Lemmes de moyenne, stabilité du système de Vlasov-Maxwell

GÉNÉRAU François, BARADAT Aymeric

12 juin 2013

Table des matières

Introduction **2**

1 Préliminaires **3**
1.1 Généralités sur les équations de transport cinétique 3
1.2 Résultats utiles sur les espaces de Sobolev 5

2 Lemme de moyenne **7**
2.1 Le cas $\mathbf{L}^2$ 7
2.2 Le cas $\mathbf{L}^1$ 10
2.3 Le cas $v \cdot \nabla_x u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{H}^{-m}(\mathbb{R}^d))$ 11
2.4 Le cas où u dépend du temps 14

3 Un résultat de stabilité **17**

4 Démonstration de la stabilité des solutions **18**
4.1 Démonstration du point (i) 18
4.2 Démonstration du point (ii) 20

Références **23**

Introduction

On s'intéresse à la stabilité faible des solutions du système d'équations de Vlasov-Maxwell :

$$\partial_t u + v.\nabla_x u + (E + v \wedge B).\nabla_v u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \tag{1}$$

C'est une équation modélisant l'évolution d'un gaz de particules chargées sous l'interaction du champs électro-magnétique qu'il induit. $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ est une fonction positive représentant la densité de particules ayant la vitesse v au point x à l'instant t. E et B sont des applications $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ représentant respectivement les champs électrique et magnétique induites par le gaz. Elles sont solutions des équations de Maxwell :

$$\partial_t E(t,x) - rotB(t,x) = -j(t,x) \qquad divE(t,x) = \rho(t,x) \tag{2}$$

$$\partial_t B(t,x) + rotE(t,x) = 0 \qquad divB(t,x) = 0 \tag{3}$$

Où :

$$j(t,x) := \int v\, u(t,x,v)dv \quad et \quad \rho(t,x) := \int u(t,x,v)dv$$

Le terme $(E(t,x) + v \wedge B(t,x))$ est la force de Lorentz. (1) est alors une écriture du second principe de Newton pour notre gaz. En effet, le second principe de Newton nous dit que $u(t, X(t), V(t))$ est une constante lorsque (X, V) est solution de :

$$X'(t) = V(t)$$
$$V'(t) = E(t, X(t)) + V(t) \wedge B(t, X(t))$$

(1) est alors simplement la dérivée par rapport à t de $u(t, X(t), V(t)) = Cste$. Formellement, on voit que si l'on multiplie (1) par $|v|^2$ et que l'on intègre sur tout l'espace :

$$\begin{aligned}\partial_t \int\int v^2 u(t,x,v)dxdv \quad &+ \quad \int |v|^2 v \cdot \int \nabla_x u(t,x,v)dxdv \\ &+ \quad \int E(t,x) \cdot \int |v|^2 \nabla_v u(t,x,v)dvdx \\ &+ \quad \int B(t,x) \cdot \int \nabla_v u(t,x,v) \wedge |v|^2 v dvdx = 0\end{aligned}$$

Où la deuxième intégrale est nulle si u est suffisamment décroissante à l'infini, et en intégrant par parties dans la troisième et la quatrième intégrale :

$$\begin{aligned}\partial_t \int\int v^2 u(t,x,v)dxdv = &\quad \int E(t,x) \cdot \int 2vu(t,x,v)dvdx \\ - &\quad \int B(t,x) \cdot \int u(t,x,v) rot(|v|^2 v)dvdx \\ = &\quad 2\int E(t,x) \cdot j(t,x)dx\end{aligned}$$

Car $rot(|v|^2 v) = \nabla_v(|v|^2) \wedge v + |v|^2 rot(v) = 0$. D'autre part, si on multiplie (2) par E et (3) par B, et qu'on intègre la somme des deux équations obtenues sur tout l'espace, on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_t \int |E(t,x)|^2 + |B(t,x)|^2 dx = &\quad 2\int [E(t,x) \cdot rotB(t,x) - B(t,x) \cdot rotE(t,x)]\, dx \\ - &\quad 2\int E(t,x) \cdot j(t,x)dx \\ = &\quad 2\int div(B \wedge E)dx - 2\int E(t,x) \cdot j(t,x)dx \\ = - &\quad 2\int E(t,x) \cdot j(t,x)dx\end{aligned}$$

En sommant les deux dernières égalités :

$$\int |v|^2 u(t,x,v)dxdv + \int |E(t,x)|^2 + |B(t,x)|^2 dx = Cste$$

C'est la conservation de l'énergie dans notre système.
On a également pour des fonctions suffisamment régulières la conservation au cours du temps de la norme $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ (en multipliant par pu^{p-1} et en intégrant sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$).
Il est donc naturel de regarder des solutions du système dont les conditions initiales vérifient :

$$\int |v|^2 u_0(x,v)dxdv + \int |E_0(x)|^2 + |B_0(x)|^2 dx < \infty$$

$$u_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$$

Puisque, au moins pour les solutions régulières, ces bornes sont indépendantes du temps. L'intérêt de la norme $\mathbf{L}^2$ est de pouvoir donner un sens, lorsque les solutions ne sont plus régulières, au produit $(E + v \wedge B) \cdot \nabla_v u$. En effet, dans le cas régulier, ce terme peut s'écrire comme une différentielle exacte :

$$(E + v \wedge B) \cdot \nabla_v u = div_v[(E + v \wedge B)u]$$

Puisque E et B ne dépendent pas de v et $v \mapsto v \wedge B$ est à divergence nulle. On peut donc aisément étendre la notion de solution demandant à E, B, u d'être dans $\mathbf{L}^2_{loc}$, vérifiant (2), (3) et :

$$\partial_t u(t,x,v) + v.\nabla_x u(t,x,v) + div_v \left[(E + v \wedge B)u\right](t,x,v) = 0 \tag{4}$$

Au sens des distributions, où le terme $(E + v \wedge B)u$ est ici bien défini comme produit de fonctions $\mathbf{L}^2_{loc}$.
L'objet de ce mémoire est de montrer que si on a une suite (E^n, B^n, u^n) de solutions du système de Vlasov-Maxwell convergeant en un certain sens vers (E, B, u), sous certaines conditions (contrôle de la norme $\mathbf{L}^2$, de l'énergie totale du système), (E, B, u) est encore solution du système de Vlasov-Maxwell. La preuve de ce résultat utilise un lemme qui nous dit que moyennant des hypothèses sur la dérivée en position de u, la moyenne en vitesse de u est plus régulière que u elle même. On commencera par des considérations plus générales sur les équations de transport dans le but de montrer ce lemme de moyenne. On s'intéressera ensuite à la stabilité des solutions du système de Vlasov-Maxwell.

1 Préliminaires

1.1 Généralités sur les équations de transport cinétique

Soit ν une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$, on s'intéresse à l'équation :

$$u(x,v) + v.\nabla_x u(x,v) = f(x,v) \text{ avec } x \text{ et } v \in \mathbb{R}^d \tag{5}$$

Définition 1 : On dit que u est solution faible de (5) si c'est une fonction de $\mathbf{L}^1_{loc}(dx \otimes d\nu(v))$ telle que :

- (i) $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et vérifie pour presque tout $v \in \mathbb{R}^d$, $u(.,v) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
- (ii) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$,

$$\int u(x,v)(\varphi(x,v) - v.\nabla_x \varphi(x,v))dxd\nu(v) = \int f(x,v)\varphi(x,v)dxd\nu(v)$$

Proposition 1 : *Soit* $f \in \mathbf{L}^p(dx \otimes d\nu(v))$. (5) *admet une unique solution faible* u *et on a presque partout :*

$$u(x,v) = \int_0^\infty e^{-t} f(x - vt, v)dt$$

De plus, u *et* $v.\nabla_x u$ *sont dans* $\mathbf{L}^p(dx \otimes d\nu(v))$*, et l'application qui à* f *associe* u *est continue, de norme* 1.

Démonstration. Commençons par montrer l'unicité. Comme une solution faible vérifie pour presque tout v, $u(.,v) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On peut donc regarder la transformée de Fourier de u par rapport à x. Elle vérifie :

$$\hat{u}(\xi, v) = \frac{\hat{f}(\xi, v)}{(1 + i\xi.v)}$$

Mais comme la transformée de Fourier est injective, la section $u(.,v)$ est prescrite pour presque tout v, d'où le résultat.
On montre maintenant que :

$$u(x,v) := \int_0^\infty e^{-t} f(x - vt, v)dt$$

est solution. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

$$\int u(x,v)(\varphi(x,v) - v.\nabla_x \varphi(x,v))dxd\nu(v) = \int \int_0^\infty e^{-t} f(x - vt, v)dt\,(\varphi(x,v) - v.\nabla_x \varphi(x,v))\,dxd\nu(v)$$

Or $\left[t, x, v \mapsto e^{-t} f(x - vt, v)\right] \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ donc le terme sous l'intégrale est $\mathbf{L}^1$ et le théorème de Fubini s'applique et la quantité calculée vaut :

$$\begin{aligned}
& \textstyle\int_0^\infty dt \times e^{-t} \int f(x - vt, v)\,(\varphi(x,v) - v.\nabla_x \varphi(x,v))\,dxd\nu(v) \\
= \quad & \textstyle\int_0^\infty dt \times e^{-t} \int f(x,v)\,(\varphi(x + vt, v) - v.\nabla_x \varphi(x + vt, v))\,dxd\nu(v) \\
= \quad & \textstyle\int dxd\nu(v) f(x,v) \int_0^\infty e^{-t}(\varphi(x + vt, v) - v.\nabla_x \varphi(x + vt, v))dt \\
= \quad & \textstyle\int dxd\nu(v) f(x,v) \int_0^\infty -\frac{d}{dt}(e^{-t}\varphi(x + vt, v))dt \\
= \quad & \textstyle\int f(x,v)\varphi(x,v)dxd\nu(v)
\end{aligned}$$

Si $p \in [1, \infty[$, on a presque partout d'après l'inégalité de Hölder :

$$|u(x,v)|^p \leq \left(\int_0^\infty e^{-t} dt \right)^{p-1} \times \left(\int_0^\infty e^{-t} |f(x-vt,v)|^p dt \right) = \int_0^\infty e^{-t} |f(x-vt,v)|^p dt$$

Donc d'après le théorème de Fubini et par invariance de la mesure de Lebesgue par translation,

$$||u||^p_{\mathbf{L}^p} \leq \int d\nu(v) \left(\int_0^\infty e^{-t} dt \left(\int |f(x,v)|^p \right) \right) = ||f||^p_{\mathbf{L}^p}$$

Puis par l'inégalité de Minkovski,

$$||v.\nabla_x u||_{\mathbf{L}^p} \leq 2||f||_{\mathbf{L}^p}$$

Le résultat est encore vrai pour $p = \infty$. $\square$

Contre exemple 1 : Si on ne suppose pas (i), on perd l'unicité, même pour les solutions fortes. En effet plaçons nous à la dimension $d = 1$ et posons $f \equiv 0$. Si g est une fonction $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui s'annule au voisinage de 0, alors :

$$u(x,v) := g(v)e^{-\frac{x}{v}}$$

est solution régulière de (5) avec $f = 0$.

1.2 Résultats utiles sur les espaces de Sobolev

Définition 2 : Soit $s \in \mathbb{R}^d$. Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on dit que $f \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R}^d)$ si :

$$\hat{f}(\xi)(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d)$$

Où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.
On définit alors sur $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^d)$ la norme :

$$||f||^2_{\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^d)} := ||(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}||_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d)}$$

On dit que $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^a, \mathbf{H}(\mathbb{R}^b))$ si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^a$, $f(x,.) \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R}^b)$ et l'application :

$$x \mapsto ||f(x,.)||_{\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^b)} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^a)$$

Lemme 1 : *Inégalité utile dans* $\mathbf{H}^s$.
Si $f \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R}^d)$ *avec* $s > 0$, S *est un ensemble mesurable borné de* $\mathbb{R}^d$, *et si* $h \in \mathbb{R}^d$ *:*

$$\int_S |f(x+h) - f(x)| dx \leq g(h)||f||_{\mathbf{H}^s}$$

Où g *ne dépend que de* S *et tend vers* 0 *quand* h *tend vers* 0.

Démonstration. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\int_S |f(x+h)-f(x)|dx &\leq \left(\int_S |f(x+h)-f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \times \left(\int_S dx\right)^{1/2} \\
&= (Vol(S))^{1/2} \times \left(\int |e^{-ih.\xi}-1|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&= (Vol(S))^{1/2} \times \left(\int \frac{|e^{-ih.\xi}-1|^2}{(1+\xi^2)^s} \times (1+\xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&\leq (Vol(S))^{1/2} \times \left(||\frac{|e^{-ih.\xi}-1|^2}{(1+\xi^2)^s}||_\infty\right)^{1/2} ||f||_{\mathbf{H}^s}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

On rappelle sans démonstration le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov (voir [1]) et le théorème d'injection de Sobolev (voir [4]) :

Théorème 1 : *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et B un sous-ensemble borné de $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que :*

$$||\tau_h f - f||_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \to 0 \text{ quand } h \to 0$$

et ce uniformément sur B.
Alors B est relativement compact dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$.

Théorème 2 : *Si $s < \frac{d}{2}$, $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec*

$$p = \frac{2d}{d-2s}$$

.

On déduit de ces deux derniers résultats une variante du théorème de Rellich-Kondrachov :

Théorème 3 : *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et soit $0 < s < d/2$. $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^1(\Omega)$*

Démonstration. Soit B une partie bornée de $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^d)$.
Premièrement, le théorème d'injection de Sobolev nous dit que B est bornée dans $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p = \frac{2d}{d-2s}$. Donc si $f \in B$, comme $p > 1$ l'inégalité de Hölder nous donne :

$$||f||_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \leq |\Omega|^{1-1/p} ||f||_{\mathbf{L}^p(\mathbf{R}^d)}$$

Donc B est bornée dans $\mathbf{L}^1(\Omega)$.
Deuxièmement, le Lemme 1 nous donne que si $h \in \mathbb{R}^d$, $f(.+h)$ converge dans $\mathbf{L}^1(\Omega)$ vers f quand h tend vers 0, et ce uniformément sur B.
D'où le résultat. □

On aura également besoin par la suite d'une représentation adéquate de $\mathbf{L}^2(R^a, \mathbf{H}^{-m}(\mathbf{R}^b))$ où m est un entier positif.

Lemme 2 : *$f \in \mathbf{L}^2(R^a, \mathbf{H}^{-m}(\mathbf{R}^b))$ si et seulement si il existe $g_0, ..., g_b$ des fonctions de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b)$ telles que :*

$$f = g_0 + \sum_{j=1}^{b} \partial_{v_j}^m g_j$$

Démonstration. La preuve repose sur le fait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$(1 + |\eta|^2)^m \leq C(1 + \sum_{j=1}^{b} |\eta_j|^m)^2$$

Ainsi si on note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f par rapport à la deuxième variable, et η la variable associée :

$$\frac{|\hat{f}(x,\eta)|^2}{(1 + \sum_{j=1}^{b} |\eta_j|^m)^2} \leq C \frac{|\hat{f}(x,\eta)|^2}{(1 + |\eta|^2)^m}$$

Donc $\hat{g} := \frac{\hat{f}(x,\eta)}{1+\sum_{j=1}^{b} |\eta_j|^m}$ est dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

Donc :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x,\eta) &= \hat{g}(x,\eta) + \textstyle\sum_{j=1}^{b} |\eta_i|^m \hat{g}(x,\eta) \\ &= \hat{g}(x,\eta) + \textstyle\sum_{i=1}^{b} \eta_i^m sgn(\eta_i^m) \hat{g}(x,\eta) \end{aligned}$$

Donc si g_i est la transformée de Fourier inverse de $i^m sgn(\eta_j^m) \hat{g}(x,\eta)$ (et donc g_j est $\mathbf{L}^2$).

$$\hat{f}(x,\eta) = \hat{g}(x,\eta) + \sum_{j=1}^{b} \widehat{\partial_{v_j}^m g_j}(x,\eta)$$

et donc :

$$f(x,v) = g(x,v) + \sum_{j=1}^{b} \partial_{v_j}^m g_j(x,v)$$

□

2 Lemme de moyenne

2.1 Le cas $\mathbf{L}^2$

Soit $\varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ et R_0 tel que $Supp(\varphi) \subset B(0, R_0)$.
Si u est solution de (5), on note $\mu(x) := \int u(x,v)\varphi(v)dv$, qui est bien défini presque partout car $f \in \mathbf{L}^2(dx \otimes \varphi(v)dv)$ implique $u\, et\, v.\nabla_x u \in \mathbf{L}^2(dx \otimes \varphi(v)dv)$. Donc presque partout, $u(x,.) \in \mathbf{L}^2(\varphi(v)dv) \subset \mathbf{L}^1(\varphi(v)dv)$.

Théorème 4 : *Si $f \in \mathbf{L}^2(dx \otimes \varphi(v)dv)$, alors $\mu \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ et on a l'inégalités :*

$$\int |\xi||\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi \leq Cste||f||_{\mathbf{L}^2}^2$$

Où $Cste > 0$ ne dépend que de φ.

Lemme 3 : *Il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :*

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall \xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}, \forall \epsilon > 0, \int_{|v.\xi| \leq \epsilon} \varphi(v) dv \leq \frac{A\epsilon}{|\xi|} \\ (ii) & \forall \xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}, \forall \epsilon > 0, \int_{|v.\xi| > \epsilon} \frac{1}{|\xi.v|^2} \varphi(v) dv \leq \frac{A}{|\xi|\epsilon} \end{array}$$

Démonstration. Pour (i), par invariance de la mesure de Lebesgue par rotation, on peut toujours supposer que la première coordonnée dans la direction de ξ. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \int_{|v.\xi| \leq \epsilon} \varphi(v) dv & = & \int dv_2 ... dv_d \int_{v_1 = -\frac{\epsilon}{|\xi|}}^{\frac{\epsilon}{|\xi|}} \varphi(v) dv_1 \\ & \leq & ||\varphi||_\infty \int_{v_2^2 + ... + v_d^2 \leq R_0^2} \int_{v_1 = -\frac{\epsilon}{|\xi|}}^{\frac{\epsilon}{|\xi|}} dv_1 \\ & = & C ||\varphi||_\infty \frac{\epsilon}{|\xi|} \end{array}$$

Où C est deux fois le volume de la boule de rayon R_0 dans $\mathbb{R}^{d-1}$.
Pour (ii), de la même façon :

$$\begin{array}{rcl} \int_{|v.\xi| > \epsilon} \frac{1}{|\xi.v|^2} \varphi(v) dv & = & \int dv_2 ... dv_d \left(\int_{v_1 = -\infty}^{-\frac{\epsilon}{|\xi|}} \frac{\varphi(v)}{|\xi|^2 v_1^2} dv_1 + \int_{v_1 = \frac{\epsilon}{|\xi|}}^{\infty} \frac{\varphi(v)}{|\xi|^2 v_1^2} dv_1 \right) \\ & \leq & ||\varphi||_\infty \int_{v_2^2 + ... + v_d^2 \leq R_0^2} \frac{1}{|\xi|^2} 2 \int_{v_1 = \frac{\epsilon}{|\xi|}}^{\infty} \frac{dv_1}{v_1^2} \\ & = & C ||\varphi||_\infty \frac{1}{|\xi|\epsilon} \end{array}$$

Où C est encore deux fois le volume de la boule de rayon R_0 dans $\mathbb{R}^{d-1}$. □

Lemme 4 : $u \in \mathbf{L}^2(dx)$. *Sa transformée de Fourier vérifie presque partout :*

$$\hat{\mu}(\xi) = \int \hat{u}(\xi, v) \varphi(v) dv$$

Démonstration. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\mu(x)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u(x,v)\|_{\mathbf{L}^2} \times \left(\int \varphi(v) dv \right)^{1/2}$$

Et comme la transformée de Fourier est continue de $\mathbf{L}^2$ dans lui-même, l'opérateur :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbf{L}^2(dx \otimes \varphi(v) dv) & \rightarrow & \mathbf{L}^2(d\xi) \\ u(x,v) & \mapsto & \hat{\mu}(\xi) \end{array}$$

est continu.
On a également d'après Cauchy-Schwarz et le théorème de Fubini :

$$\| \int \hat{u}(\xi, v) \varphi(v) dv \|_{\mathbf{L}^2(d\xi)} \leq \|u(x,v)\|_{\mathbf{L}^2} \times \left(\int \varphi(v) dv \right)^{1/2}$$

Donc l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbf{L}^2(dx \otimes \varphi(v) dv) & \rightarrow & \mathbf{L}^2(d\xi) \\ u(x,v) & \mapsto & \int \hat{u}(\xi, v) \varphi(v) dv \end{array}$$

est continu. Or ces deux opérateurs coïncident clairement sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ (théorème de Fubini) qui est dense dans $\mathbf{L}^2$.

□

Démonstration du théorème. Tout d'abord,

$$f \in \mathbf{L}^2(dx \otimes \varphi(v)dv) \implies u\, et\, v.\nabla_x u \in \mathbf{L}^2(dx \otimes \varphi(v)dv)$$

En Fourier, cela signifie que $\hat{u}(\xi, v)$ et $(v.\xi)\,\hat{u}(\xi, v)$ sont dans $\mathbf{L}^2(dx \otimes \varphi(v)dv)$. En effet, presque partout, $u(., v) \in \mathbf{L}^2(dx)$, donc $\hat{u}(., v) \in \mathbf{L}^2(d\xi)$ avec la même norme $\mathbf{L}^2$. On applique le même raisonnement pour $(v.\xi)\,\hat{u}(\xi, v)$.
On veut majorer :

$$\int |\xi||\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int |\xi| \left| \int \hat{u}(\xi, v)\varphi(v)dv \right|^2 d\xi \quad (*)$$

Soit $\alpha > 0$. Le principe est de séparer le domaine des vitesses en $\{|v \cdot \xi| \leq \alpha\}$ et $\{|v \cdot \xi| > \alpha\}$.

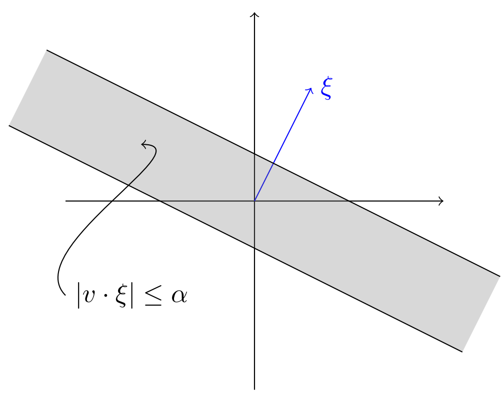

FIGURE 1 – Décomposition de l'espace des vitesses

Le premier domaine est de mesure $\varphi(v)dv$ d'autant petite que $|\xi|$ est grand. Sur le deuxième domaine, la transformée de Fourier de u est d'autant plus petite que $|\xi|$ est grand grâce à la borne que l'on a sur $v \cdot \nabla_x f$.
On a pour tout ξ dans $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$:

$$\left| \int \hat{u}(\xi, v)\varphi(v)dv \right|^2 \leq 2 \left(\left| \int_{|\xi.v| \leq \alpha} \hat{u}(\xi, v)\varphi(v)dv \right|^2 + \left| \int_{|\xi.v| > \alpha} \hat{u}(\xi, v)\varphi(v)dv \right|^2 \right)$$

Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne $d\xi$-presque partout :

$$\begin{array}{rcl} |\int_{|\xi.v| \leq \alpha} \hat{u}(\xi, v)\varphi(v)dv|^2 & \leq & (\int_{|\xi.v| \leq \alpha} |\hat{u}(\xi, v)|^2 \varphi(v)dv) \times (\int_{|\xi.v| \leq \alpha} \varphi(v)dv) \\ & \leq & \|\hat{u}(\xi, .)\|^2_{\mathbf{L}^2} \times \frac{A\alpha}{|\xi|} \end{array}$$

Majorons maintenant le deuxième terme, encore un fois, Cauchy-Schwarz nous donne $d\xi$-presque partout :

$$\begin{array}{rcl} \left(\int_{|\xi.v| > \alpha} |\hat{u}(\xi, v)\varphi(v)dv|^2 \right) & \leq & \left(\int_{|\xi.v| > \alpha} |\xi.v|^2 |\hat{u}(\xi, v)|^2 \varphi(v)dv \right) \times \left(\int_{|\xi.v| > \alpha} \frac{1}{|\xi.v|^2} \varphi(v)dv \right) \\ & \leq & \left(\int_{|\xi.v| > \alpha} |\xi.v|^2 |\hat{u}(\xi, v)|^2 \varphi(v)dv \right) \times \frac{A}{|\xi|\alpha} \end{array}$$

En reportant dans $(*)$:

$$\begin{aligned}\int |\xi||\hat{u}(\xi)|^2 d\xi &\leq 2A\left(\alpha \int d\xi \|\hat{u}(\xi,.)\|^2_{\mathbf{L}^2} + \frac{1}{\alpha}\int d\xi \int |\xi.v|^2 |\hat{u}(\xi,v)|^2 \varphi(v)dv\right) \\ &= 2A\left(\alpha\|\hat{u}\|^2_{\mathbf{L}_2} + \frac{1}{\alpha}\|(\xi.v)\hat{u}\|^2_{\mathbf{L}^2}\right) \\ &= 2A\left(\alpha\|u\|^2_{\mathbf{L}^2} + \frac{1}{\alpha}\|v.\nabla_x u\|^2_{\mathbf{L}^2}\right)\end{aligned}$$

En choisissant $\alpha = \frac{\|u\|_{\mathbf{L}^2}}{\|v.\nabla_x u\|_{\mathbf{L}^2}}$, on obtient :

$$\int |\xi||\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq 4A\|u\|_{\mathbf{L}^2}\|v.\nabla_x u\|_{\mathbf{L}^2}$$

On obtient le résultat voulu grâce à la proposition 1. □

2.2 Le cas $\mathbf{L}^1$

Si on pourrait étendre ces résultats aux autres espaces $\mathbf{L}^p$, $p \in]1,\infty[$, $\mathbf{L}^1$ pose plus de difficultés. On peut néanmoins obtenir le résultat suivant :

Proposition 2 : *Si K est un sous-ensemble borné et uniformément intégrable de $\mathbf{L}^1(dx \otimes \varphi(v)dv)$, et si T est l'application $\mathbf{L}^1(dx \otimes \varphi(v)dv) \to \mathbf{L}^1(dx)$ qui à f associe le moment μ de l'unique solution de* (5)*, alors $T(K)$ est relativement compact dans $\mathbf{L}^1_{loc}(dx)$.*

Démonstration. On montre le résultat suivant :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ tq\ \forall |h| < \delta, \forall f \in K, \int |T.f(x+h) - T.f(x)|dx < \epsilon$$

Soit donc $\epsilon > 0$. Si $\alpha > 0$, on pose :

$$\mu_{1,\alpha} := T(f \times \mathbb{1}_{\{|f|\leq\alpha\}})$$

et

$$\mu_{2,\alpha} := T(f \times \mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}})$$

On a clairement $T.f = \mu_{1,\alpha} + \mu_{2,\alpha}$.
La proposition 1 nous dit que $\int |u_{2,\alpha}| \leq \int_{|f|>\alpha} |f|$ donc pour tout h :

$$\int |\mu_{2,\alpha}(x+h) - \mu_{2,\alpha}(x)|dx \leq 2\int_{|f|>\alpha} |f|$$

Comme K est uniformément intégrable, il existe $\alpha_0 > 0$ indépendant de f et de h tel que $\int |\mu_{2,\alpha_0}(x+h) - \mu_{2,\alpha_0}(x)|dx \leq \frac{\epsilon}{2}$.
D'autre part, si f est dans K et si M majore la norme $\mathbf{L}^1$ des fonctions de K,

$$\int_{|f|\leq\alpha_0} |f|^2 \leq \alpha_0 \times M$$

Donc d'après le théorème 4, il existe $B > 0$ tel que pour tout $f \in K$,

$$(\int |\xi||\hat{\mu}_{1,\alpha_0}(\xi)|^2 dx)^{1/2} \leq B$$

Donc d'après l'inégalité du lemme 1, si $h \in \mathbb{R}^d$,

$$\int |\mu_{1,\alpha_0}(x+h) - \mu_{1,\alpha_0}(x)| dx \leq BAg(h)$$

Qui tend bien vers 0 quand h tend vers 0. Ainsi comme $T(K)$ est borné dans $\mathbf{L}^1$ et donc dans $\mathbf{L}^1_{loc}$, d'après le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, $T(K)$ est relativement compact. □

On ne peut obtenir beaucoup mieux que ce résultat comme le montre le contre exemple suivant :

Contre exemple 2 : Soit K un sous-ensemble borné de $\mathbf{L}^1(dx \otimes \varphi(v)dv)$, $T(K)$ n'est pas nécessairement faiblement relativement compact dans $\mathbf{L}^1(dx)$.
En effet si φ vaut uniformément 1 sur un voisinage V de 0 et vaut uniformément 0 au delà de la boule unité, et si (f_n) est une suite de $\mathbf{L}^1(dx \otimes dv)$ telle que $f_n(x,v)\varphi(v)$ converge faiblement vers la masse de Dirac au point $(0, v_0) \in \{0\} \times (V \setminus \{0\})$. Si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors on a :

$$\begin{array}{rcl}
\int \alpha(x) T.f_n(x) dx & = & \int\int\int_0^\infty \alpha(x) e^{-t} f_n(x - vt, v) dt \varphi(v) dv dx \\
& = & \int_0^\infty e^{-t} \int\int \alpha(x) f_n(x - vt, v) \varphi(v) dx dv dt \\
& \to & \int_0^\infty e^{-t} \alpha(v_0 t) dt
\end{array}$$

Donc $T.f_n$ converge faiblement vers une mesure qui n'est pas une fonction. Ne plus supposer que notre famille de $\mathbf{L}^1$ est uniformément intégrable empêche de conclure quant à la compacité séquentielle, même faible dans $\mathbf{L}^1_{loc}$ de son image par T.

Maintenant qu'on a vu l'idée de la preuve (séparation du domaine des vitesses en fonction de la valeur de $v \cdot \xi$), on peut appliquer cette méthode à certains autres cas :

2.3 Le cas $v \cdot \nabla_x u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{H}^{-m}(\mathbb{R}^d))$

Théorème 5 : *Soit $u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ telle que $v.\nabla_x u$ soit $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{H}^{-m}(\mathbb{R}^d))$ où m est un entier positif.*
Alors $\mu \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s := \frac{1}{2(m+1)}$.

Démonstration. On utilise la représentation de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbf{H}^{-m}(\mathbb{R}^d)$ donnée au lemme 2 : il existe $g_0, ..., g_d \in \mathbf{L}^2$ telles que $v.\nabla_x u = g_0 + \sum_{j=1}^d \partial_{v_j}^m g_j$. On introduit une fontion $\zeta \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui vaut uniformément 1 sur $[-1, 1]$, à valeur dans $[0,1]$ et de support inclus dans $[-2,2]$. Soit $R_0 > 0$ tel que le support de φ soit dans $B(0,R_0)$. Alors si $\xi \in \mathbb{R}^d$, différent de 0, et si $\alpha > 0$:

$$\begin{array}{rcl} |\hat{\mu}(\xi)|^2 & = & \left|\int \hat{u}(\xi,v)\varphi(v)dv\right|^2 \\ & \leq & 2\left(\left|\int \hat{u}(\xi,v)\varphi(v)\zeta(\frac{\xi.v}{\alpha})dv\right|^2 + \left|\int \hat{u}(\xi,v)\varphi(v)(1-\zeta(\frac{\xi.v}{\alpha}))dv\right|^2\right) \end{array}$$

Le premier terme se majore toujours de la même façon en utilisant Cauchy-Schwarz :

$$\begin{array}{rcl} \left|\int \hat{u}(\xi,v)\varphi(v)\zeta(\frac{\xi.v}{\alpha})dv\right|^2 & \leq & \int |\hat{u}(\xi,v)|^2\varphi(v)dv \int_{|\xi.v|\leq 2\alpha}\varphi(v)dv \\ & \leq & C\frac{\alpha}{|\xi|}\int |\hat{u}(\xi,v)|^2 dv \end{array}$$

On intègre par parties dans le deuxième terme en utilisant le fait que

$$\phi : v \mapsto \frac{\varphi(v)(1-\zeta(\frac{\xi.v}{\alpha}))}{\xi.v}$$

est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, et le fait que la transformation de Fourier par rapport à la première variable commute avec la dérivation par rapport à la seconde variable ce qui entraine :

$$(\xi.v)\hat{u}(\xi,v) = \hat{g_0}(\xi,v) + \sum_{j=1}^{d}\partial_{v_j}^m \hat{g_j}(\xi,v)$$

Puis,

$$\begin{array}{rcl} \left|\int \hat{u}(\xi,v)\varphi(v)(1-\zeta(\frac{\xi.v}{\alpha}))dv\right|^2 & \leq & C\Big(\left|\int \hat{g_0}(\xi,v)\varphi(v)\frac{(1-\zeta(\frac{\xi.v}{\alpha}))}{\xi.v}dv\right|^2 + \\ & & \sum_{j=1}^d \left|\int \partial_{v_j}^m\hat{g_j}(\xi,v)\varphi(v)\frac{(1-\zeta(\frac{\xi.v}{\alpha}))}{\xi.v}dv\right|^2\Big) \end{array}$$

Avec :

$$\begin{array}{rcl} \left|\int \hat{g_0}(\xi,v)\varphi(v)\frac{(1-\zeta(\frac{\xi.v}{\alpha}))}{\xi.v}dv\right|^2 & \leq & \int |\hat{g_0}(\xi,v)|^2 dv \int_{|\xi.v|>\alpha}\left(\frac{\varphi(v)}{\xi.v}\right)^2 dv \\ & \leq & C\frac{1}{\alpha|\xi|}\int |\hat{g_0}(\xi,v)|^2 dv \end{array}$$

Et, pour $j = 1, ..., d$:

$$\left|\int \partial_{v_j}^m \hat{g_j}(\xi,v)\varphi(v)\frac{(1-\zeta(\frac{\xi.v}{\alpha}))}{\xi.v}dv\right|^2 = \left|\int \hat{g_j}(\xi,v)\partial_{v_j}^m\phi(v)dv\right|^2$$

Or $\partial_{v_j}^m\phi(v)$ s'écrit sous la forme d'une somme de termes du type :

$$\frac{\xi_j^{a+b}}{\alpha^{|a|}\times(\xi.v)^{|b|+1}}\times\psi_{a,b}(v)$$

Avec $|a|+|b| \leq m$ et $\psi_{a,b} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a son support dans $\{|\xi.v| \geq \alpha, |v| \leq R_0\}$ et est borné par une constante ne dépendant que de φ et ζ .
On peut majorer un à un ces termes par :

$$C \times \mathbb{1}(|\xi.v| > \alpha, |v| \leq R_0) \times \frac{|\xi|^{|a|+|b|}}{\alpha^{|a|} \times |\xi.v|^{|b|+1}} \leq C \times \mathbb{1}(|\xi.v| > \alpha, |v| \leq R_0) \times \frac{|\xi|^{|a|+|b|}}{\alpha^{|a|+|b|} \times |\xi.v|}$$

Et donc avoir à majorer :

$$C \times \mathbb{1}(|\xi.v| > \alpha, |v| \leq R_0) \times \frac{1}{|\xi.v|} P\left(\frac{|\xi|}{\alpha}\right)$$

Où P est un polynôme réel de degré inférieur ou égal à m.
Or comme si P est un polynôme réel de degré inférieur ou égal à m il existe une constante A telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |P(x)| \leq A(1+|x|^m)$$

On obtient donc la majoration suivante :

$$|\partial_{v_j}^m \phi(v)| \leq C \times \mathbb{1}(|\xi.v| > \alpha, |v| \leq R_0) \left(\frac{1}{|\xi.v|} + \frac{1}{|\xi.v|} \frac{|\xi|^m}{\alpha^m}\right)$$

Puis,

$$|\partial_{v_j}^m \phi(v)|^2 \leq C \times \mathbb{1}(|\xi.v| > \alpha, |v| \leq R_0) \left(\frac{1}{|\xi.v|^2} + \frac{1}{|\xi.v|^2} \frac{|\xi|^{2m}}{\alpha^{2m}}\right)$$

En reportant dans l'intégrale après avoir utilisé Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left| \int \partial_{v_j}^m \hat{g}_j(\xi,v)\varphi(v) \tfrac{(1-\zeta(\frac{\xi.v}{\alpha}))}{\xi.v} dv \right|^2 &\leq C(1+\tfrac{|\xi|^{2m}}{\alpha^{2m}}) \int |\hat{g}_j(\xi,v)|^2 dv \int_{|\xi.v|>\alpha, |v| \leq R_0} \tfrac{1}{|\xi.v|^2} dv \\ &\leq C(1+\tfrac{|\xi|^{2m}}{\alpha^{2m}}) \times \tfrac{1}{\alpha|\xi|} \int |\hat{g}_j(\xi,v)|^2 dv \end{aligned}$$

On en déduit :

$$|\hat{\mu}(\xi)|^2 \leq C \left(\tfrac{\alpha}{|\xi|} \int |u(\xi,v)|^2 dv + \tfrac{1}{\alpha|\xi|} \int |\hat{g}_0(\xi,v)|^2 dv + \tfrac{1}{\alpha|\xi|} \times (1+\tfrac{|\xi|^{2m}}{\alpha^{2m}}) \sum \int |\hat{g}_j(\xi,v)|^2 dv \right)$$

Puis en choisissant $\alpha := |\xi|^{\frac{m}{1+m}}$:

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(\xi)|^2 &\leq C\Big(|\xi|^{-\frac{1}{1+m}} \int |\hat{u}(\xi,v)|^2 dv + |\xi|^{-\frac{2m+1}{m+1}} \int |\hat{g}_0(\xi,v)|^2 dv \\ &\quad + |\xi|^{-\frac{2m+1}{m+1}} \times (1+|\xi|^{\frac{2m}{1+m}}) \sum \int |\hat{g}_j(\xi,v)|^2 dv \Big) \\ &= C\Big(|\xi|^{-2s} \int |\hat{u}(\xi,v)|^2 dv + |\xi|^{2s-2} \int |\hat{g}_0(\xi,v)|^2 dv \\ &\quad + |\xi|^{2s-2} \times (1+|\xi|^{2-4s}) \sum \int |\hat{g}_j(\xi,v)|^2 dv \Big) \end{aligned}$$

Donc :

$$|\xi|^{2s}|\hat{\mu}(\xi)|^2 \leq C\Big(\int |\hat{u}(\xi,v)|^2 dv + |\xi|^{-2(1-2s)} \int |\hat{g_0}(\xi,v)|^2 dv \\ + |\xi|^{-2(1-2s)} \times (1+|\xi|^{2(1-2s)}) \sum \int |\hat{g_j}(\xi,v)|^2 dv \Big)$$

Qui est bien intégrable par rapport à ξ car $1-2s \geq 0$ et u, g_1 et g_2 sont $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ (tout du moins est-ce intégrable à l'extérieure d'une boule centrée en 0, mais comme $|\xi|^s \hat{\mu}(\xi)$ est $\mathbf{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on a le résultat annoncé). □

2.4 Le cas où u dépend du temps

On s'intéresse maintenant au cas où $u(t,x,v)$ est dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et où l'information que l'on a porte sur $\partial_t u + v.\nabla_x u$.

Théorème 6 : *Soit donc* $u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ *telle que :*

$$\partial_t u + v.\nabla_x u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbf{H}^{-m}(\mathbb{R}^d))$$

où m est un entier positif.
Alors $\mu : (t,x) \mapsto \int u(t,x,v)\varphi(v)dv$ *est dans* $\mathbf{H}^s(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Cette fois les chapeaux désignent les transformées de Fourier par rapport aux variables temporelles et spatiales. Les variables associées à t et x dans l'espace de Fourier seront respectivement notées τ et ξ.
Le lemme 2 ainsi que le fait que la transformée de Fourier par rapport aux variables spatiales et temporelles commutent avec les dérivées par rapport aux variables en vitesse nous donne deux fonctions g_1 et g_2 dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ telles que :

$$(\tau + \xi.v)\,\hat{u}(\tau,\xi,v) = \hat{g_0}(\tau,\xi,v) + \sum \partial^m_{v_j} \hat{g_j}(\tau,\xi,v)$$

On définit ζ de la même façon que dans le théorème précédent et on suit le même schéma de preuve, en remplaçant $\zeta(\frac{\xi.v}{\alpha})$ par $\zeta(\frac{\tau+\xi.v}{\alpha})$ ce qui nous conduit à, si $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(\tau,\xi)|^2 \quad &\leq \quad C\Big(\Big| \int \hat{u}(\tau,\xi,v)\zeta(\tfrac{\tau+\xi.v}{\alpha})\varphi(v)dv \Big|^2 \\ &\qquad + \Big| \int \hat{g_0}(\tau,\xi,v) \tfrac{1-\zeta(\frac{\tau+\xi.v}{\alpha})}{\tau+\xi.v} \varphi(v)dv \Big|^2 \\ &\qquad + \sum \Big| \int \partial^m_{v_j}\hat{g_j}(\tau,\xi,v) \tfrac{1-\zeta(\frac{\tau+\xi.v}{\alpha})}{\tau+\xi.v} \varphi(v)dv \Big|^2 \Big) \\ &\leq \quad C\Big(\int |\hat{u}(\tau,\xi,v)|^2 dv \int \zeta(\tfrac{\tau+\xi.v}{\alpha})\varphi(v)dv + \int |\hat{g_0}(\tau,\xi,v)|^2 dv \int \phi(v)^2 dv \\ &\qquad + \sum \int |\hat{g_j}(\tau,\xi,v)|^2 dv \int (\partial^m_{v_j}\phi(v))^2 dv \Big) \quad (**) \end{aligned}$$

Où $\phi : v \mapsto \frac{1-\zeta(\frac{\tau+\xi.v}{\alpha})}{\tau+\xi.v}\varphi(v)$.
Donc $\partial^m_{v_j}\phi(v)$ est une somme de termes du type :

$$\frac{\xi_j^{a+b}}{\alpha^{|a|}(\tau+\xi.v)^{|b|+1}} \times \psi_{a,b}(v)$$

Où $|a|+|b|\leq m$ et $\psi_{a,b}\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a son support dans $\{|\tau+\xi.v|\geq\alpha,|v|\leq R_0\}$ et est borné par une constante ne dépendant que de ζ et φ.
On peut donc majorer de la même façon que dans la preuve précédente :

$$(\partial_{v_j}^m\phi(v))^2\leq C\left(1+\frac{|\xi|^{2m}}{\alpha^{2m}}\right)\times\frac{1}{(\tau+\xi.v)^2}\times\mathbb{1}_{(|v|\leq R_0,|\tau+\xi.v|\geq\alpha)}$$

On remarque alors que si $|\tau|>\alpha+R_0|\xi|$, alors $|v|\leq R_0\Rightarrow|\tau+\xi.v|>\alpha$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\int(\partial_{v_j}^m\phi(v))^2dv\times\mathbb{1}_{(|\tau|>\alpha+R_0|\xi|)}&\leq C\left(1+\tfrac{|\xi|^{2m}}{\alpha^{2m}}\right)\times\left|\int_{-R_0}^{R_0}\tfrac{dt}{(\tau+t|\xi|)^2}\right|\\&=C\left(1+\tfrac{|\xi|^{2m}}{\alpha^{2m}}\right)\times\tfrac{2R_0}{\tau^2-R_0^2|\xi|^2}\end{aligned}$$

Dans l'autre cas ($|\tau\leq\alpha+R_0|\xi|$) on majore plus grossièrement en oubliant la borne R_0 dans la direction de ξ (comme dans la preuve précédente) :

$$\int(\partial_{v_j}^m\phi(v))^2dv\times\mathbb{1}_{(|\tau|\leq\alpha+R_0|\xi|)}\leq C\left(1+\frac{|\xi|^{2m}}{\alpha^{2m}}\right)\times\frac{1}{\alpha|\xi|}$$

La majoration pour ϕ dans $(**)$ se fait exactement de la même façon puisqu'on a :

$$(\phi(v))^2\leq C\frac{1}{(\tau+\xi.v)^2}\times\mathbb{1}_{(|v|\leq R_0,|\tau+\xi.v|>\alpha)}$$

Reste à majorer

$$\int\zeta\left(\frac{\tau+\xi.v}{\alpha}\right)\varphi(v)dv$$

Si $|\tau|>\alpha+R_0|\xi|$, cette intégrale est nulle car le support de φ et de $\zeta(\frac{\tau+\xi.v}{\alpha})$ sont disjoints. Dans l'autre cas, on peut toujours majorer par la mesure du support de $\zeta(\frac{\tau+\xi.v}{\alpha})$dans $\varphi(v)dv$. Ainsi :

$$\int\zeta\left(\frac{\tau+\xi.v}{\alpha}\right)\varphi(v)dv\leq C\times\mathbb{1}_{(|\tau|\leq\alpha+R_0|\xi|)}\frac{\alpha}{|\xi|}$$

En reportant nos résultats dans $(**)$, on a :

$$\begin{aligned}|\hat{\mu}(\tau,\xi)|^2\leq\;&C\times h(\tau,\xi)\\&\left(\left(\tfrac{\alpha}{|\xi|}+\tfrac{1}{\alpha|\xi|}\left(1+\tfrac{|\xi|^{2m}}{\alpha^{2m}}\right)\right)\times\mathbb{1}_{(|\tau|\leq\alpha+R_0|\xi|)}\right.\\&\left.+\left(1+\tfrac{|\xi|^{2m}}{\alpha^{2m}}\right)\times\tfrac{2R_0}{\tau^2-R_0^2|\xi|^2}\times\mathbb{1}_{(|\tau|>\alpha+R_0|\xi|)}\right)\end{aligned}$$

Où $h(\tau,\xi):=\int|\hat{u}(\tau,\xi,v)|^2dv+\int|\hat{g_0}(\tau,\xi,v)|^2dv+\sum\int|\hat{g_j}(\tau,\xi,v)|^2dv$ est intégrable par rapport à τ,ξ.

– Si $|\xi|>1$, on choisit $\alpha=|\xi|^{\frac{m}{m+1}}$ et on obtient alors :

$$\begin{aligned}|\hat{\mu}(\tau,\xi)|^2&\leq C\times h(\tau,\xi)\Big(\left(|\xi|^{-2s}+|\xi|^{2s-2}\left(1+|\xi|^{2(1-2s)}\right)\right)\mathbb{1}_{(|\tau|\leq(R_0+1)|\xi|)}\\&\qquad+\left(1+|\xi|^{2(1-2s)}\right)\times\tfrac{1}{\tau^2-R_0^2|\xi|^2}\mathbb{1}_{(|\tau|>R_0|\xi|+1)}\Big)\\&\leq C\times h(\tau,\xi)\Big(|\xi|^{-2s}\mathbb{1}_{(|\tau|\leq(R_0+1)|\xi|)}+\left(1+|\xi|^{2(1-2s)}\right)\times\tfrac{1}{|\tau|+R_0}\times\mathbb{1}_{(|\tau|>R_0|\xi|+1)}\Big)\end{aligned}$$

– Si $|\xi| \leq 1, |\tau| > 2$, on choisit simplement $\alpha = 1$, on a :

$$\begin{array}{rcl}|\hat{\mu}(\tau,\xi)|^2 & \leq & C \times h(\tau,\xi)\left(\frac{1}{|\xi|} \times \mathbb{1}_{(|\tau| \leq 1+R_0|\xi|)} + \frac{1}{\tau^2 - R_0^2|\xi|^2} \times \mathbb{1}_{(|\tau|>1+R_0|\xi|)}\right) \\ & \leq & C \times h(\tau,\xi)\left(\frac{R_0 \times \mathbb{1}_{(|\tau| \leq \alpha+R_0|\xi|)}}{|\tau|-1} + \frac{\mathbb{1}_{(|\tau|>\alpha+R_0|\xi|)}}{|\tau|}\right) \\ & \leq & C \times h(\tau,\xi) \times \frac{1}{|\tau|}\end{array}$$

Donc il suffit de vérifier que $|\tau^2+\xi^2|^s|\hat{\mu}(\tau,\xi)|^2$ est intégrable sur les domaines :

- $\{|\xi| \leq 1, |\tau| \leq 1\}$
  Comme $\hat{\mu}$ est $\mathbf{L}^2$ et $|\tau^2+\xi^2|^s$ est borné sur ce domaine, il n'y a pas de problème ici.
- $\{|\xi| \leq 1, |\tau| > 2\}$
  On a sur ce domaine la majoration :

$$|\hat{\mu}(\tau,\xi)|^2 \leq C \times h(\tau,\xi) \times \frac{1}{|\tau|}$$

  Et :

$$|\tau^2+\xi^2|^s \leq |1+\tau^2|^s \leq C \times (1+|\tau|^{2s})$$

  Et comme $2s \leq 1$, $\frac{1+\tau^{2s}}{|\tau|}$ est borné, d'où le résultat.
- $\{|\xi| > 1\}$
  On a deux termes à vérifier.
  Le premier a son support dans $\{|\tau| \leq (R_0+1)|\xi|\}$.
  Alors,

$$|\tau^2+\xi^2|^s \leq C|\xi|^{2s}$$

  Et notre terme se majore par :

$$C \times h(\tau,\xi)$$

  Le deuxième terme a son support dans $\{|\tau| > R_0|\xi|+1\}$. On a donc :

$$|\tau^2+\xi^2|^s \leq C \times (1+\tau^{2s})$$

  Et :

$$|\xi|^{2(1-2s)} \leq C \times (1+|\tau|^{2(1-2s)})$$

  Donc ce deuxième terme est majoré par :

$$|\tau^2+\xi^2|^s|\hat{\mu}(\tau,\xi)|^2 \leq C \times h(\tau,\xi)\frac{(1+|\tau|^{2s})(1+|\tau|^{2(1-2s)})}{|\tau|+R_0}$$

  Où $\frac{(1+|\tau|^{2s})(1+|\tau|^{2(1-2s)})}{|\tau|+R_0}$ est bornée car équivalente à $|\tau|^{1-2s}$ à l'infini et $s \leq 1/2$.

On a donc prouvé le résultat. On remarque de plus que la norme $\mathbf{H}^s$ de μ est bornée par une combinaison linéaire des normes $\mathbf{L}^2$ de u, $g_0, ..., g_d$. □

3 Un résultat de stabilité

On considère une suite de solutions (dans $\mathcal{D}'((0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$) (u^n, E^n, B^n) du système (VM). Nous allons montrer que, moyennant quelques bornes uniformes précisées ci-dessous, la suite converge à extraction près (en un sens précisé ci-dessous), vers une distribution solution de (VM).

On suppose plus précisément que :

(H1) l'énergie $\mathcal{E}_n(t)$ des solutions est bornée indépendamment de n et de t :

$$\exists C > 0\ \forall n, \forall t > 0,\ \mathcal{E}_n(t) = \int u^n(t,x,v)|v|^2 dxdv + \int |E^n(t,x)|^2 + |B^n(t,x)|^2 dx \leq C$$

(H2) la suite u^n est positive et bornée dans $\mathbf{L}^\infty((0,T);\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3))$ pour tout $T<\infty$

(H3) l'ensemble $\{|u^n(t,\cdot,\cdot)|^2,\ n \leq 0,\ t \in [0,T]\}$ est uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1(B_R\times B_R)$ pour tout $R,T<\infty$

D'après (H1) et le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, quitte à extraire une sous-suite de (E^n, B^n) on peut supposer qu'elle converge faiblement dans $\mathbf{L}^2((0,T)\times\mathbb{R}^3))$ pour tout $T<\infty$, vers des champs $E, B \in \mathbf{L}^\infty((0,T);\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)))$ pour tout $T<\infty$.
De plus d'après (H2), la suite u^n est bornée dans $\mathbf{L}^2((0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ donc par application du même théorème on peut quitte à extraire supposer qu'elle converge faiblement vers une fonction u dans $\mathbf{L}^2((0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$. La limite u est encore positive.

Vérifions que l'énergie cinétique associée à u est aussi, *i.e*

$$\int u(t,x,v)|v|^2 dxdv < \infty$$

. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ à valeurs dans $[0,1]$ et valant 1 sur la boule unité B_1, et $\varphi_p = \varphi(\cdot/p)$. Soit $\rho_q \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une approximation de l'unité. On a d'après (H1),

$$\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} u^n|v|^2\varphi_p dxdv \leq \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} u^n|v|^2\varphi_p dxdv \leq C$$

ce dont on déduit, pour tout $s>0$,

$$\begin{array}{rcl} \int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \rho_q(s-t)u^n|v|^2\varphi_p dxdvdt & = & \int_{(0,\infty)} \rho_q(s-t)\left(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} u^n|v|^2\varphi_p dxdv\right)dt \\ & \leq & C\int_{(0,\infty)}\rho_q(s-t)dt \leq C \end{array}$$

La suite u^n convergeant faiblement vers u on en déduit à la limite (en n),

$$\int_{(0,\infty)} \rho_q(s-t)\left(\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} u|v|^2\varphi_p dxdv\right)dt = \int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \rho_q(s-t)u|v|^2\varphi_p dxdvdt \leq C$$

Comme $u \in \mathbf{L}^2((0,T) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Swcharz $\phi_p := \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} u|v|^2 \varphi_p dxdv \in \mathbf{L}^1_{loc}((0,\infty))$, donc $\rho_q \star \phi_p \xrightarrow[q \to \infty]{\mathbf{L}^1_{loc}((0,\infty))} \phi_p$. Or à extraction près la convergence dans $\mathbf{L}^1_{loc}((0,\infty))$ implique la convergence presque partout. Ainsi l'inégalité précédente, qui s'écrit

$$\rho_q \star \phi_p(s) \leq C \quad \text{pour tout s>0},$$

implique pour presque tout $t > 0$,

$$\phi_p(t) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} u|v|^2 \varphi_p dxdv \leq C$$

d'où pour presque tout $t > 0$,

$$\int u(t,x,v)|v|^2 dxdv$$

d'après le théorème de convergence monotone.

On peut alors énoncer le théorème de stabilité :

Théorème 7 :
(i) Pour tout $\psi \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^3)$ *tel que* $\psi(v)|v|^{-2} \xrightarrow[|v| \to \infty]{} 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^n \psi dx \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbf{L}^1((0,T) \times B_R)} \int_{\mathbb{R}^3} u\psi dx \quad \textit{pour tout} \quad R, T < \infty.$$

(ii) La limite faible (u, E, B) *est solution de (VM) au sens des distributions, i.e*

$$\partial_t u(t,x,v) + v.\nabla_x u(t,x,v) + div_v \left[(E + v \wedge B)u\right](t,x,v) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{array}{llll} \partial_t E(t,x) - rot B(t,x) & = -j(t,x) & div E(t,x) & = \rho(t,x) \qquad (2) \\ \partial_t B(t,x) + rot E(t,x) & = 0 & div B(t,x) & = 0 \qquad (3) \end{array}$$

4 Démonstration de la stabilité des solutions

4.1 Démonstration du point (i)

Démontrons le Théorème 7 dans le cas où u^n est bornée dans $\mathbf{L}^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ (pour tout $T < \infty$). Supposons pour l'instant $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

On remarque que u^n est solution de

$$\partial_t u^n + v \cdot \nabla_x u^n = div_v(g_2^n) \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'((0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3),$$

où

$$g_2^n = -(E^n + v \wedge B^n) u^n$$

.

Pour $\epsilon > 0$ et $t < \infty$, soit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ à valeurs dans $[0,1]$ et telle que $\zeta \equiv 1$ sur $[\epsilon, T]$ et Supp$\zeta \subset [\frac{1}{2}\epsilon, 2T]$. Alors $\tilde{u}^n = \zeta u^n$ est solution de

$$\partial_t \tilde{u}^n + v \cdot \nabla_x \tilde{u}^n = g_1^n + div_v(\tilde{g}_2^n) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'((0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3),$$

où

$$g_1^n = \zeta' u^n \quad \text{et} \quad \tilde{g}_2^n = \zeta g_2^n$$

On a alors :

- $\tilde{u}^n$ bornée dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, car u^n l'est dans $\mathbf{L}^2((0,2T) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$
- g_1^n bornée dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, pour la même raison
- $\tilde{g}_2^n$ bornée dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_x^3 \times B_R)$ (pour tout $R < \infty$) car g_2^n est bornée dans $\mathbf{L}^\infty((0,T) \times B_R; \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_x^3))$. En effet, pour tout $T, R < \infty$ et pour tout $(t,v) \in (0,T) \times B_R$, on a

$$\begin{aligned}
\|g_2^n\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_x^3)} &\leq \|u^n\|_{\mathbf{L}^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)} \cdot \|E^n + v \wedge B^n\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_x^3)} \\
&\leq \|u^n\|_{\mathbf{L}^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}(\|E^n\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_x^3)} + \|v \wedge B^n\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_x^3)}) \\
&\leq \|u^n\|_{\mathbf{L}^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}(\|E^n\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_x^3)} + R\|B^n\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_x^3)})
\end{aligned}$$

  Or, $\|u^n\|_{\mathbf{L}^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}$ est majoré indépendamment de n par hypothèse, et $\|E^n\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_x^3)}$ et $\|B^n\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_x^3)}$ sont majorés indépendamment de t et de n d'après (18), ce qui conclut.

Le Théorème 6 (avec $m = 1$) nous montre alors que $\int \tilde{u}^n \psi dv$ est bornée dans $\mathbf{H}^{1/4}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$. En particulier d'après le Théorème 1, quitte à extraire, la suite $\int \zeta u^n \psi dv$ converge dans $\mathbf{L}^1((0,T) \times B_R)$, et par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'((0,T) \times B_R)$, on a

$$\int \zeta u^n \psi dv \xrightarrow{n} \int \zeta u \psi dv \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^1((0,T) \times B_R) \quad \text{pour tout} \quad R, T < \infty$$

Et donc

$$\begin{aligned}
& \|\textstyle\int u^n \psi dv - \int u \psi dv\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)} \\
\leq \; & \|\textstyle\int \zeta u^n \psi dv - \int \zeta u \psi dv\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)} + \|(1-\zeta)(\int u^n \psi dv - \int u \psi dv)\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)} \\
\leq \; & \|\textstyle\int \zeta u^n \psi dv - \int \zeta u \psi dv\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)} + \|\int (1-\zeta)(u^n - u)\psi dv\|_{\mathbf{L}^1((0,\epsilon)\times B_R)} \\
= \; & \|\textstyle\int \zeta u^n \psi dv - \int \zeta u \psi dv\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)} + \|(1-\zeta)(u^n - u)\psi dv\|_{\mathbf{L}^1((0,\epsilon)\times B_R \times \mathrm{Supp}\psi)} \\
\leq \; & \|\textstyle\int \zeta u^n \psi dv - \int \zeta u \psi dv\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)} + C\epsilon \|(1-\zeta)(u^n - u)\psi dv\|_{\mathbf{L}^2((0,\epsilon)\times B_R \times \mathrm{Supp}\psi)} \\
& \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
\leq \; & \|\textstyle\int \zeta u^n \psi dv - \int \zeta u \psi dv\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)} + C\epsilon
\end{aligned}$$

car ζ et ψ sont bornées, et u^n et u sont bornées dans $\mathbf{L}^2((0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$.
On en conclut que

$$\int u^n\psi dv \xrightarrow{n} \int u\psi dv \quad \text{in} \quad \mathbf{L}^1((0,T)\times B_R) \quad \text{pour tout} \quad R,T<\infty$$

La densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbf{C}_c(\mathbb{R}^3)$ pour la topologie de la convergence uniforme nous permet d'étendre la convergence à $\mathbf{C}_c(\mathbb{R}^3)$. En effet, si $\psi\in\mathbf{C}_c(\mathbb{R}^3)$, soit ψ^p une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ qui converge uniformément vers ψ. On a

$$\begin{aligned}
& \|\textstyle\int u^n\psi dv - \int u\psi dv\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)} \\
\leq \quad & \|\textstyle\int u^n(\psi-\psi^p)dv\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)} + \|\int (u^n-u)\psi^p dv\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)} \\
& +\|\textstyle\int u(\psi-\psi^p)dv\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)}
\end{aligned}$$

Les premiers et troisièmes termes sont contrôlés par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en utilisant notamment la borne uniforme de u^n dans $\mathbf{L}^2((0,T)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$), et le deuxième par la convergence déjà établie pour les fonctions tests dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

Enfin, soit $\psi\in\mathbf{C}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\psi(v)|v|^{-2}\to 0$ quand $|v|\to\infty$. Soit $\zeta_M=\zeta(\cdot/M)$ où $\zeta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est à valeurs dans $[0,1]$ et vaut 1 sur la boule unité (et $M>0$). Montrons tout d'abord que

$$\|\int u^n\psi(1-\zeta_M)dv\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0 \quad \text{uniformément en n}$$

On a

$$\begin{aligned}
\|\textstyle\int u^n\psi(1-\zeta_M)dv\|_{\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)} \quad & \leq \quad \textstyle\int_{(0,T)\times B_R\times\mathbb{R}^3} u^n|\psi|\mathbf{1}_{|v|\geq M} \\
& \leq \quad \sup_{|v|\geq M}\frac{|\psi(v)|}{|v|^2}\cdot\textstyle\int_{(0,T)\times B_R\times\mathbb{R}^3} u^n|v|^2\mathbf{1}_{|v|\geq M} \\
& \leq \quad C\sup_{|v|\geq M}\frac{|\psi(v)|}{|v|^2}
\end{aligned}$$

où la constante C ne dépend pas de n d'après (H1), ce qui permet de conclure.

La même majoration est possible avec u à la place de u^n. En écrivant alors $\psi=\psi\zeta_M+\psi(1-\zeta_M)$ et le fait que $\psi\zeta_M\in\mathbf{C}_c(\mathbb{R}^3)$, on en déduit le point (i) du Théorème 7 dans sa généralité.

4.2 Démonstration du point (ii)

En appliquant le point (i) du Théorème 7 successivement à $\psi\equiv 1$, $\psi=v_k$, pour k=1,2,3, on obtient $\rho^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho$ et $j^n \xrightarrow[n\to\infty]{} j$ dans $\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)$ pour tout $R,T<\infty$ donc dans $\mathcal{D}'((0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$. On en déduit directement que les équations (2) et (3) sont vérifiées. Pour l'équation (4), seule la convergence du terme quadratique $(E^n+v\wedge B^n)u^n$ est à démontrer.

Nous allons en fait prouver que pour tout $\phi \in \mathcal{D}((0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} E^n u^n \phi(t,x)\psi(v)dtdxdv \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} Eu\phi(t,x)\psi(v)dtdxdv,$$

$$\int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} (B^n\wedge v)u^n \phi(t,x)\psi(v)dtdxdv \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} B\wedge vu\phi(t,x)\psi(v)dtdxdv,$$

ce qui implique la convergence faible dans $\mathbf{L}^1_{loc}$, donc dans $\mathcal{D}'$, de $(E^n+v\wedge B^n)u^n$ vers $(E+v\wedge B)f$.

Traitons par exemple le cas du champ magnétique. Soit ϕ et ψ fixées, et R, T tels que $\mathrm{Supp}\phi \subset [0,T]\times B_R$. On a

$$\int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} (B^n\wedge v)u^n \phi(t,x)\psi(v)dtdxdv = \int_{(0,T)\times B_R} (B^n\phi)\wedge(\int_{\mathbb{R}^3} u^n v\psi dv)dtdx$$

Sachant que $B^n\phi$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^2((0,T)\times B_R)$ ver $B\phi$, il suffit de montrer que $\int_{\mathbb{R}^3} u^n v\psi dv$ converge fortement dans $\mathbf{L}^2((0,T)\times B_R)$ vers $\int_{\mathbb{R}^3} uv\psi dv$, car on a

$$\left|\int_{(0,T)\times B_R} (B^n\phi)\wedge\left(\int_{\mathbb{R}^3} u^n v\psi dv\right)dtdx - \int_{(0,T)\times B_R} (B\phi)\wedge\left(\int_{\mathbb{R}^3} uv\psi dv\right)dtdx\right|$$

$$\leq \left|\int_{(0,T)\times B_R} ((B^n-B)\phi)\wedge\left(\int_{\mathbb{R}^3} uv\psi dv\right)dtdx\right| + \left|\int_{(0,T)\times B_R} (B^n\phi)\wedge\left(\int_{\mathbb{R}^3} (u^n-u)v\psi dv\right)dtdx\right|$$

$$\leq \left|\int_{(0,T)\times B_R} ((B^n-B)\phi)\wedge\left(\int_{\mathbb{R}^3} uv\psi dv\right)dtdx\right| + \|B^n\phi\|_{\mathbf{L}^2((0,T)\times B_R)}.\left\|\int_{\mathbb{R}^3} (u^n-u)v\psi dv\right\|_{\mathbf{L}^2((0,T)\times B_R)}$$

et $\|B^n\phi\|_{\mathbf{L}^2((0,T)\times B_R)}$ est bornée car $B^n\phi$ converge faiblement.

Le point (i) du Théorème 7 montre que

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^n v\psi dv \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^3} uv\psi dv \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)$$

Montrons que $\left|\int_{\mathbb{R}^3} u^n v\psi dv\right|^2$ est uniformément intégrable dans $\mathbf{L}^1((0,T)\times B_R)$. Ces deux conditions permettront de conclure quant à la convergence forte dans $\mathbf{L}^2((0,T)\times B_R)$ grâce au lemme ci dessous.

On remarque que si $A \subset (0,T)\times B_R$ vérifie $mes(A) < \epsilon\beta$ où $(\epsilon,\ \beta > 0)$, on a, en notant $A_t = \{x \mid (t,x)\in A\}$,

$$mes(\{t \mid mes(A_t) \geq \beta\}) < \alpha$$

Soit donc $\epsilon > 0$ et $\beta > 0$ tel que :

$$\forall B \subset B_R\times\mathrm{Supp}\psi,\ mes(B) < \beta\, mes(\mathrm{Supp}\psi) \implies \int_B (u^n)^2 dxdv < \epsilon \quad (\beta \text{ existe grâce à (H3)})$$

et soit $A \subset (0,T) \times B_R$ tel que $mes(A) < \epsilon\beta$. On a

$$\begin{aligned}\int_A \left|\int_{\mathbb{R}^3} u^n v\psi dv\right|^2 &\leq C \int_A \int_{\mathrm{Supp}\psi} (u^n)^2 dv \\ &= \int_{\{mes(A_t)\geq\beta\}} \int_{A_t} \int_{\mathrm{Supp}\psi} (u^n)^2 dtdxdv + \int_{^c\{mes(A_t)\geq\beta\}} \int_{A_t} \int_{\mathrm{Supp}\psi} (u^n)^2 dtdxdv \\ &\leq \epsilon \sup_n \|u^n\|^2_{\mathbf{L}^\infty((0,T);\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3))} + \epsilon\, T\end{aligned}$$

car $mes(A_t \times \mathrm{Supp}\psi) < \beta\, mes(\mathrm{Supp}\psi)$. D'où l'uniforme intégrabilité de $\{\left|\int_{\mathbb{R}^3} u^n v\psi dv\right|^2\}$.

Lemme 5 : *Soit (E,μ) un espace mesuré de mesure totale finie, et $h_n \in \mathbf{L}^2(E)$ une suite de carré uniformément intégrable. Si $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{L}^1(E)} h$ où $h \in \mathbf{L}^2(E)$, alors $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbf{L}^2(E)} h$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$\forall B \subset E,\ \mu(B) < \delta \implies (\int_B h_n^2 < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \int_B h^2 < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2)$$

D'après le théorème d'Egoroff (rappel ci-dessous), il exste une partie A de E telle que $\mu(A) < \delta$ et h_n converge uniformément vers h sur $E\backslash A$. On a alors,

$$\begin{aligned}\|h_n - h\|_{\mathbf{L}^2(E)} &= \|h_n - h\|_{\mathbf{L}^2(A)} + \|h_n - h\|_{\mathbf{L}^2(E\backslash A)} \\ &\leq \|h\|_{\mathbf{L}^2(A)} + \|h_n\|_{\mathbf{L}^2(A)} + \|h_n - h\|_{\mathbf{L}^\infty(E\backslash A)} \cdot \mu(E\backslash A) \\ &\leq \epsilon + |h_n - h\|_{\mathbf{L}^\infty(E\backslash A)} \cdot \mu(E\backslash A)\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{limsup} \|h_n - h\|_{\mathbf{L}^2(E)} \leq \epsilon$$

□

Théorème 8 (Théorème d'Egoroff) **:** *Soit (E,μ) un espace mesuré de mesure totale finie, et $g_n \in \mathbf{L}^1(E)$ une suite qui vonverge dans $\mathbf{L}^1(E)$. Alors,*

$$\forall\delta > 0, \exists A \subset E \quad \mu(A) < \delta \textit{ et } g_n \textit{ converge uniformément sur } E\backslash A.$$

La stabilité que l'on a démontré est utile dans la preuve de l'existence de solution faible du système de Vlasov-Maxwell. La preuve consiste en effet à construire des solutions approchées vérifiant les hypothèses utilisées dans le théorème de stabilité, et d'utiliser celui-ci pour conclure.

Références

[1] Haïm Brezis : *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Masson, 1992.

[2] Ronald J. DiPerna et Pierre-Louis Lions : Global weak solutions of vlasov-maxwell systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989.

[3] François Golse, Pierre-Louis Lions, Benoît Perthame et Rémi Sentis : Regularity of the moments of the solution of a transport equation. *Journal of Functional Analysis*, 1988.

[4] Laure Saint-Raymond : Analyse fonctionnelle. Polycopié du cours, 2013.