pour chaque tel sommet v , la probabilité que γ_∞ passe par v est $\frac{1}{3 \cdot 2^{m-1}}$. Soit γ_v le chemin entre \emptyset et v . Alors il contient une unique arête e_v dans ∂S . Inversement, pour $e \in \partial S$

dans le l -ième niveau, il y a 2^{m-l} tels sommets v avec γ_v contenant e . De plus $|\gamma_v \cap S| = l - 1$, $|S \setminus \gamma_v| = n - l + 1$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S \subset C^\infty) &= \sum_v \frac{1}{3 \cdot 2^{m-1}} \prod_{e \in S \setminus \gamma_v} \frac{1}{2} \\ &= \sum_{e \in \partial S} 2^{m-l} \frac{1}{3 \cdot 2^{m-1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-l+1} \\ &= \frac{n+3}{3 \cdot 2^n}. \end{aligned}$$

□

L'amas infini $C_{\emptyset, 1/2}$ a donc la forme d'un chemin infini enraciné en un sommet, avec des branches finies qui lui sont attachées, qui sont des amas finis au temps $\frac{1}{2}$ d'un processus de percolation sur un arbre binaire enraciné. On l'appelle *un arbre infini avec un bout*.

On va revoir cette loi plus loin.

Remarque 1.1. Comme on a remarqué, le premier traitement marche pour tout $t \leq \frac{1}{2}$.

— On peut vérifier qu'il nous donne une mesure de probabilité μ_t portée par $\{|C_{\emptyset, t}| = \infty\}$:

$$\mu_t(E) = \frac{\mathbf{E}[Q_{m,t} \cdot 1_E]}{\mathbf{E}[Q_{m,t}]},$$

où $Q_{m,t}$ signifie le nombre de chemins de \emptyset vers le m -ième niveau au temps t ;

— On peut voir $C_{\emptyset, t} = C_t$ comme un arbre aléatoire, et obtenir la loi d'un amas sous-critique conditionné à être infini. Cette loi est donnée par

$$\mu_t(S \subset C_t) = \frac{t^n}{3} \sum_{e \in \partial S} \left(\frac{1}{2t}\right)^{l_e-1},$$

où les l_e est la profondeur de $e \in \partial S$;

— C'est aussi la loi de C_t^∞ , l'arbre infini avec un bout, qui est défini d'abord en choisissant uniformément un chemin infini enraciné en \emptyset , puis en lui ajoutant sa composante connexe dans la percolation de paramètre t .

1.4 Le temps de percolation

Une arête e entre dans un amas infini à un certain temps $Z_e \in [1/2, 1]$. De même, pour un sommet v , on définit W_v le temps où v entre dans un amas infini. On va étudier les lois de Z et W (elles sont invariantes par automorphismes de T).

Etudions un cas plus simple. Soit $T' = (V', E')$ l'arbre binaire enraciné où on distingue une racine \emptyset qui a degré 1 et les autres sommets ont degré 3. Notons e l'arête à la racine, et e_1, e_2 ses deux enfants. T' est isomorphe à des sous-arbres

de T . On considère la restriction du processus sur T' et note Y le temps où e entre dans un amas infini. On a

$$Y_e = \max(U_e, \min(Y_{e_1}, Y_{e_2})).$$

On a

$$\mathbf{P}(Y \geq t) = \mathbf{P}(U \geq t) + \mathbf{P}(U < t) \cdot \mathbf{P}(Y \geq t)^2.$$

Donc $\mathbf{P}(Y \geq t) = \frac{1}{t} - 1$ ou 1. Si $\mathbf{P}(Y = t) > 0$ pour un $t \in]1/2, 1]$, on a $\mathbf{P}(Y = t) = \mathbf{P}(U < t) \cdot 2\mathbf{P}(Y = t)\mathbf{P}(Y \geq t)$, $\mathbf{P}(Y \geq t) = \frac{1}{2t}$, $t = 1/2 \notin]1/2, 1]$. Donc la loi de Y est non-atomique au moins sur $]1/2, 1]$, et $\mathbf{P}(Y \geq t) = \frac{1}{t} - 1$ pour $\forall t \in [1/2, 1]$. Alors Y a la densité

$$f_Y(t) = \frac{1}{t^2} \text{ sur } [\frac{1}{2}, 1].$$

Pour T un arbre binaire infini, chaque arête e peut être identifiée avec deux arêtes orientées \vec{e} et \overleftarrow{e} . Soit \vec{E} l'ensemble des arêtes orientées. On pose $U_{\vec{e}} = U_{\overleftarrow{e}} = U_e$. Pour une arête orientée $\vec{e} = (v, w)$, on dit qu'elle a deux enfants de la forme (w, w_1) et (w, w_2) .

Pour une arête $\vec{e} = (v, w)$ orientée, on a un sous-arbre isomorphe à T' enraciné en v contenant e . Notons $Y_{\vec{e}}$ le temps où \vec{e} entre dans un amas infini. Elle a la densité f_Y . On a

$$Z_e = \min(Y_{\vec{e}}, Y_{\overleftarrow{e}}),$$

alors Z_e a la densité

$$f_Z(t) = \frac{2(1-t)}{t^3} \text{ sur } [\frac{1}{2}, 1].$$

De même, pour un sommet v , W_v est le temps où v entre dans un amas infini. Notons les $\vec{e}_i = (v, w_i)$ les trois arêtes incidentes à v orientées en s'éloignant de v . Alors

$$W_v = \min(Y_{\vec{e}_1}, Y_{\vec{e}_2}, Y_{\vec{e}_3})$$

et W_v a la densité

$$f_W(t) = \frac{3(1-t)^2}{t^4} \text{ sur } [\frac{1}{2}, 1]. \quad (2)$$

On étudie deux manières essentiellement différentes pour un amas de devenir infini.

Le premier cas

Pour un sommet \emptyset , on a défini $C_\emptyset = C_{\emptyset, t} \subset B_t = \{e \mid U_e \leq t\}$ comme étant l'amas contenant \emptyset au temps t . On pose C_{\emptyset, t^-} celui contenant \emptyset dans $B_{t^-} = \{e \mid U_e < t\}$. On définit W comme le temps où C_\emptyset devient infini.

Proposition 1.9.

$$\mathbf{P}(|C_{\emptyset, W^-}| < \infty \mid W) = 1.$$

Démonstration. Posons $E_{[t,t+dt]} = \{W \in [t, t + dt], |C_{\emptyset, W^-}| < \infty\}$. Pour S un sous-arbre fini de taille n . Définissons l'événement

$$E_{[t,t+dt],S} = \{W \in [t, t + dt], C_{\emptyset, W^-} = S\},$$

Cet événement équivaut à : $\forall e \in S, U_e < t, \forall e \in \partial S, U_e \geq t$, de plus, il existe au moins une $e = (v, w) \in \partial S$, telle que $U_e \in [t, t + dt]$, et w est la racine d'un amas infini au temps t . Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(E_{[t,t+dt],S}) &= t^n ((1-t)^{n+3} - (1-t-dt \cdot \tilde{\theta}_t)^{n+3}) \\ &= t^{n-2} (1-t)^{n+2} (n+3)(2t-1)dt. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(E_{[t,t+dt]}) &= \sum_S \mathbf{P}(E_{[t,t+dt],S}) \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n t^{n-2} (1-t)^{n+2} (n+3)(2t-1)dt \\ &= \frac{3(1-t)^2}{t^4} dt, \end{aligned}$$

ici a_n est le nombre de sous-arbres de taille n , calculé dans (1), et on a utilisé le Lemme 1.2. En comparant avec (2), on a

$$\mathbf{P}(E_{[t,t+dt]}) = f_W(t)dt = \mathbf{P}(W \in [t, t + dt]).$$

Donc

$$\mathbf{P}(|C_{\emptyset, W^-}| < \infty \mid W) = 1.$$

□

Dans ce cas, soit W le temps où le sommet \emptyset entre dans un amas infini. L'amas C_\emptyset reste fini jusqu'au temps W^- , et au temps W , une nouvelle arête le relie avec un amas déjà infini.

Le deuxième cas

Maintenant, on regarde un autre cas, celui où $C_{\emptyset, \frac{1}{2}}$ est conditionné à être infini, i.e. on se place sous la loi μ . On affirme que

Proposition 1.10. *Pour tout $\varepsilon \in]0, 1/2]$, l'amas au temps $\frac{1}{2} - \varepsilon$ est fini,*

$$\mu(|C_{\emptyset, \frac{1}{2} - \varepsilon}| < \infty) = 1.$$

En revanche, l'amas au temps $\frac{1}{2}^-$ est infini,

$$\mu(|C_{\emptyset, \frac{1}{2}^-}| < \infty) = 0.$$

Donc dans ce cas, $C_{\emptyset, t}$ devient infini au temps $\frac{1}{2}$, mais $C_{\emptyset, \frac{1}{2}^-}$ est déjà infini. C'est-à-dire l'amas "croît vers l'infini", d'une manière qualitativement différente de la précédente.

Démonstration de la Proposition 1.10. Soit $\varepsilon \in]0, 1/2]$. Pour S un sous-arbre fini,

$$\mu(C_{\emptyset, \frac{1}{2}-\varepsilon} = S) = \frac{\mathbf{E}[Q_m \cdot 1_E]}{\mathbf{E}[Q_m]} = \frac{\mathbf{E}[Q_m|E]\mathbf{P}(E)}{\mathbf{E}[Q_m]}.$$

On suit la démonstration de la Proposition 1.7. D'abord $\mathbf{E}[Q_m] = \frac{3}{2}$ pour $m \geq 1$. D'après la Proposition 1.4, pour un amas fini,

$$\mathbf{P}(C_{\emptyset, \frac{1}{2}-\varepsilon} = S) = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^n \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^{n+3}.$$

Pour chaque $e = (u, v) \in \partial S$ avec u dans le l -ième niveau, comme U_e est dans $[1/2 - \varepsilon, 1]$, l'espérance du nombre de chemin de u vers le m -ième niveau est $\frac{1/2}{1/2+\varepsilon} \cdot 0 + \frac{\varepsilon}{1/2+\varepsilon} \cdot \mathbf{E}[Z_{m-l}] = \frac{\varepsilon}{1/2+\varepsilon}$. Donc

$$\mu(C_{\emptyset, \frac{1}{2}-\varepsilon} = S) = \frac{(n+3) \frac{\varepsilon}{1/2+\varepsilon} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^n \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^{n+3}}{3/2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mu(|C_{\emptyset, \frac{1}{2}-\varepsilon}| < \infty) &= \sum_S \mu(C_{\emptyset, \frac{1}{2}-\varepsilon} = S) \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n \frac{(n+3) \frac{\varepsilon}{1/2+\varepsilon} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^n \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^{n+3}}{3/2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

ici on a utilisé le Lemme 1.2 pour $t = \frac{1}{2} - \varepsilon$.

Pour $t = \frac{1}{2}^-$, on a aussi

$$\mu(C_{\emptyset, \frac{1}{2}^-} = S) = \frac{\mathbf{E}[Q_m \cdot 1_E]}{\mathbf{E}[Q_m]}.$$

Mais pour que $Q_m \geq 1$ quand $t = \frac{1}{2}$ dans l'événement $E = \{C_{\emptyset, \frac{1}{2}^-} = S\}$, il faut que au moins l'une des arêtes e dans ∂S vérifie $U_e = \frac{1}{2}$. Donc la probabilité est 0, $\mathbf{E}[Q_m|E] = 0$, et donc

$$\mu(|C_{\emptyset, \frac{1}{2}^-}| < \infty) = 0.$$

□

2 Percolation gelée sur un arbre binaire

2.1 Introduction et heuristique

Soit $T=(V,E)$ l'arbre binaire infini, où chaque sommet a degré 3. Soient $(U_e, e \in E)$ des variables aléatoires indépendantes identiques de loi uniforme sur $[0,1]$. Poser $B_t = \{e : U_e \leq t\}$ donne le processus de percolation $(B_t, 0 \leq t \leq 1)$

décrit précédemment. On va étudier un autre processus celui de percolation gelée, décrit informellement par les $(A_t \subseteq E, 0 \leq t \leq 1)$ tels que :

A_0 est vide et pour tout $e \in E$, au temps $t = U_e$, poser $A_t = A_{t-} \cup \{e\}$ si chaque sommet de e est dans un amas fini de A_{t-} , sinon poser $A_t = A_{t-}$ (*)

On a vu (Proposition 1.2) que B_t est fini pour $t \leq \frac{1}{2}$, donc tout processus satisfaisant (*) doit avoir $A_t = B_t$ pour $t \leq \frac{1}{2}$ et $A_t \subset B_t$ pour $t > \frac{1}{2}$. Qualitativement, les amas de ce processus grossissent jusqu'à devenir infinis mais sont alors gelées et plus aucune arête ne leur est ajoutée. A l'instant final, A_1 est une forêt aléatoire sur T avec des amas finis et infinis, tel quel deux amas finis ne sont jamais séparés par une seule arête (ne sont jamais à distance 1 l'un de l'autre). Rigoureusement, il n'est pas clair que (*) spécifie un processus unique, car il n'y a pas de critère apparent simple en fonction des U_e qui permet de dire si une arête e rejoint A_{U_e-} à l'instant U_e . Dans la sous-section 2.2 on démontre le théorème de construction suivant qui l'affirme :

Théorème 2.1. *Il existe une loi jointe pour $(A_t, 0 \leq t \leq 1)$ et $(U_e, e \in E)$ telle que (*) est vérifié et cette loi est invariante par automorphismes de T .*

On va d'abord montrer quelques propriétés simples de ce processus et quelques résultats préliminaires qui serviront à la construction.

Proposition 2.1. *Pour e arête et v sommet fixés :*

- (a) $\mathbf{P}(\text{amas contenant } e \text{ devient infini dans } [t, t+dt]) = \frac{dt}{4t^4}$ avec $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$
- (b) $\mathbf{P}(\text{amas contenant } v \text{ devient infini dans } [t, t+dt]) = \frac{3dt}{8t^4}$ avec $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$
- (c) $\mathbf{P}(e \text{ dans un amas infini de } A_1) = \frac{7}{12}$, $\mathbf{P}(e \text{ dans un amas fini de } A_1) = \frac{1}{16}$ et $\mathbf{P}(e \text{ n'est pas dans } A_1) = \frac{17}{48}$
- (d) $\mathbf{P}(v \text{ dans un amas infini de } A_1) = \frac{7}{8}$, $\mathbf{P}(v \text{ dans un amas fini de } A_1) = \frac{7}{64}$ et $\mathbf{P}(v \text{ n'est pas dans } A_1) = \frac{1}{64}$

On a d'abord besoin d'une relation de récurrence de lois aléatoires qui permettra de prouver la Proposition 2.1 et servira pour la construction. Soit $I = [\frac{1}{2}, 1] \cup \{\infty\}$ et $\Phi : I \times [0, 1] \rightarrow I$ définie par :

$$\Phi(x, u) = x \text{ si } x > u \text{ et } \Phi(x, u) = \infty \text{ si } x \leq u$$

Définissons une loi de probabilités ν sur I par :

$$\nu(dy) = \frac{dy}{2y^2} \text{ si } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \text{ et } \nu(\infty) = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Ou de manière équivalente par :

$$\nu(y, \infty] = \frac{1}{2y} \text{ si } \frac{1}{2} \leq y \leq 1$$

Considérons la propriété suivante pour une loi de probabilité μ sur I : si (Y_1, Y_2, U) sont indépendantes, chaque Y_i ayant loi μ et U ayant loi uniforme sur $[0, 1]$,

$$\text{alors } \Phi(\min(Y_1, Y_2), U) \text{ a loi } \mu. \quad (4)$$

Lemme 2.1. Soit μ une loi de probabilité sur I qui est non-atomique sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Alors μ a la propriété (4) si et seulement si pour un certain $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$,

$$\mu(dx) = \frac{dx}{2x^2}, \frac{1}{2} < x \leq x_0; \mu(\infty) = \frac{1}{2x_0}.$$

Démonstration. μ a propriété (4) ssi $\Phi(\min(Y_1, Y_2), U)$ a loi μ , où $Y_1, Y_2 \sim \mu$ et U a loi uniforme sur $[0, 1]$. Donc μ a propriété (4) ssi F sa fonction de répartition satisfait :

$$F(x) = \mathbf{P}(U < \min(Y_1, Y_2) \leq x) \text{ pour tout } x \text{ dans } [\frac{1}{2}, 1]$$

Comme μ n'a pas d'atomes ceci équivaut à :

$$dF(x) = 2x(1 - F(x))dF(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } [\frac{1}{2}, 1]$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(U < \min(Y_1, Y_2) \leq x) &= \int_{I^2} \int_0^1 \mathbf{1}_{\{t < \min(y_1, y_2) \leq x\}} \mu(dy_1) \mu(dy_2) dt \\ &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \mu(dy_1) \int_{I \cap [y_1, \infty]} \mu(dy_2) \int_0^1 \mathbf{1}_{\{t < y_1 \leq x\}} dt \\ &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \mu(dy_1) \mathbf{1}_{\{y_1 \leq x\}} \int_{I \cap [y_1, \infty]} \mu(dy_2) \int_0^1 \mathbf{1}_{\{t < y_1\}} dt \\ &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^x y_1 \mu([y_1, \infty]) \mu(dy_1) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^x y_1 (1 - F(y_1)) \mu(dy_1) \end{aligned}$$

donc $d(\mathbf{P}(U < \min(Y_1, Y_2) \leq x)) = 2x(1 - F(x))dF(x)$ (μ n'a pas d'atomes $\implies \mathbf{P}(Y_1 = Y_2) = 0$). Finalement, μ satisfait la propriété (4) équivaut à :

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2x} \text{ sur } [\frac{1}{2}, 1] \cap \text{support}(\mu)$$

donc $[\frac{1}{2}, 1] \cap \text{support}(\mu)$ doit être de la forme $[\frac{1}{2}, x_0]$ car $1 - \frac{1}{2x}$ est strictement croissante et μ n'a pas d'atomes dans $[\frac{1}{2}, x_0]$ et F est la fonction de répartition de la loi décrite dans le lemme. En reversant l'argument on montre qu'une telle loi de probabilité satisfait la propriété (4). \square

Supposons le processus de percolation gelée défini avec les propriétés d'invariance et d'indépendance. On considère $T' = (V', E')$ l'arbre binaire enraciné où une racine a degré 1 et les autres sommets ont degré 3. T' est isomorphe à des sous-arbres de T , où on distingue un sommet et on supprime deux des trois sous-arbres dont il peut être la racine. Pour $(U_e, e \in E')$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$, on considère le processus de percolation gelée sur T' . Appelons e' l'arête incidente à la racine, v' l'unique voisin de la racine et e_1, e_2 les deux autres arêtes incidentes à v' . Soient Y le temps auquel l'amas contenant e' devient infini (avec $Y = \infty$ si cela n'arrive pas), T'_1 le sous-arbre isomorphe à T' de racine v' et contenant e_1 , T'_2 le sous-arbre isomorphe à T' de racine v' et contenant e_2 , Y_1 le temps auquel l'amas contenant e_1 devient infini et Y_2 le temps auquel l'amas contenant e_2 devient infini. Donc v' devient

infini (rejoint un amas infini) au temps $\min(Y_1, Y_2)$. A ce moment, si e' est déjà apparu, i.e. si $U_{e'} < \min(Y_1, Y_2)$, alors au temps $U_{e'}$, les amas des extrémité de e' sont finis et $A_{U_{e'}} = \{e'\} \cup A_{U_{e'}^-}$. Notons qu'il est possible que $\min(Y_1, Y_2) = \infty$ si v' reste dans un amas fini jusqu'au temps 1, auquel cas systématiquement $A_{U_{e'}} = \{e'\} \cup A_{U_{e'}^-}$. Sinon (i.e. si $U_{e'} \geq \min(Y_1, Y_2)$), $A_{U_{e'}} = A_{U_{e'}^-}$ et $e' \notin A_1$. Ceci veut exactement dire :

$$Y = \Phi(\min(Y_1, Y_2), U_{e'}) \quad (5)$$

Comme T'_1, T'_2 sont isomorphes à T' , on a que Y_1, Y_2 et Y ont la même loi, cette loi satisfait donc la condition (4). On admet ici que cette loi est non-atomique et qu'elle est portée sur $[1/2, 1]$ tout entier. D'après le Lemme 2.1, il s'agit de la loi (3). On peut maintenant faire les calculs pour prouver la Proposition 2.1.

Démonstration de la Proposition 2.1. On considère le processus de percolation gelée sur T . Fixons une arête e et soit Z le temps auquel l'amas contenant e devient infini ($Z = \infty$ si cela n'arrive jamais). Appelons e_1, e_2, e_3, e_4 les arêtes adjacentes à e , T'_1, T'_2, T'_3, T'_4 les sous-arbres isomorphes à T' (avec T'_i contient e_i et e_i est la seule arête adjacente à la racine dans T'_i). Soit $Y_i, i = 1, 2, 3, 4$, le temps auquel e_i entre dans un amas infini du processus de percolation gelée restreint à T'_i . On a que Y_i a la loi (3), notée ν , pour tout $i=1,2,3,4$. Alors on a :

$$Z = \min(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \text{ si } U_e < \min(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \text{ et } Z = \infty \text{ sinon}$$

On va alors obtenir le point (a), i.e. la densité f_Z de Z sur $[\frac{1}{2}, 1]$:

$$f_Z(x) = x \times 4 \frac{d\nu}{dx} \nu^3(x, \infty) = 4x \frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2x}\right)^3 = \frac{1}{4x^4}$$

En effet, Z est à valeurs dans I , à densité dans $[\frac{1}{2}, 1]$ et

$$\begin{aligned} & \int_{I^4} \int_0^1 f(\min(y_1, y_2, y_3, y_4)) \mathbf{1}_{\{x < y_1, y_2, y_3, y_4\}} dx \nu(dy_1) \nu(dy_2) \nu(dy_3) \nu(dy_4) \\ &= 4 \int_{[\frac{1}{2}, 1]} \nu(dy_1) \int_{(I \cap [y_1, \infty])^3} \int_0^1 f(y_1) \mathbf{1}_{\{x < y_1\}} dx \nu(dy_2) \nu(dy_3) \nu(dy_4) \\ &= 4 \int_{[\frac{1}{2}, 1]} \nu(dy_1) \int_{(I \cap [y_1, \infty])^3} y_1 f(y_1) \nu(dy_2) \nu(dy_3) \nu(dy_4) \\ &= 4 \int_{[\frac{1}{2}, 1]} y_1 f(y_1) \nu^3([y_1, \infty]) \nu(dy_1). \end{aligned}$$

Ceci prouve le point (a). On a alors :

$$\mathbf{P}(e \text{ dans un amas infini de } A_1) = \mathbf{P}(Z \leq 1) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{4x^4} = \frac{7}{12}.$$

On a aussi que l'événement $\{e \text{ dans un amas fini de } A_1\}$ est égal à l'événement $\{Y_i = \infty, \quad i = 1, 2, 3, 4\}$. Et la probabilité du deuxième événement est $\nu^4(\infty) = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$. Ceci prouve le point (c) car les événements considérés forment une partition de l'espace de probabilité.

Fixons maintenant un sommet v . Soient e_1, e_2, e_3 les arêtes incidentes à v , T'_1, T'_2, T'_3 les sous-arbres isomorphes à T avec v pour racine et e_i comme seule arête incidente à la racine dans T'_i et $Y_i, i=1,2,3$, le temps auquel, en percolation gelée sur T'_i , l'amas contenant e_i devient infini. Alors en percolation gelée sur T , v rejoint un amas infini au temps $\min(Y_1, Y_2, Y_3)$. Comme les Y_i ont la loi ν décrite en (3), la densité de ce minimum est :

$$3 \frac{d\nu}{dy} \nu^2(y, \infty] = \frac{3}{2y^2} (\frac{1}{2y})^2 = \frac{3}{8y^4}$$

car par un calcul similaire

$$\begin{aligned} \int_{I^3} f(\min(Y_1, Y_2, Y_3)) \nu(dy_1) \nu(dy_2) \nu(dy_3) &= 3 \int_{[\frac{1}{2}, 1]} \nu(dy_1) \int_{(I \cap [y_1, \infty])^2} f(y_1) \nu(dy_2) \nu(dy_3) \\ &= 3 \int_{[\frac{1}{2}, 1]} f(y_1) \nu^2([y_1, \infty]) \nu(dy_1). \end{aligned}$$

Ceci prouve le point (b). De plus,

$$\mathbf{P}(v \text{ dans un amas infini de } A_1) = 1 - P^3(Y = \infty) = 1 - (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$$

De même, $\mathbf{P}(v \text{ dans aucun amas de } A_1) = q^3$, où q est la probabilité, en percolation gelée sur T , que l'arête e incidente à la racine n'est pas dans A_1 . Avec les notations de (5) :

$$q = \mathbf{P}(U_{e'} \geq \min(Y_1, Y_2)) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathbf{P}(\min(Y_1, Y_2) \leq x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - (\frac{1}{2x})^2) dx = \frac{1}{4}.$$

donc $\mathbf{P}(v \text{ dans aucun amas de } A_1) = (\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}$ et le point (d) est prouvé car les événements considérés forment une partition de l'espace de probabilité. \square

2.2 Construction

Rappelons que $T=(V,E)$ est l'arbre binaire infini et $(U_e, e \in E)$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Chaque arête e peut être identifiée avec deux arêtes orientées \vec{e} et \overleftarrow{e} . Soit \vec{E} l'ensemble des arêtes orientées. On définit $U_{\vec{e}} = U_{\overleftarrow{e}} = U_e$. Pour une arête orientée $\vec{e} = (v, w)$, on dit qu'elle a deux enfants de la forme (w, a) et (w, b) . Rappelons que ν est la loi définie en (3).

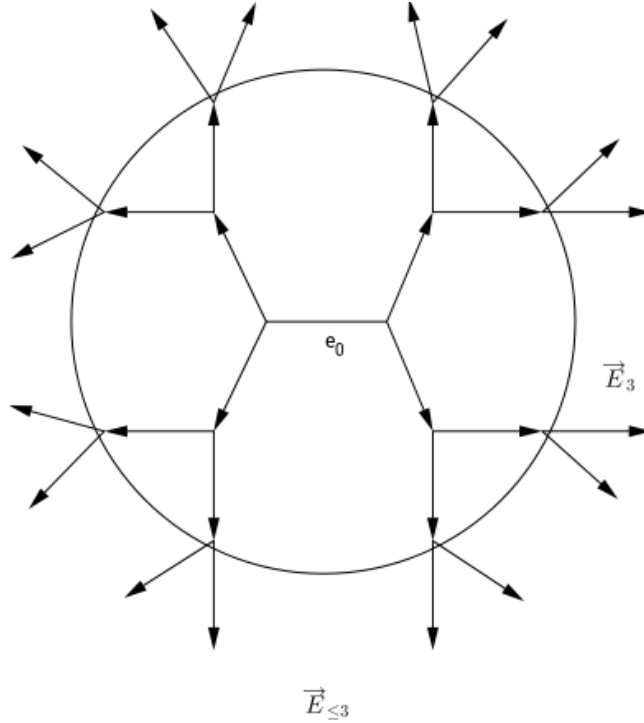
Lemme 2.2. *Il existe une loi jointe pour $((U_{\vec{e}}, Y_{\vec{e}}) : \vec{e} \in \vec{E})$ qui est invariante par automorphisme de T et telle que pour tout $\vec{e} \in \vec{E}$:*

$$Y_{\vec{e}} \text{ a loi } \nu$$

$$Y_{\vec{e}} = \Phi(\min(Y_{\vec{e}_1}, Y_{\vec{e}_2}), U_{\vec{e}}) \text{ p.s.} \quad (6)$$

où \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont les enfants de \vec{e} .

Démonstration. Fixons une arête non-orientée e_0 et h un entier ≥ 1 . Soit $\vec{E}_{\leq h}$ l'ensemble des arêtes orientées dont la distance à e_0 est au plus h . Soit \vec{E}_h l'ensemble des arêtes orientées dont la distance à e_0 est exactement h et qui sont orientées en s'éloignant de e_0 . Soient $(Y_{\vec{e}}, \vec{e} \in \vec{E}_h)$ des variables aléatoires indépendantes de $(U_{\vec{e}}, \vec{e} \in \vec{E})$ ayant chacune loi ν .



On utilise la relation (6) pour définir $Y_{\vec{e}}$ pour $\vec{e} \in \vec{E}_{\leq h}$. Le Lemme 2.1 assure alors que chaque $Y_{\vec{e}}$ a loi ν . Soit μ_h la loi jointe des $((U_{\vec{e}}, Y_{\vec{e}}) : \vec{e} \in \vec{E}_{\leq h})$. Quand h croît, les lois μ_h sont consistances grâce au Lemme 2.1. En effet, pour construire μ_{h+1} , on définit les mêmes $Y_{\vec{e}}$ pour $\vec{e} \in \vec{E}_{\leq h}$ que pour construire μ_h . μ_{h+1} est donc une loi jointe de μ_h et des $((U_{\vec{e}}, Y_{\vec{e}}) : \vec{e} \in \vec{E}_{h+1})$ et on a $\mu_{h+1}(A \times E) = \mu_h(A)$, où E est l'espace de valeurs de $((U_{\vec{e}}, Y_{\vec{e}}) : \vec{e} \in \vec{E}_{h+1})$ et A ensemble mesurable de l'espace des valeurs de $((U_{\vec{e}}, Y_{\vec{e}}) : \vec{e} \in \vec{E}_{\leq h})$. Le théorème d'extension de Kolmogorov établit l'existence d'une loi jointe unique pour $((U_{\vec{e}}, Y_{\vec{e}}), \vec{e} \in \vec{E})$. Vérifier l'invariance est direct car les $U_{\vec{e}}$ et les $Y_{\vec{e}}$ ont toutes les mêmes lois. \square

Notons $D(\vec{e})$ l'ensemble contenant \vec{e} et ses descendants considérés comme des arêtes non-orientées. Les $Y_{\vec{e}}$ étant indépendantes des $U_{\vec{e}}$, qui sont indé-

pendantes entre elles et $Y_{\vec{e}}$ dépendant uniquement des $Y_{\vec{f}}$ telles que \vec{f} est un descendant de \vec{e} par la formule (6), la propriété suivante d'indépendance tient :

Proposition 2.2. *Pour $i \geq 1$, soient $f_{i,1}, f_{i,2}, \dots \in E$ et $\vec{e}_{i,1}, \vec{e}_{i,2}, \dots \in \vec{E}$. Soit $D_i = \cup_j D(\vec{e}_{i,j}) \cup \{f_{i,1}, f_{i,2}, \dots\}$. Si les ensembles D_i sont disjoints quand i varie alors les tribus $\sigma(Y_{\vec{e}_{i,j}}, U_{f_{i,j}}, j \geq 1)$ sont indépendantes quand i varie.*

Supposons $Y_{\vec{e}} \leq 1$. Alors exactement un enfant de \vec{e} a Y-valeur égale à $Y_{\vec{e}}$ (car lois à densité sur $[\frac{1}{2}, 1]$). Récursivement, à \vec{e} est associé un rayon infini $\vec{e}_0 = \vec{e}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots$ tel que $Y_{\vec{e}_i} = Y_{\vec{e}}$ pour tout $i \geq 0$. On peut maintenant énoncer la construction du processus de percolation gelée. Pour une arête non-orientée e , notons $\partial(\{e\})$ l'ensemble des quatre arêtes adjacentes à e , chacune orientée en s'éloignant de e . Définissons :

$$\mathcal{A}_1 = \{e \in E : U_e < \min(Y_{e'}, e' \in \partial(\{e\}))\}$$

Puis :

$$\mathcal{A}_t = \{e \in \mathcal{A}_1 : U_e \leq t\}, 0 \leq t < 1 \quad (7)$$

(\mathcal{A}_t) hérite la propriété d'invariance par automorphismes de T de ($Y_{\vec{e}}$) et e ne peut rejoindre le processus ($\mathcal{A}_t, 0 \leq t \leq 1$) qu'à l'instant U_e . Pour prouver le Théorème 2.1 de construction on a besoin d'un résultat supplémentaire. On dit qu'un sommet v percole à l'instant t si v est dans un amas infini de \mathcal{A}_t , i.e. si il existe un rayon infini $v_0 = v, v_1, v_2, \dots$ tel que $(v_i, v_{i+1}) \in \mathcal{A}_t$ pour tout $i \geq 0$.

Proposition 2.3. *Soit $t < 1$, un sommet v percole à l'instant t si et seulement si $t \geq \min(Y_{\vec{e}_1}, Y_{\vec{e}_2}, Y_{\vec{e}_3})$ où $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont les arêtes incidentes à v dirigées en s'éloignant de v .*

En admettant ce résultat pour le moment, fixons une arête non-orientée et soit l'instant $t = U_e < 1$. Soit $\vec{e} = (v, w)$ une orientation de e . Par la formule (6), $Y_{\vec{e}} > t$. Par la Proposition 2.3, v est dans un amas fini à l'instant t si et seulement si $t < \min(Y_{\vec{e}_2}, Y_{\vec{e}_3})$ où \vec{e}_2, \vec{e}_3 sont les deux autres arêtes incidentes à v orientées en s'éloignant de v . En appliquant le même argument à w , on voit que la propriété :

les deux sommets de e sont dans un amas fini à l'instant t (condition (*))

est équivalente à la propriété :

$$t < \min(Y_{e'} : e' \in \partial(\{e\}))$$

Ainsi le critère (7), qui détermine si e rejoint le processus de percolation gelée (\mathcal{A}_t), est équivalent à la règle (*), ce qui établit le Théorème 2.1. Pour prouver la Proposition 2.3, on a besoin d'une série de lemmes.

Lemme 2.3. *Soit \vec{e}_2 enfant de \vec{e}_1 . Si e_1 (arête non-orientée correspondant à \vec{e}_1) est dans \mathcal{A}_1 , alors $Y_{\vec{e}_1} \leq Y_{\vec{e}_2}$.*

Démonstration. Soit \vec{e}_3 l'autre enfant de \vec{e}_1 . D'après la formule (6), $Y_{\vec{e}_1} = \Phi(\min(Y_{\vec{e}_2}, Y_{\vec{e}_3}), U_{\vec{e}_1})$. Et donc $Y_{\vec{e}_1} > Y_{\vec{e}_2}$ implique $\min(Y_{\vec{e}_2}, Y_{\vec{e}_3}) \leq U_{\vec{e}_1}$ mais alors \vec{e}_1 n'est pas dans A_1 . \square

Lemme 2.4. *Si $t < Y_{\vec{e}}$ et $t < 1$ alors il n'y a pas de rayon infini d'arêtes commençant par \vec{e} dans A_t .*

Démonstration. On fixe $t < t_2 \leq 1$ et un chemin fini $\vec{e}_0 = \vec{e}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_h$. Considérons l'événement $D = \{Y_{\vec{e}} \geq t_2 \text{ et } e_i \in A_t \forall 0 \leq i \leq h\}$. Si D est réalisé, alors $e_{i-1} \in A_1$ pour $1 \leq i \leq h$, ce qui implique $U_{e_{i-1}} < \min(Y_{\vec{e}_i}, Y_{\vec{f}_i})$ où \vec{f}_i est l'autre enfant de \vec{e}_{i-1} (par le Lemme 2.3) et donc $Y_{\vec{e}_{i-1}} = \min(Y_{\vec{e}_i}, Y_{\vec{f}_i})$. Aussi, si D est réalisé, on a $Y_{\vec{e}} \geq t_2$ et donc en appliquant le Lemme 2.3 plusieurs fois, $Y_{\vec{e}_{i-1}} \geq t_2$. Donc de la relation (6) ($Y_{\vec{e}_{i-1}} = \min(Y_{\vec{e}_i}, Y_{\vec{f}_i})$) on déduit que $Y_{\vec{f}_i} \geq t_2$ et :

$$\mathbf{P}(D) \leq \mathbf{P}(U_{e_i} \leq t, Y_{\vec{f}_i} \geq t_2, 1 \leq i \leq h)$$

Par la Proposition 2.2 d'indépendance, les variables aléatoires U_{e_i} et $Y_{\vec{f}_i}$ dans la formule ci-dessus sont indépendantes (les arêtes et leurs descendants ne se rencontrent pas) et comme $Y_{\vec{f}_i}$ a loi ν on obtient :

$$\mathbf{P}(D) \leq \left(\frac{t}{2t_2}\right)^h$$

En sommant sur tous les 2^h chemins possibles de longueur h, on trouve :

$$\mathbf{P}(Y_{\vec{e}} \geq t_2, \exists \text{ un chemin de longueur } h \text{ dans } A_t \text{ commençant par } \vec{e}) \leq \left(\frac{t}{t_2}\right)^h$$

Si $h \rightarrow \infty$,

$$\mathbf{P}(Y_{\vec{e}} \geq t_2, \exists \text{ un chemin infini dans } A_t \text{ commençant par } \vec{e}) = 0$$

Faire $t_2 \searrow t$ établit le lemme. \square

Rappelons l'énoncé de la Proposition 2.3 : $t < 1$, v percole à l'instant t ssi $t \geq \min(Y_{\vec{e}_{[1]}}, Y_{\vec{e}_{[2]}}, Y_{\vec{e}_{[3]}})$ où $\vec{e}_{[1]}, \vec{e}_{[2]}, \vec{e}_{[3]}$ sont les arêtes incidentes à v dirigés en s'éloignant de v . Le Lemme 2.4 établit : si $t < \min(Y_{\vec{e}_{[1]}}, Y_{\vec{e}_{[2]}}, Y_{\vec{e}_{[3]}})$ et $t < 1$ alors v ne percole pas à l'instant t . Le lemme suivant établit l'autre sens :

Lemme 2.5. *Si $t = Y_{\vec{e}_{[1]}} < \min(Y_{\vec{e}_{[2]}}, Y_{\vec{e}_{[3]}})$ alors v percole à l'instant t via l'arête $\vec{e}_{[1]}$.*

Démonstration. On peut prendre $t \leq 1$. Comme $Y_{\vec{e}_{[1]}} \leq 1$, en appliquant la formule (6) récursivement, on obtient qu'il existe un rayon infini $\vec{e}_1 = \vec{e}_{[1]}, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots$ tel que :

$$U_{\vec{e}_i} < t = Y_{\vec{e}_i}, \quad i \geq 1 \quad (8)$$

$$t = Y_{\vec{e}_i} < Y_{\vec{f}_i}, \quad i \geq 2 \quad (9)$$

où \vec{f}_i est l'autre enfant de \vec{e}_{i-1} . On veut montrer que $\vec{e}_j \in A_t$ pour tout $j \geq 1$. Pour $j \geq 2$, ceci équivaut à montrer que :

$$U_{\vec{e}_j} < \min(Y_{\vec{e}_{j+1}}, Y_{\vec{f}_{j+1}}, Y_{\vec{f}_j}, Y_{\vec{e}_{j-1}})$$

$Y_{\vec{e}_{j+1}}, Y_{\vec{f}_{j+1}}, Y_{\vec{f}_j}$ satisfont (8) et (9). Il suffit donc de montrer que :

$$t \leq Y_{\vec{e}_{j-1}}, j \geq 2.$$

Si ceci n'est pas vérifié pour un j minimal, on a que $Y_{\vec{e}_{j-1}} = t' < t$. Si $j \geq 3$, par la formule (6), $Y_{\vec{f}_{j-1}} = t'$ ou $Y_{\vec{e}_{j-2}} = t'$. Mais $Y_{\vec{f}_{j-1}} = t'$ ne peut pas arriver par (9) et $Y_{\vec{e}_{j-2}} = t'$ ne peut pas arriver en appliquant le Lemme 2.3 récursivement. Si $Y_{\vec{e}_{j-1}} = t' < t$ pour $j = 2$, alors la formule (6) implique $Y_{\vec{e}_{[2]}} = t'$ ou $Y_{\vec{e}_{[3]}} = t'$, mais ceci est impossible par hypothèse. On a donc $\vec{e}_j \in A_t$ pour tout $j \geq 2$. De même, pour montrer que $\vec{e}_{[1]} \in A_t$, il suffit de montrer que $t \leq \min(Y_{\vec{e}_2}, Y_{\vec{f}_2}, Y_{\vec{e}_{[2]}}), Y_{\vec{e}_{[3]}})$ et cela est vrai d'après (9) et les hypothèses du lemme. Ainsi le rayon infini $\vec{e}_1 = \vec{e}_{[1]}, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots$ est dans A_t et v percole à l'instant t via $\vec{e}_{[1]}$. \square

Dans la Proposition 2.3, on a supposé $t < 1$. Un argument supplémentaire (??) étend la conclusion de la proposition à $t = 1$ ce qui implique alors le résultat suivant :

Proposition 2.4. *Pour $e \in E$, soit :*

$$Z_e = \min(Y_{e'} : e' \in \partial(\{e\}))$$

Alors soit $Z_e = \infty$ et $e \notin A_1$, soit e rejoint le processus de percolation gelée à l'instant U_e et son amas devient infini à l'instant Z_e , où $U_e < Z_e < 1$.

On justifie maintenant l'hypothèse que l'on a faite sur la loi de Y , à savoir qu'elle est non-atomique et qu'elle est portée sur $[1/2, 1]$ tout entier. En fait, grâce au théorème d'extension de Kolmogorov, toute loi vérifiant la propriété (4) peut être utilisée pour construire un processus de percolation gelée. Mais la seule loi qui va donner les propriétés désirées, est celle que l'on a utilisée.

Si la loi de Y admet un atome en t , on va voir qu'une arête \vec{e} avec $Y_{\vec{e}} = t$ percole avant le temps t . Supposons $\mathbf{P}(Y = t) = \varepsilon$. Notons $\mathbf{P}(Y > t) = p$. On a $\varepsilon = \mathbf{P}(U \leq t) \cdot (2\varepsilon \cdot p + \varepsilon^2)$, donc $p = \frac{1}{2}(1/t - \varepsilon)$. Soit une arête \vec{e} vérifiant $Y_{\vec{e}} = t$. Pour $U_{\vec{e}} \leq t_0 < t$, on regarde un sous-arbre C enraciné en \vec{e} dans \mathcal{A}_{t_0} , formé par les enfants de \vec{e} dont la variable Y vaut t . On affirme que c'est un processus de Galton-Watson : pour chaque arête \vec{e}_0 d'enfants \vec{e}_1, \vec{e}_2 dans T , en sachant qu'elle est dans l'arbre C , c'est-à-dire $U_{\vec{e}_0} \leq t_0$ et $Y_{\vec{e}_0} = t$, on a

$$\mathbf{P}(Y_{\vec{e}_1} = t, Y_{\vec{e}_2} > t) = \mathbf{P}(Y_{\vec{e}_1} > t, Y_{\vec{e}_2} = t) = 2\varepsilon p \cdot \frac{t}{\varepsilon} = 1 - \varepsilon t$$

$$\mathbf{P}(Y_{\vec{e}_1} = Y_{\vec{e}_2} = t) = \varepsilon^2 \cdot \frac{t}{\varepsilon} = \varepsilon t,$$

$$\mathbf{P}(U_{\vec{e}_i} \leq t \mid Y_{\vec{e}_i} = t) = 1.$$

Alors

$$\mathbf{P}(\vec{e}_0 \text{ admet 1 enfant dans } C) = (1 - \varepsilon t) \cdot \frac{t_0}{t} + \varepsilon t \cdot 2 \frac{t_0}{t} (1 - \frac{t_0}{t}),$$

$$\mathbf{P}(\vec{e}_0 \text{ admet 2 enfants dans } C) = \varepsilon t \cdot (\frac{t_0}{t})^2,$$

et on a

$$\mathbf{E}(\text{Nombre d'enfants}) = t_0 \cdot (\frac{1}{t} + \varepsilon).$$

Alors, pour $t_0 > (\frac{1}{t} + \varepsilon)^{-1}$, d'après la propriété du processus Galton-Watson, l'arbre C a une probabilité non-nulle d'être infini. Donc il y a déjà percolation en \vec{e} avant le temps $Y_{\vec{e}} = t$.

Si la loi est portée sur $[1/2, x_0]$ pour $x_0 < 1$, de la même façon, on peut voir que pour une arête \vec{e} avec $Y_{\vec{e}} = \infty$, il y a percolation en \vec{e} en temps fini.

2.3 Forme des amas

Fixons $e_0 \in E$ et soit C_t l'amas contenant e_0 dans A_t , avec C_t vide si e_0 n'est pas dans A_t . On a montré dans la Proposition 2.1 que C_t est infini (resp. fini non-vide, resp. vide) avec probabilité $\frac{7}{12}$ (resp. $\frac{1}{16}$, resp. $\frac{17}{48}$). On va étudier la forme de C_t , d'abord quand il est fini.

Pour un sous-arbre fini \mathbf{s} de T , on note $\partial(\mathbf{s})$ l'ensemble des arêtes de $(E \setminus \mathbf{s})$ qui sont adjacentes à une arête de \mathbf{s} , orientées en s'éloignant de \mathbf{s} .

Lemme 2.6. *Sont équivalents :*

- (i) $\mathbf{s} \subseteq C_t$ et C_t fini
- (ii) $Y_{\vec{e}} > t$ pour tout $\vec{e} \in \partial(\mathbf{s})$ et $U_e \leq t$ pour tout $e \in \mathbf{s}$

Démonstration. Si (ii) vrai, en appliquant la formule (6) ($Y_{\vec{e}} = \Phi(\min(Y_{\vec{e}_1}, Y_{\vec{e}_2}), U_{\vec{e}})$), récursivement on trouve que $Y_{\vec{e}} > t$ pour toute orientation \vec{e} de toute arête e de \mathbf{s} . Donc chaque e dans \mathbf{s} entre dans le processus de percolation gelée (car $U_e \leq t$ pour tout e dans \mathbf{s} d'après (ii)) et donc $\mathbf{s} \subseteq C_t$. Par la Proposition 2.3, aucun sommet de \mathbf{s} n'est dans un amas infini de A_t , donc C_t doit être fini. Réciproquement, supposons (ii) faux. Soit il existe e dans \mathbf{s} tel que $U_e > t$ et donc $\mathbf{s} \not\subseteq C_t$ (car $\mathbf{s} \not\subseteq A_t$) et (i) faux, soit il existe $\vec{f} \in \partial(\mathbf{s})$ tel que $Y_{\vec{f}} \leq t$.

Dans ce cas, \vec{f} doit avoir une arête parent \vec{e} telle que e dans \mathbf{s} . Si (i) vrai alors $e \in C_t$ et le Lemme 2.3 implique $Y_{\vec{e}} \leq Y_{\vec{f}} \leq t$ donc $Y_{\vec{e}} \leq t$. La Proposition 2.3 implique alors qu'un sommet de e est dans un amas infini de A_t ce qui contredit dans (i) l'assertion que C_t est fini, d'où (i) est faux. \square

Considérons le processus de percolation ordinaire sur T et $B_{\frac{1}{2}}$ l'état critique et notons B l'amas contenant e_0 dans $B_{\frac{1}{2}}$ sachant que e_0 est présent. On a la proposition suivante :

Proposition 2.5. $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Sachant que C_t est fini non-vide, C_t a la même loi que B .

Démonstration. Soit \mathbf{s} un sous-arbre fini de T contenant e_0 . On a :

$$\mathbf{P}(\mathbf{s} \subseteq B) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{card}(\mathbf{s})-1} \quad (10)$$

On va montrer :

$$\mathbf{P}(\mathbf{s} \subseteq C_t \text{ et } C_t \text{ est fini}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{card}(\mathbf{s})+3} t^{-3} \quad (11)$$

Appliquer cette formule à $\mathbf{s} = \{e_0\}$ donne :

$$\mathbf{P}(C_t \text{ est fini non vide}) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 t^{-3}$$

Combiner ces deux dernières formules donne :

$$\mathbf{P}(\mathbf{s} \subseteq C_t \mid C_t \text{ fini non vide}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{card}(\mathbf{s})-1} \quad (12)$$

L'égalité entre (10) et (11) implique l'égalité des lois par le lemme de classe monotone (les tels \mathbf{s} forment un Π -systeme et leurs unions dénombrables donnent tous les sous-arbres de $B_{\frac{1}{2}}$ contenant e_0). Montrons donc (11). Le Lemme 1.1 donne que $\text{card}(\partial(\mathbf{s})) = \text{card}(\mathbf{s}) + 3$. D'après le lemme précédent :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{s} \subseteq C_t \text{ et } C_t \text{ fini}) &= \mathbf{P}(Y_{\vec{e}} > t \forall \vec{e} \in \partial(\mathbf{s}) \text{ et } U_e < t \forall e \in \mathbf{s}) \\ &= \left(\frac{1}{2t}\right)^{\text{card}(\mathbf{s})+3} t^{\text{card}(\mathbf{s})} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{card}(\mathbf{s})+3} t^{-3} \end{aligned}$$

par indépendance dans le deuxième événement (Proposition 2.2). \square

On va maintenant étendre la Proposition 2.3 à $t=1$. On avait besoin de $t < 1$ dans le Lemme 2.4 pour montrer que si $t < Y_{\vec{e}}$ et $t < 1$ alors il n'y a pas de rayon infini d'arêtes commençant par \vec{e} dans A_t . On va montrer que les amas infinis ne se forment pas à l'instant $t=1$.

Lemme 2.7. $\mathbf{P}(\text{card}(C_t) < \infty \forall t < 1, \text{card}(C_1) = \infty) = 0$

Démonstration. Comme un amas fini ne peut devenir plus grand qu'à un instant de la forme U_e pour une certaine e arête adjacente à cet amas, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{card}(C_t) \leq k, \text{card}(C_1) = \infty) &\leq \mathbf{P}(U_{\vec{e}} \geq t \text{ pour un certain } \vec{e} \in \vec{E}_{\leq k}) \\ &\leq (1-t)^{\text{card}(\vec{E}_{\leq k})} \end{aligned}$$

où $\vec{E}_{\leq k}$ est l'ensemble des arêtes orientées dont la distance à e_0 est au plus k . Aussi, par la Proposition 2.5 :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k < \text{card}(C_t) < \infty) &\leq \mathbf{P}(k < \text{card}(C_t) < \infty \mid 1 \leq \text{card}(C_t) < \infty) \\ &= \mathbf{P}(\text{card}(B) > k) \end{aligned}$$

On a donc :

$\mathbf{P}(\text{card}(C_t) < \infty, \text{card}(C_1) = \infty) \leq \min_k(\mathbf{P}(\text{card}(B) > k) + (1-t)\text{card}(\vec{E}_{\leq k}))$
 $\rightarrow 0$ quand $t \uparrow 1$. □

On s'intéresse maintenant à la forme des amas infinis. Comme plus haut, on fixe une arête e_0 et on construit un arbre infini aléatoire C^∞ ainsi : d'abord on choisit uniformément au hasard un rayon infini

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots \quad \text{avec } \vec{e}_1 \text{ est une orientation de } e_0. \quad (13)$$

On suppose que chaque arête de ce rayon est présente avec probabilité 1 et que chaque autre arête de E est présente avec probabilité $\frac{1}{2}$ (indépendamment). On définit C^∞ comme l'amas d'arêtes contenant e_0 dans cet arbre. En effet, par la Proposition 1.8, C^∞ correspond à l'amas qui contient e_0 dans le processus de percolation ordinaire B_t avec $t > \frac{1}{2}$, en conditionnant par que cet amas soit infini, et ensuite en prenant une limite faible quand $t \downarrow \frac{1}{2}$ (i.e. l'amas critique conditionné à être infini, traité dans 1.3.2. On démontre l'égalité entre sa loi et celle de C^∞ d'une autre manière dans la Proposition 2.6). Rappelons que C_1 est l'amas contenant e_0 dans l'état final A_1 du processus de percolation gelée. Notons Z_{e_0} pour le temps auquel l'amas contenant e_0 devient infini. On a que l'événement $\{\text{card}(C_1) = \infty\}$ est l'événement $\{Z_{e_0} \leq 1\}$.

Théorème 2.2. *En conditionnant par l'événement $\{\text{card}(C_1) = \infty\}$, C_1 a la même loi que C^∞ et est indépendant de Z_{e_0} .*

Ainsi la forme de C_1 ne dépend pas de l'instant auquel C_t devient infini. Pour prouver le théorème, on suit le plan de la démonstration de la Proposition 2.5. Soit \mathbf{s} un sous-arbre fini de T contenant e_0 . Soit \vec{e}_* une arête orientée de \mathbf{s} et telle que aucun enfant de \vec{e}_* n'est dans \mathbf{s} . On a que :

$$\mathbf{P}(\mathbf{s} \subseteq C^\infty \text{ et } \vec{e}_* \text{ est dans le rayon infini (13) de } C^\infty) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{card}(\mathbf{s})} \quad (14)$$

car, en notant d le nombre d'arêtes de e_0 à \vec{e}_* , la probabilité que le rayon (13) commence par ce chemin est $(\frac{1}{2})^d$ et la probabilité que les $(\text{card}(\mathbf{s}) - d)$ arêtes restantes de \mathbf{s} soient dans C^∞ est $(\frac{1}{2})^{\text{card}(\mathbf{s})-d}$.

Considérons maintenant C_1 . Comme dans la démonstration du Lemme 2.5, si $Z_{e_0} \leq 1$, alors il existe un rayon infini $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots$ ou \vec{e}_1 est une orientation de e_0 , tel que $Y_{\vec{e}_i} = Z_{e_0}$ pour tout $i \geq 1$. Fixons un sous-arbre fini \mathbf{s} et une arête \vec{e}_* de \mathbf{s} comme plus haut. Soit $\frac{1}{2} < t < 1$. On va montrer que l'événement :

$$\mathbf{s} \subseteq C_1, Z_{e_0} \in [t, t + dt] \text{ et } \vec{e}_* \text{ est dans le rayon infini } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots \quad (15)$$

a probabilité $(\frac{1}{2})^{\text{card}(\mathbf{s})} (\frac{1}{4t^4}) dt$. Par (14), ceci correspond à la probabilité du même événement pour la paire indépendante (par construction) (C^∞, Z_{e_0}) . Alors le lemme de classe monotone identifie les lois jointes de (C_1, Z_{e_0}) et (C^∞, Z_{e_0}) en conditionnant par $\{Z_{e_0} \leq 1\}$, ce qui prouve le théorème.

On a d'abord besoin d'un critère pour savoir quand l'événement (15) a lieu. Rappelons que $\partial(\mathbf{s})$ est l'ensemble des arêtes qui ne sont pas dans \mathbf{s} et qui sont adjacentes à \mathbf{s} , orientées en s'éloignant de \mathbf{s} .

Lemme 2.8. *L'événement (15) a lieu si et seulement si :*

- (i) $U_e < t$ pour tout $e \in \mathbf{s}$
- (ii) $\min\{Y_{\vec{e}} : \vec{e} \in \partial(\mathbf{s})\} \in [t, t + dt]$
- (iii) le minimum dans (ii) est atteint pour un enfant de \vec{e}_*

Démonstration. Supposons (i), (ii) et (iii) vérifiés et soit $y = \min\{Y_{\vec{e}} : \vec{e} \in \partial(\mathbf{s})\} \in [t, t + dt]$. Soit \vec{E}_s l'ensemble des arêtes de \mathbf{s} orientées. Soit $\vec{e} \in \vec{E}_s$ avec ses deux enfants en dehors de \vec{E}_s . Par la relation de récurrence (6), si $\vec{e} = \vec{e}_*$ alors $Y_{\vec{e}} = y$ et sinon $Y_{\vec{e}} \geq y$. Par récurrence en reculant à partir de la frontière de \mathbf{s} , on a que $Y_{\vec{e}} \geq y$ pour les $\vec{e} \in \vec{E}_s$ qui ne sont pas sur le rayon $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots$ (\vec{e}_1 une orientation de e_0) et $Y_{\vec{e}} = y$ pour les \vec{e} qui sont dans ce rayon. Donc \vec{e}_* est dans le rayon $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots$, $Z_{e_0} = y \in [t, t + dt]$ et $s \subseteq A_1$ par définition de A_1 ($U_e < t \leq Y_{\vec{e}} \forall e \in \mathbf{s}$) et donc $\mathbf{s} \subseteq C_1$. Réciproquement, supposons que l'événement (15) ait lieu. Alors (i) est immédiat. Aussi, $Y_{\vec{e}_i} = Z_{e_0}$ pour tout \vec{e}_i dans le rayon et en particulier pour un enfant de \vec{e}_* , alors pour établir (ii) et (iii) il suffit de montrer que

$$\min\{Y_{\vec{e}} : \vec{e} \in \partial(\mathbf{s})\} \geq t$$

Si ceci est faux, $Y_{\vec{e}} = y < t$ pour un certain $\vec{e} = (w_1, w_2) \in \partial(\mathbf{s})$. Alors le sommet w_1 entre dans un amas infini à ou avant l'instant y . Mais $\vec{e} \in \partial(\mathbf{s})$ donc w_1 est un sommet de \mathbf{s} et donc de C_1 . Comme l'amas infini contenant w_1 ne peut pas grandir après l'instant y , on a $Z_{e_0} \leq y < t$, qui est une contradiction. \square

Avec le Lemme 2.8, la probabilité de l'événement (15) est par indépendance :

$$t^{\text{card}(\mathbf{s})} \times \text{card}(\partial(\mathbf{s})) \frac{1}{2t^2} dt \left(\frac{1}{2t}\right)^{\text{card}(\partial(\mathbf{s})) - 1} \times \frac{2}{\text{card}(\partial(\mathbf{s}))}$$

Comme $\text{card}(\partial(\mathbf{s})) = \text{card}(\mathbf{s}) + 3$, ceci est égal à $(\frac{1}{2})^{\text{card}(\mathbf{s})} \frac{1}{4t^4} dt$ comme nécessaire pour prouver le Théorème 2.2.

Proposition 2.6. *C^∞ et C_1 conditionné à être infini ont la même distribution que l'amas critique conditionné à être infini.*

Démonstration. Par le Théorème 2.2, C^∞ et C_1 conditionné à être infini ont la même loi. Soit \mathbf{s} un sous-arbre fini contenant e_0 . On va calculer la probabilité que \mathbf{s} est dans C_1 conditionné à être infini. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{s} \subseteq C_1 \text{ et } Z_{e_0} \in [t, t + dt]) &= \mathbf{P}(U_e < t \forall t \in \mathbf{s} \text{ et } \min\{Y_{\vec{e}} : \vec{e} \in \partial(\mathbf{s})\} \in [t, t + dt]) \\ &= t^{\text{card}(\mathbf{s})} (n + 3) \left(\frac{1}{2t}\right)^{\text{card}(\mathbf{s}) + 2} \left(\frac{1}{2t^2}\right) \\ &= \frac{n + 3}{2^{n+3}} t^{-4} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{s} \subseteq C_1 \mid C_1 \text{ infini}) &= \frac{n+3}{2^{n+3}} \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-4} dt \\ &= \frac{7n+3}{3 \cdot 2^{n+3}} \end{aligned}$$

Par la Proposition 2.1, on a que pour un sommet v , $\mathbf{P}(v \text{ dans un amas infini}) = \frac{7}{8}$. Donc,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{s} \subseteq C_1(v) \mid C_1(v) \text{ infini}) &= \frac{8}{7} \frac{7n+3}{3 \cdot 2^{n+3}} \\ &= \frac{n+3}{3} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Ce qui correspond au résultat de la Proposition 1.7 pour l'amas critique conditionné à être infini. \square

3 Percolation sur un arbre aléatoire de loi $PGW(\lambda)$

3.1 Cas d'un arbre d -régulier ; les lois $PGW(\lambda)$

On a étudié la percolation sur un arbre binaire infini, qui est en fait un arbre 3-régulier. On remarque que tous les résultats se généralisent pour un arbre d -régulier. On les mentionne ici, mais avec un peu de modification : on prend pour les U_e des variables aléatoires uniformes sur $[0, d-1]$. La preuve du théorème ci-dessous suit en tous points celle du cas $d=3$.

Théorème 3.1. *Soit T un arbre d -régulier, \emptyset un sommet fixé, $C_{\emptyset,t}$ l'amas de \emptyset au temps t . Alors*

— *La probabilité de percolation sur T au temps t est*

$$\theta_t = \mathbf{P}(|C_{\emptyset,t}| = \infty) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \\ 1 - \left((1 - \frac{t}{d-1}) + \frac{t}{d-1} r \right)^d, & t \in]1, d-1] \end{cases},$$

où $r \in [0, 1]$ est la plus petite racine de l'équation $((1 - \frac{t}{d-1}) + \frac{t}{d-1} s)^{d-1} = s$. Il s'ensuit que des amas infinis apparaissent à partir du temps 1 ;

— *Soit S un sous-arbre fini de T , on a*

$$|\partial S| = (d-2)|S| + d;$$

— *Le nombre a_n de sous-arbres de taille n vérifie :*

$$a_n = \frac{d}{(d-2)n + d} \binom{(d-1)(n+1)}{n};$$

— Soit S un sous-arbre fini contenant \emptyset ,

$$\mathbf{P}(C_{\emptyset,t} = S) = \left(\frac{t}{d-1}\right)^{|S|} \left(1 - \frac{t}{d-1}\right)^{(d-2)|S|+d},$$

$$\mathbf{P}(|C_{\emptyset,t}| = n) = a_n \left(\frac{t}{d-1}\right)^n \left(1 - \frac{t}{d-1}\right)^{(d-2)n+d},$$

— Pour $t \leq 1$, il existe une mesure de probabilité sur l'espace Ω entier, qui est portée par $\{|C_{\emptyset,t}| = \infty\}$, telle que pour tout E cylindrique avec m et $Q_{m,t}$ définis plus haut :

$$\mu_t(E) = \frac{\mathbf{E}[Q_{m,t} \cdot 1_E]}{\mathbf{E}[Q_{m,t}]},$$

— La loi d'un amas critique conditionné à être infini est donnée par

$$\mu(S \subset C) = \frac{(d-2)n+d}{d \cdot (d-1)^n}.$$

C'est aussi la loi de C^∞ , l'arbre infini avec un bout, qui est défini d'abord en choisissant uniformément un chemin infini enraciné en \emptyset , puis en lui adjoignant sa composante connexe dans la percolation de paramètre $\frac{1}{d-1}$;

— On peut aussi donner le processus de percolation gelée en définissant pour chaque arête orientée \vec{e} une variable aléatoire $Y_{\vec{e}}$, qui admet la fonction de répartition

$$F_Y(t) = 1 - t^{-\frac{1}{d-2}} \text{ sur } [1, d-1].$$

On peut calculer la probabilité que $C_{\emptyset,t}$ soit de taille n quand $t \geq 1$

$$\mathbf{P}^{gel}(|C_{\emptyset,t}| = n) = a_n \frac{(d-2)^{(d-2)n+d}}{(d-1)^{(d-1)n+d}} t^{-d/(d-2)}.$$

On conclut que

$$\mathbf{P}^{gel}(|C_{\emptyset,t}| < \infty) = t^{-d/(d-2)},$$

et que la taille conditionnée à être finie $\mathbf{P}^{gel}(|C_{\emptyset,t}| = n \mid |C_{\emptyset,t}| < \infty)$ ne dépend pas de t , pour $t \geq 1$.

En faisant tendre d vers ∞ , on va voir un lien étroit avec un processus de Galton-Watson de loi $Poi(\lambda)$, qu'on note $PGW(\lambda)$.

Proposition 3.1. *On a*

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \theta_d(t) = 1 - r(t),$$

où $r(t) \in [0, 1]$ est la plus petite racine de l'équation $e^{t(s-1)} = s$, qui est la probabilité d'extinction du processus $PGW(t)$.

Proposition 3.2. Notons $f_n(t)$ la limite

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \mathbf{P}_d(|C_{\emptyset,t}| = n) = \frac{(n+1)^{n-1} t^n}{n!} e^{-(n+1)t},$$

et $f_n^g(t)$ la limite pour $t \geq 1$

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \mathbf{P}_d^{gel}(|C_{\emptyset,t}| = n) = f_n(1) \cdot \frac{1}{t}.$$

Elles coïncident en $t = 1$. On a les égalités

$$\dot{f}_n(t) = \frac{n+1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f_k(t) f_{n-1-k}(t) - (n+1) f_n(t), \quad (16)$$

et

$$\dot{f}_n^g(t) = \frac{n+1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f_k^g(t) f_{n-1-k}^g(t) - (n+1) f_n^g(t) \sum_{k \geq 0} f_k^g(t), \quad (17)$$

où $\sum_{k \geq 0} f_k^g(t)$ est en fait $1/t$.

A partir du processus $PGW(\lambda)$, on peut construire un arbre aléatoire C : soit $\emptyset = v_{0,1}$ la racine, elle admet $\xi_{0,1}$ enfants $v_{1,1}, \dots, v_{1,\xi_{0,1}}$. Chaque $v_{i,j}$ admet $\xi_{i,j}$ enfants $v_{i+1,1}, \dots, v_{i+1,\xi_{i,j}}$. On peut analyser la forme de cet arbre. $\lambda = 1$ est le cas critique pour cet arbre, car il est p.s. fini pour $\lambda \leq 1$, mais est infini avec probabilité non-nulle lorsque $\lambda > 1$.

On étudie la loi de C .

Il faut d'abord préciser l'espace sur lequel on travaille. Avec un abus de notation, on identifie T avec son ensemble d'arêtes, donc on peut parler d'une arête $e \in T$. La taille de T signifie toujours le nombre d'arêtes. On considère en général les arbres enracinés en un sommet \emptyset . Comme on ne peut plus distinguer deux arbres T_1, T_2 isomorphes par un isomorphisme qui préserve \emptyset , on pose

$$T_1 \sim T_2 \text{ ssi il existe un isomorphisme entre eux qui préserve } \emptyset$$

Notons \mathbb{T} l'espace de tous les arbres enracinés en \emptyset quotienté par cette relation d'équivalence. De plus, on note \mathbb{T}_m les éléments dans \mathbb{T} avec une profondeur au plus m (c'est-à-dire les arbres dont tous les sommets sont dans les m -premiers niveaux). Il existe une restriction évidente $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}_m$ et on note $T|_m$ la restriction pour un arbre T .

L'arbre aléatoire C que l'on a défini à partir de $PGW(\lambda)$ détermine une loi sur \mathbb{T} . On la note aussi $PGW(\lambda)$.

Pour un $T \in \mathbb{T}_m$, on pose $a(T) = |\text{Aut}(T)|$ le nombre d'automorphismes qui préservent \emptyset , et $k_m(T)$ le nombre de sommets dans le m -ième niveau (qui est aussi le nombre de chemins vers le m -ième niveau).

Proposition 3.3.

$$\mathbf{P}(C|_m = T) = \frac{1}{a(T)} \lambda^{|T|} e^{-(|T|+1-k_m(T))\lambda}.$$

Ici $|T| + 1 - k_m(T)$ est le nombre de sommets dans les premiers $m - 1$ niveaux.

Démonstration. On le déduit par récurrence sur la profondeur de T . On regarde la racine \emptyset , qui admet d enfants et d sous-arbres. On classe les sous-arbres par leur formes, c'est-à-dire d_i sous-arbres de la forme T_i , alors $a(T) = \prod_i d_i! \cdot a(T_i)^{d_i}$.

Par récurrence, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C|_m = T) &= p_d \cdot \binom{d}{d_1, d_2, \dots} \cdot \prod_i \mathbf{P}(C|_{m-1} = T_i)^{d_i} \\ &= \frac{\lambda^d}{d!} e^{-\lambda d} \cdot \frac{d!}{\prod_i d_i!} \prod_i \mathbf{P}(C|_{m-1} = T_i)^{d_i} \\ &= \frac{1}{a(T)} \lambda^{|T|} e^{-(|T|+1-k_m(T))\lambda}. \end{aligned}$$

□

Par exemple, pour l'arbre T de la Figure 3, $k_2(T) = 2$, $a(T) = 4$, donc $\mathbf{P}(C|_2 = T) = \frac{1}{4} \lambda^5 e^{-4\lambda}$.

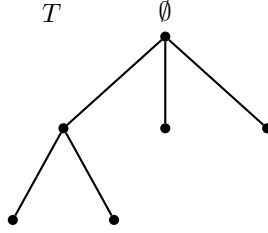


FIGURE 3 – Un arbre T dans \mathbb{T}_2 , avec $k_2(T) = 2$.

On remarque qu'on peut obtenir

$$\mathbf{P}(C = T) = \mathbf{P}(C|_m = T) \cdot p_0^{k_m(T)} = \frac{1}{a(T)} \lambda^{|T|} e^{-(|T|+1)\lambda}.$$

Alors on calcule le nombre d'arbres sur $n + 1$ sommets numérotés, et avec la formule de Cayley, on obtient

$$\sum_{|T|=n} \frac{1}{a(T)} n! = (n+1)^{n-1}.$$

Donc

Proposition 3.4. $f_n(\lambda) = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} \lambda^n e^{-(n+1)\lambda}$ est exactement la probabilité $\mathbf{P}(|C| = \sum_{k \geq 0} Z_k = n)$ pour le processus PGW(λ).

L'équation (16) nous donne une façon heuristique de voir comment les amas évoluent.

Maintenant on étudie la loi de C conditionné à être infini.
De la même manière, on peut obtenir une limite faible de loi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(E \mid A_n) = \frac{\mathbf{E}[Z_m \cdot 1_E]}{\mathbf{E}[Z_m]}$$

en conditionnant à être relié avec le n -ième niveau, lorsque $n \rightarrow \infty$. On remarque que dans ce cas, Z_m est bien le nombre de chemins vers le m -ième niveau. Et on a $\mathbf{E}[Z_m] = 1$ au cas critique. On note cette loi μ .

On peut décrire cette loi plus simplement en écrivant explicitement $\mu(C|_m = T)$ pour tout $T \in \mathbb{T}_m$:

$$\mu(C|_m = T) = k_m(T) \cdot \mathbf{P}(C|_m = T),$$

car $k_m(T)$ est le nombre de chemins dans T vers le m -ième niveau.

Pour l'arbre T de la Figure 3, $\mu(C|_2 = T) = k_2(T) \cdot \mathbf{P}(C|_2 = T) = \frac{1}{2}e^{-4}$.
 T peut aussi être vu comme un arbre dans \mathbb{T}_3 , mais avec $k_3(T) = 0$. Donc $\mu(C|_3 = T) = 0$.

Maintenant on donne un autre arbre aléatoire, analogue à C^∞ que l'on a défini pour le cas binaire.

Proposition 3.5. *L'arbre aléatoire C^∞ est construit comme suit :*

- D'abord on se donne un chemin γ_∞ infini enraciné en \emptyset ;
- Puis pour tous les sommets $v \in \gamma_\infty$ (\emptyset inclus), on y attache un arbre aléatoire de loi $PGW(1)$ (qui est p.s. fini).

Alors cet arbre suit la même loi que C .

Remarque 3.1. Cette loi est la limite faible de la loi de C_d^∞ , lorsque $d \rightarrow \infty$. On peut le vérifier explicitement, mais on peut aussi voir que $Poi(1)$ est la limite de $Binomial(d, \frac{1}{d-1})$, lorsque $d \rightarrow \infty$.

Cette loi est déterminée par C^∞ (sur \mathbb{T}), on va la noter $PGW^\infty(1)$. Elle est portée par l'ensemble des arbres infinis, ou plus précisément, l'ensemble des arbres *infinis avec un bout*.

3.2 Percolation sur un arbre aléatoire de loi $PGW(\lambda)$

Maintenant on essaie de construire un processus de percolation analogue à celui sur un arbre binaire, mais avec les lois de Poisson-Galton-Watson. On va aussi voir un équivalent pour la percolation gelée. Dans [1], l'auteur présente une construction en attachant continûment de nouveaux arbres aléatoires. Ici on présente une autre construction qui définit ce processus directement.

Rappelons que \mathbb{T} note l'ensemble des arbres enracinés en \emptyset à un isomorphisme près. Il est muni d'une loi $PGW(\lambda)$.

On note \mathbb{T}^I l'espace de tous les arbres dont les arêtes sont étiquetées par $I = [0, 1]$:

$$\mathbb{T}^I = \{(T, u) \mid T \in \mathbb{T}, u : T \rightarrow [0, 1]\}.$$

Donc pour $(T, u) \in \mathbb{T}^I$, chaque arête $e \in T$ admet une étiquette $u(e) \in [0, 1]$. Il existe une projection naturelle $\mathbb{T}^I \rightarrow \mathbb{T}$.

On muni \mathbb{T}^I d'une tribu engendrée par les ensembles "cylindriques" : étant donné un arbre fini $S \in \mathbb{T}_m$, et des intervalles $[a_i, b_i] \subset I$ pour chaque arête $e_i \in S$ ($[a_i, b_i] \subset I$ engendrent la tribu borélienne $\mathcal{B}(I)$), on regarde les $(T, u) \in \mathbb{T}^I$ tels que $T|_m = S$. Alors toutes les arêtes de T s'identifient avec celles de S . On garde les (T, u) avec $u(e_i) \in [a_i, b_i]$:

$$C_{S, \{[a_i, b_i]\}} = \{(T, u) \in \mathbb{T}^I \mid T|_m = S, u(e_i) \in [a_i, b_i]\}.$$

Ils engendrent une tribu \mathcal{A}^I sur \mathbb{T}^I .

Puis on pose

$$\mathbf{P}_\lambda(C_{S, \{[a_i, b_i]\}}) = PGW(\lambda)(T|_m = S) \cdot \prod_i (b_i - a_i),$$

où $PGW(\lambda)(T|_m = S)$ est la probabilité que $T|_m = S$. D'après le théorème de Carathéodory, elle s'étend à une mesure de probabilité \mathbf{P}_λ sur $(\mathbb{T}^I, \mathcal{A}^I)$. On peut voir que la mesure image de \mathbf{P}_λ par la projection $\pi : \mathbb{T}^I \rightarrow \mathbb{T}$ est bien $PGW(\lambda)$. Posons $[a_i, b_i] = [0, 1]$ pour tout i . Comme $\pi^{-1}(\{T|_m = S\})$ est exactement $C_{S, \{[0, 1]\}}$, on a

$$\pi_*(\mathbf{P}_\lambda)(T|_m = S) = \mathbf{P}_\lambda(C_{S, \{[0, 1]\}}) = PGW(\lambda)(T|_m = S).$$

Il existe donc une variable aléatoire $X = (\mathcal{T}, U)$ de loi \mathbf{P}_λ . On peut maintenant définir le processus de *percolation sur un arbre aléatoire de loi $PGW(\lambda)$* :

Définition 3.1. Soit $X = (\mathcal{T}, U)$ de loi \mathbf{P}_λ , on pose

$$B_t = \{e \in \mathcal{T} \mid U(e) \leq t\},$$

on l'appelle le processus de *percolation sur un arbre aléatoire de loi $PGW(\lambda)$* . On peut donc parler de l'amas de \emptyset au temps t , qui est sa composante connexe $C_{\emptyset, t}$ dans B_t . On pose

$$\mathcal{P}_t = \{(T, u) \mid |C_{\emptyset, t}| = \infty\}.$$

C'est la limite des ensembles cylindriques

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{(T, u) \mid |C_{\emptyset, t}| > n\},$$

Donc \mathcal{P}_t est mesurable. $\theta_t = \mathbf{P}_\lambda(\mathcal{P}_t)$ est la probabilité de percolation au temps t .

Etant donné un nombre $Poi(\lambda)$ de variables aléatoires i.i.d. de loi *Bernoulli*(t), leur somme suit la loi *Poi*($\lambda \cdot t$). On voit alors que $C_{\emptyset, t}$ suit la loi $PGW(\lambda \cdot t)$. Comme le cas critique pour $PGW(\lambda)$ est $\lambda = 1$, on a obtenu

Proposition 3.6. *Pour le processus de percolation sur $PGW(\lambda)$, le temps critique est $t_c = 1/\lambda$ si $\lambda \geq 1$; si $\lambda < 1$, le processus reste sous-critique sur tout $[0, 1]$. Pour $\lambda \geq 1$,*

$$\theta_t = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{\lambda}] \\ 1 - r_t, & t \in]\frac{1}{\lambda}, 1] \end{cases},$$

où $r_t \in [0, 1]$ est la plus petite racine de l'équation $e^{\lambda \cdot t(s-1)} = s$.

Comme dans le cas d'un arbre binaire, on regarde la loi de l'amas critique conditionné à être infini. Comme l'amas au temps critique suit la loi $PGW(\lambda \cdot t_c) = PGW(1)$, il a la même loi que l'arbre C défini par $PGW(1)$. Donc la loi de l'amas critique conditionné à être infini est bien $PGW^\infty(1)$ pour tout $\lambda \geq 1$.

Remarque 3.2. On remarque qu'on peut aussi considérer un processus avec des intervalles $[0, \lambda]$ au lieu de $[0, 1]$. Dans ce cas, le temps critique t_c est toujours 1, avec

$$\theta_t = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1] \\ 1 - r_t, & t \in]1, \lambda] \end{cases},$$

où $r_t \in [0, 1]$ est la plus petite racine de l'équation $e^{t(s-1)} = s$ qui ne dépend pas de λ .

La percolation gelée est définie par une méthode similaire (on considère le cas $\lambda \geq 1$). On essaie de définir pour chaque $e \in T$ une variable aléatoire $Y_{\vec{e}}$ qui représente le temps où le sous-arbre devient infini (comme on a distingué la racine, il reste une seule direction : celle qui s'éloigne de racine). Pour ce faire, on élargit l'espace. On rajoute pour chaque $e \in T$ une étiquette $y(e) \in [0, 1] \cup \{\infty\} =: J$:

$$\mathbb{T}^{IJ} = \{(T, u, y) \mid T \in \mathbb{T}, u : T \rightarrow [0, 1], y : T \rightarrow [0, 1] \cup \{\infty\}\}.$$

Encore une fois, il existe une projection naturelle $\mathbb{T}^{IJ} \rightarrow \mathbb{T}$. La tribu \mathcal{A}^{IJ} qu'on met là-dessus est engendrée par les ensembles cylindriques de la forme $([c_i, d_i] \subset I$ sont des intervalles, ils engendrent la tribu borélienne $\mathcal{B}(J)$) :

$$C_{S, \{[a_i, b_i]\}, \{[c_i, d_i]\}} = \{(T, u, y) \in \mathbb{T}^{IJ} \mid T|_m = S, u(e_i) \in [a_i, b_i], y(e_i) \in [c_i, d_i]\}.$$

On peut vérifier que c'est un demi-anneau.

Lemme 3.1. *Soient Y_k des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans J , de densité*

$$f_Y(t) = \frac{1}{\lambda \cdot t} \text{ sur } [\frac{1}{\lambda}, 1]$$

et

$$\mathbf{P}(Y = \infty) = 1 - \frac{\log(\lambda)}{\lambda}.$$

Soit U de loi $U[0, 1]$, ξ de loi $Poi(\lambda)$, U , ξ , et Y_k indépendantes. Alors

$$\tilde{Y} = \begin{cases} \min_{1 \leq k \leq \xi} Y_k, & \text{si } U < \min_{1 \leq k \leq \xi} Y_k \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

suit la même loi que les Y_k (avec la convention $\min \emptyset = \infty$).

Démonstration. le calcul de la fonction de répartition de la loi de Y_k donne

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{\lambda}] \\ \frac{\log(\lambda \cdot t)}{\lambda}, & t \in [\frac{1}{\lambda}, 1] \\ \frac{\log(\lambda)}{\lambda}, & t \in [1, \infty[\\ 1, & t = \infty \end{cases}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{Y} \in [t, t + dt]) &= \mathbf{P}(U \in [0, t]) \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(\xi = n) \mathbf{P}(\min_{1 \leq k \leq n} Y_k = t) \\ &= t \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot n \cdot (1 - F_Y(t))^{n-1} dF_Y(t) \\ &= \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{\lambda}] \\ \frac{1}{\lambda \cdot t} dt, & t \in [\frac{1}{\lambda}, 1] \\ 0, & t \in [1, \infty[\end{cases} \end{aligned}$$

□

Dès ce lemme, on peut mettre une mesure de probabilité sur \mathbb{T}^{IJ} .

Proposition 3.7. *Il existe une mesure de probabilité \mathbf{P}_λ^{gel} sur \mathbb{T}^{IJ} , telle que sa mesure image par la projection $\mathbb{T}^{IJ} \rightarrow \mathbb{T}$ soit $PGW(\lambda)$. De plus, pour n'importe quelle $e \in T$, $u(e)$ et $y(e)$ vérifie*

$$y(e) = \begin{cases} \min_{e' \text{ enfant}} y(e'), & \text{si } u(e) < \min_{e' \text{ enfant}} y(e') \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Par définition, la tribu \mathcal{A}^{IJ} est engendrée par

$$\mathcal{C} = \{C_{S, \{[a_i, b_i]\}, \{[c_i, d_i]\}}\},$$

où les i correspondent aux arêtes de $S \in \mathbb{T}_m$.

On définit maintenant la mesure de probabilité $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\lambda^{gel}$. Grâce au théorème de Carathéodory, il suffit de déterminer ses valeurs pour les ensembles $C = C_{S, \{[a_i, b_i]\}, \{[c_i, d_i]\}} \in \mathcal{C}$ et de vérifier l'additivité. Pour $S \in \mathbb{T}_m$, considérons les k arêtes dans le m -ième niveau. Pour chacune, on se donne une variable aléatoire Y_e qui suit la loi dans le Lemme 3.1. De plus, on se donne des variables aléatoires

U_e de loi $U[0, 1]$ pour e dans les premiers $(m - 1)$ -ième niveaux. On suppose que toutes les variables aléatoires sont indépendantes. Depuis les Y_e dans le m -ième niveau, on peut construire des variables aléatoires Y_e pour tout $e \in S$ de la manière suivante :

Pour e dans les premiers $m - 1$ -ième niveaux, Y_e vérifie

$$Y_e = \begin{cases} \min_{e' \text{ enfant}} y(e'), & \text{si } u(e) < \min_{e' \text{ enfant}} y(e') \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Maintenant on pose la probabilité pour $C = C_{S, \{[a_i, b_i]\}, \{[c_i, d_i]\}}$

$$\mathbf{P}_n(C) = PGW(\lambda)(T|_m = S) \cdot \prod_{e_i \in S} \mathbf{P}(u_{e_i} \in [a_i, b_i]) \cdot \mathbf{P}(y_{e_i} \in [c_i, d_i]).$$

La mesure image par la projection $\pi : \mathbb{T}^{IJ} \rightarrow \mathbb{T}$ est bien $PGW(\lambda)$:

$$\pi_*(\mathbf{P}_\lambda^{gel})(T|_m = S) = \mathbf{P}_\lambda(C_{S, \{[0, 1]\}}) = PGW(\lambda)(T|_m = S).$$

□

On remarque que l'on a encore l'indépendance.

Maintenant on peut définir le processus de percolation gelée sur un arbre aléatoire de loi $PGW(\lambda)$, avec la même méthode que le cas binaire :

Définition 3.2. Soit $X = (\mathcal{T}, U, Y)$ une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{T}^{IJ} de loi \mathbf{P}_λ^{gel} , on pose

$$A_1 = \{e \in \mathcal{T} \mid U(e) < \min_{e' \text{ enfant}} Y(e')\},$$

et

$$A_t = \{e \in A_1 \mid U(e) \leq t\}.$$

on l'appelle le processus de *percolation gelée sur un arbre aléatoire de loi $PGW(\lambda)$* .

Pour $e \in A_1$, $U(e) < \min_{e' \text{ enfant}} Y(e')$. Par la Proposition 3.7, il existe exactement un enfant e' de e tel que $Y(e) = Y(e') < Y(f)$, où f est un autre enfant de e (s'il en existe). Alors $Y(e') < \infty$, et e' est dans A_1 aussi. On peut construire ainsi une suite d'arêtes $e_1 = e, e_2, \dots$ qui sont toutes dans A_1 , avec $Y(e_1) = Y(e_2) = \dots$. On a aussi $U(e_i) < Y(e_i)$ pour tout i . Donc pour $t = Y(e)$, tout e_i est dans A_t , c'est-à-dire au temps $t = Y(e)$, e est déjà dans un amas infini.

D'ailleurs, pour $t < Y(e)$, on va montrer qu'il n'existe pas de chemin infini à partir de e dans A_t . Supposons $t < t_2 \leq 1$. On calcule la probabilité de l'événement $V_1(e) = \{e \text{ a un enfant } e' \text{ avec } U(e') \leq t \text{ et tous ses}$

autres enfants $f \neq e'$ vérifient $Y(f) \geq t_2$ }. On suppose que e admet ξ enfants.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(V_1(e)) &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(\xi = n) \cdot \mathbf{P}(U(e') \leq t, Y(f) \geq t_2 \mid \xi = n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot n \cdot t \cdot (1 - \log(\lambda \cdot t_2)/\lambda) \\ &= t/t_2. \end{aligned}$$

On a utilisé l'indépendance. De plus, l'événement $V_2(e) = \{ e \text{ a un enfant } e' \text{ avec } U(e') \leq t \text{ qui vérifie } V_1(e') \text{ et tous ses autres enfants } f \neq e' \text{ vérifient } Y(f) \geq t_2 \}$ a probabilité $(t/t_2)^2$. De la même façon, $\mathbf{P}(V_n(e)) = (t/t_2)^n$. Mais l'événement $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(e)$ est exactement $\{e \text{ admet un chemin infini dans } A_t, Y(e) \geq t_2\}$. En faisant $t_2 \rightarrow t$, on a que pour $t < Y(e)$, il n'existe pas de chemin infini.

Donc le processus que nous venons de définir a une description simple : On construit un arbre aléatoire T de loi $PGW(\lambda)$, puis on donne une variable aléatoire $U(e)$ de loi $U[0, 1]$ à chaque arêtes. On pose $A_0 = \emptyset$. Au temps t , si $U(e) = t$ et s'il n'existe pas de chemin infini à partir de e dans A_{t-} , alors on ajoute e dans A_t .

Comme T est aléatoire, on ne peut plus parler d'un sommet ou d'une arête quelconque, mais on peut regarde la racine \emptyset .

Proposition 3.8. *Soit W le temps où \emptyset percole, c'est-à-dire entre dans un amas infini. W a la densité*

$$f_W(t) = \frac{1}{\lambda \cdot t^2} \text{ sur } \left[\frac{1}{\lambda}, 1\right],$$

et

$$\mathbf{P}_\lambda^{gel}(W = \infty) = \frac{1}{\lambda}.$$

De plus, on a

$$\mathbf{P}_\lambda^{gel}(C_{\emptyset, t} | n = S, W \in [t, t + dt]) = \mathbf{P}(C^\infty | n = S) f_W(t) dt,$$

donc

$$\mathbf{P}_\lambda^{gel}(C_{\emptyset, W} | n = S | W) = \mathbf{P}(C^\infty | n = S).$$

Autrement dit, l'amas infini gelé a la même loi que C^∞ , i.e. la loi $PGW^\infty(1)$ sur \mathbb{T} , et il est indépendant de W , le temps de percolation.

Démonstration. Supposons que \emptyset admet ξ arêtes. Alors on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\lambda^{gel}(W \in [t, t + dt]) &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(\xi = n) \cdot \mathbf{P}(W \in [t, t + dt] \mid \xi = n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot n (1 - F_Y(t))^{n-1} dF_Y(t) \\ &= \frac{1}{\lambda \cdot t^2} dt, \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{P}_\lambda^{gel}(W = \infty) = 1 - \int_{1/\lambda}^1 f_W(t) dt = \frac{1}{\lambda}.$$

□

Annexe A Théorème d'extension de Kolmogorov

On énonce d'abord le théorème d'extension de Carathéodory.

Théorème A.1 (Théorème d'extension de Carathéodory). *Soit Ω un ensemble non vide et \mathcal{A} un anneau d'ensemble, c'est-à-dire une famille de sous-ensembles vérifiant :*

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- Si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}$;
- Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

Alors si ν_0 est une mesure σ -additive sur (Ω, \mathcal{A}) , il existe une mesure ν sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ qui coïncide avec ν_0 sur \mathcal{A} . Si de plus ν_0 est σ -finie, alors ce prolongement est unique.

On présente maintenant le théorème d'extension de Kolmogorov. La preuve se base sur le théorème d'extension de Carathéodory.

Théorème A.2 (Théorème d'extension de Kolmogorov). *Soit $(\Omega_\alpha, \mathcal{A}_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'espaces mesurables munis de topologies. Pour tout $J \subset I$ fini, on se donne μ_J une mesure de probabilité intérieurement régulière sur $\mathcal{A}_J := \prod_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha$ muni de la topologie produit $\prod_{\alpha \in J} \mathcal{T}_\alpha$. On suppose que les mesures μ_J sont consistantes, c'est-à-dire pour $K \subset J \subset I$ deux sous-ensembles finis quelconques, on a*

$$(\pi_K^J)_* \mu_J = \mu_K,$$

où π_K^J est la projection naturelle. Alors il existe une unique mesure de probabilité μ_I sur $\mathcal{A}_I := \prod_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$, telle que pour tout $J \subset I$ fini,

$$(\pi_J)_* \mu_I = \mu_J,$$

où π_J est la projection naturelle.

On remarque que le théorème est évidemment valable pour les espaces polonais, munis des mesures boréliennes. Donc on a obtenu l'argument dont on a besoin dans la construction du processus de percolation gelée.

Démonstration du Théorème d'extension de Kolmogorov. Notons \mathcal{A}_0 la famille de tous les ensembles de la forme $\pi_J^{-1}(E_J)$ pour $E_J \subset \Omega_J$ mesurable. C'est un anneau d'ensemble. Par définition, la tribu \mathcal{A}_I est engendrée par \mathcal{A}_0 . On pose $\mu_0(\pi_J^{-1}(E_J)) = \mu_J(E_J)$. On vérifie que c'est une mesure sur $(\Omega_I, \mathcal{A}_0)$, alors par le Théorème d'extension de Carathéodory, elle se plonge uniquement en μ_I une

mesure sur $(\Omega_I, \mathcal{A}_I)$ qui satisfait l'argument de consistance. La consistance aussi assure qu'elle est une mesure de probabilité.

On montre que c'est une mesure σ -additive sur \mathcal{A}_0 . Elle est d'abord additive pour un nombre fini d'ensembles. Soit $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ une réunion disjointe, on veut

que $\mu_0(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_0(E_n)$. Notons $F_N = E \setminus \bigcup_{n=0}^N E_n$, la suite F_N est décroissante telle que $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} F_N = \emptyset$. Il suffit de démontrer que $\mu_0(F_N) \rightarrow 0$.

Sinon, il existe ε tel que $\mu_0(F_N) > \varepsilon$ pour tout N . Chaque F_N est de la forme $\pi_{J_N}^{-1}(G_N)$ avec $G_N \subset \Omega_{J_N}$ mesurable. On peut supposer que la suite J_N est croissante. Par la régularité intérieure, il existe $K_N \subset G_N$ compact dans Ω_{J_N} tel que $\mu_{J_N}(K_N) > \mu_{J_N}(G_N) - \varepsilon/2^{N+1} > \varepsilon/2$. On observe

$$K'_N = \bigcap_{n=1}^N (\pi_{J_n}^{J_N})^{-1}(K_n) \subset K_N.$$

On a $\pi_{J_M}^{J_N}(K'_N) \subset K'_M$ pour tout $N \geq M$. K'_N est compact, avec

$$\mu_{J_N}(K_N) - \mu_{J_N}(K'_N) \leq \sum_{n=1}^{N-1} (\mu_{J_n}(G_n) - \mu_{J_n}(K_n)) < \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon/2^{n+1} < \varepsilon/2.$$

Donc $\mu_{J_N}(K'_N) > 0$ et K'_N est non-vide. Posons $H_N = (\pi_{J_N})^{-1}(K'_N) \subset F_N \subset \Omega_I$ qui est aussi non-vide (grâce à l'axiome du choix). On a donc $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} H_N = \emptyset$.

Maintenant on veut utiliser la compacité de K'_N pour démontrer que $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} H_N$ est non-vide. Comme H_N non-vide, posons $x_N \in H_N$. Le projeté $\pi_{J_M}(x_N)$ de x_N dans Ω_{J_M} est dans K'_M pour tout $N \geq M$. Donc, pour $M = 1$, on peut choisir une suite n_1^1, n_2^1, \dots telle que les projetés $\pi_{J_1}(x_{n_k^1})$ des $x_{n_k^1}$ convergent dans K'_1 . Puis pour tout M on choisit par récurrence une sous-suite n_1^M, n_2^M, \dots telle que les projetés $\pi_{J_M}(x_{n_k^M})$ des $x_{n_k^M}$ convergent dans K'_M . On prend la diagonale n_k^k . Alors les projetés $\pi_{J_M}(x_{n_k^k})$ des $x_{n_k^k}$ convergent vers $y_M \in K'_M$. On peut construire $y \in \Omega_I$ tel que $\pi_{J_M}(y) = y_M \in \Omega_{J_M}$. y est donc dans tout H_M , ce qui est une contradiction. \square

Références

- [1] David Aldous. Tree-valued markov chains and poisson-galton-watson distributions. *Microsurveys in Discrete Probability*, 41 :1–20, 1998.
- [2] David J Aldous. The percolation process on a tree where infinite clusters are frozen. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 128, pages 465–477. Cambridge Univ Press, 2000.
- [3] Hermann Haase. On the incipient cluster of the binary tree. *Archiv der Mathematik*, 63(5) :465–471, 1994.