

CALCUL PSEUDO-DIFFÉRENTIEL ET INÉGALITÉS DE GÅRDING

Hugo FEDERICO, Hui ZHU
supervisés par Benjamin Texier
École Normale Supérieure

Résumé

On étudie d'abord les propriétés fondamentales du calcul pseudo-différentiel et les différentes quantifications. On énonce ensuite quelques inégalités du type de Gårding, puis on étudie une preuve utilisant une approximation du flot pseudo-différentiel, donnée par B. Texier.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Calcul Pseudo-Différentiel et Para-Différentiel	2
2.1	Opérateur Pseudo-Différentiel	2
2.1.1	Définition des Opérateur Pseudo-Différentiel	2
2.1.2	Classes de Symboles	3
2.1.3	Formules de Composition, Adjoint et développements Asymptotiques	4
2.2	Théorème de Calderón-Vaillancourt et son Corollaire	5
2.3	Quantification	5
2.3.1	Quantification Semi-Classique	5
2.3.2	Quantification de Weyl	6
2.4	Décomposition de Littlewood-Paley	7
2.5	Calcul Para-différentiel	8
3	Les Inégalités de type Gårding	10
3.1	Énoncés des Inégalités	10
3.2	Lemme d'Approximation du Flot Pseudo-Différentiel en Quantification Semi-Classique	13
3.3	Preuve du Théorème 3.6	15
3.3.1	Réduction	15
3.3.2	Reformulation avec le Flot de a_j^w	16
3.3.3	Approximation du Flot de a_j en Quantification de Weyl	17
3.3.4	Estimations Finales	18
3.4	Quelques Remarques sur la Preuve	20
3.4.1	Réduction de la Dimension	20
3.4.2	Choix de t_*	20

1 Introduction

On définit d'abord en première partie le calcul pseudo-différentiel. Les opérateurs pseudo-différentiels sont une généralisation des opérateurs différentiels, comme on verra dans la section 2.1.1.

La théorie du calcul pseudo-différentiel est initialement développée dans le but d'étudier les singularités des solutions des EDPs ([MA] Section 1.3), et elle est intimement liée au développement de la théorie de L^p -régularité ([KS] Introduction). Cette théorie est de plus un outil essentiel en l'analyse semi-classique car elle relie la mécanique classique et quantique ([MA] Section 1.3), où l'on s'intéresse au comportement de l'équation de Schrödinger ([EL ZM] Section 1.1.1)

$$i\hbar\partial_t u = -\hbar^2\Delta u + Vu, \quad (1.1)$$

et au comportement spectral de l'équation associée aux valeurs propres

$$-\hbar^2\Delta u + Vu = Eu \quad (1.2)$$

lorsque $\hbar \rightarrow 0$.

Une autre motivation vient de l'étude de quantifications, dont le procédé général fut d'abord introduit par Weyl, et qui s'est révélé plus tard être liée au calcul symbolique initié par Kohn et Nirenberg, qui à un opérateur d'intégration singulière associe un symbole, de telle sorte que le produit des symboles correspond à la composition des opérateurs ([FG] Chapitre 2).

La deuxième partie traite des inégalités de type de Gårding. L'inégalité de Gårding fut initialement prouvée par L. Gårding dans sa thèse "Dirichlet's Problem For Linear Partial Differential Equations" ([GL] Page 64), mais seulement pour un opérateur L différentiel. On les étudiera dans la section 3.1, avec d'autres inégalités du même type, en généralisant aux opérateurs pseudo-différentiel.

2 Calcul Pseudo-Différentiel et Para-Différentiel

2.1 Opérateur Pseudo-Différentiel

2.1.1 Définition des Opérateur Pseudo-Différentiel

Sur \mathbb{R}^d , un opérateur différentiel est un opérateur de la forme :

$$a(x, D_x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

où $D_x = -i\partial_x$. On a donc, sous certaines conditions sur $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$:

$$(a(x, D)u)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi,$$

en posant $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ le *symbole* de a .

Ainsi, à une fonction $a(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} (qu'on appellera alors *symbole*) on associe naturellement un opérateur $\text{op}(a)$, dit opérateur *pseudo-différentiel*, par :

$$(\text{op}(a)u)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi \quad (2.1.1)$$

pour u dans un certain espace de fonctions sur \mathbb{R}^d (typiquement $L^2(\mathbb{R}^d)$).

Une question naturelle est de savoir quel est le lien entre la composition des opérateurs, l'adjoint d'un opérateur, etc. et le calcul des symboles de ces opérateurs.

Par exemple, si a ne dépend que de ξ , on dira que $\text{op}(a)$ est un multiplicateur de Fourier, et on notera $a(D) = \text{op}(a)$. Dans ce cas, pour deux multiplicateurs de Fourier, on voit facilement que $\text{op}(a) \circ \text{op}(b) = \text{op}(ab)$, et $\text{op}(a)^* = \text{op}(\bar{a})$.

Un exemple un peu plus compliqué est celui des opérateurs différentiels. Dans ce cas, la composition $\text{op}(a\sharp b)$ de $\text{op}(a)$ et $\text{op}(b)$ peut être calculée directement par la formule de Leibniz donnée par la somme finie

$$a\sharp b = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} a D_x^{\alpha} b. \quad (2.1.2)$$

L'adjoint L^2 est donné par

$$\text{op}(a)^* = \left(\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D_x^{\alpha} \right)^* = \sum_{\alpha} D_x^{\alpha} \bar{a}_{\alpha}(x) = \text{op}(a^*), \quad (2.1.3)$$

où a^* est défini par la somme finie

$$a^* = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\alpha} \bar{a}.$$

Enfin, si $a(x, \xi)$ est un polynôme de degré m tel que $|a_{\alpha}| \in L^{\infty}$ pour tout α , on a pour tout $u \in H^k, \mathbb{N} \ni k \geq m$

$$|\text{op}(a)u|_{H^{k-m}} \lesssim \max_{\alpha} |a_{\alpha}|_{L^{\infty}} |u|_{H^k}. \quad (2.1.4)$$

2.1.2 Classes de Symboles

Ce qui a été dit ci-dessus sur les opérateurs différentiels peut être généralisé : une bonne classe de symboles est donnée par les symboles dont le comportement à l'infini est similaire à celui des polynômes, d'où la définition suivante.

Définition 2.1. *Si $m \in \mathbb{R}$, on dit que $a \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ est un symbole classique d'ordre m si pour tous multi-indices α, β , $\langle \xi \rangle^{|\beta|-m} \partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a \in L^{\infty}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, où $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$. On note $S_{1,0}^m$ la classe des symboles classiques d'ordre m*

Posons, pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$

$$M_{k,k'}^m(a) = \sup_{\substack{(x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \\ |\alpha| \leq k, |\beta| \leq k'}} \langle \xi \rangle^{|\beta|-m} |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a(x, \xi)|. \quad (2.1.5)$$

Alors les $M_{k,k'}^m(a)$ sont des normes telles que $a \in S_{1,0}^m$ si et seulement si $M_{k,k'}^m(a) < \infty$ pour tout $k, k' \in \mathbb{N}$, qui confèrent à $S_{1,0}^m$ une structure d'espace de Fréchet ([HL] Page 65). Pour la suite, on définit pour $a \in S_{1,0}^m$ les normes

$$\|a\|_r = \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta| \leq r+2(\lfloor d/2 \rfloor + 1) \\ (x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d}} \langle \xi \rangle^{|\beta|-m} |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a(x, \xi)|. \quad (2.1.6)$$

On a les deux propriétés fondamentales : pour tous indices α, β et tous $m, n \in \mathbb{R}$ les applications

$$\begin{aligned} S_{1,0}^m &\rightarrow S_{1,0}^{m-|\beta|} \quad a \mapsto \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a, \\ S_{1,0}^m \times S_{1,0}^n &\rightarrow S_{1,0}^{m+n} \quad (a, b) \mapsto ab \end{aligned}$$

sont bien définies et continues ([HL] Page 66 (18.1.2)).

On peut définir d'autres classes de symboles :

Définition 2.2. Si $m, \rho, \delta \in \mathbb{R}, \rho > 0, \delta > 0$, on dit que $a \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ est un symbole dans $S_{\rho,\delta}^m$ si pour tous multi-indices α, β , on ait $\langle \xi \rangle^{\rho|\beta| - \delta|\alpha| - m} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

Mais aussi des classes de symboles moins réguliers :

Définition 2.3. Pour $m \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note Γ_k^m l'ensemble des symboles a sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tels que pour toute indice β et $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\partial_\xi^\beta a(\cdot, \xi) \in W^{k,\infty}$, et tel qu'il existe $C_\beta > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $|\partial_\xi^\beta a(\cdot, \xi)|_{W^{k,\infty}} \leq C_\beta \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}$.

2.1.3 Formules de Composition, Adjoint et développements Asymptotiques

On va maintenant énoncer les formules de composition, d'adjoint et d'expansion asymptotique pour des symboles dans $S_{1,0}^m$.

On peut calculer explicitement le symbole $a\sharp b$ pour qu'on ait

$$\text{op}(a) \circ \text{op}(b) = \text{op}(a\sharp b), \quad (2.1.7)$$

$$a\sharp b(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{i(x-y) \cdot (\eta - \xi)} a(x, \eta) b(y, \xi) dy d\eta. \quad (2.1.8)$$

On a par ailleurs l'expansion asymptotique ([HL] Théorème 18.1.8)

$$a\sharp b \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a D_x^\alpha b, \quad (2.1.9)$$

dans le sens où

$$a\sharp b - \sum_{|\alpha| < k} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a D_x^\alpha b \in S^{m-k}. \quad (2.1.10)$$

Calculons ensuite l'adjoint au sens de L^2 . Pour que

$$\text{op}(a)^* = \text{op}(a^*), \quad (2.1.11)$$

on doit avoir

$$a^*(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{-iy \cdot \eta} \bar{a}(x - y, \xi - \eta) \quad (2.1.12)$$

qui est dans $S_{1,0}^m$ si a l'est. De même on a l'expansion asymptotique ([HL] Théorème 18.1.7)

$$a^* \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{a}, \quad (2.1.13)$$

dans le sens où

$$a^* - \sum_{|\alpha| < k} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{a} \in S_{1,0}^{m-k}. \quad (2.1.14)$$

On énoncera plus tard des résultats permettant d'estimer les normes des termes restants dans ces développements par les dérivées des symboles.

2.2 Théorème de Calderón-Vaillancourt et son Corollaire

On a besoin de propriétés similaires à (2.1.4) pour des symboles assez généraux, qui nous sont données par le théorème de Calderón-Vaillancourt ([HI] Théorème 2).

Théorème 2.4 (Calderón-Vaillancourt). *Soit a un symbole tel que pour tous $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^d$, on ait $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in L^\infty$. Alors $\text{op}(a)$ est borné de $L^2 \rightarrow L^2$ et il existe $C(d) > 0$ telle que*

$$\|\text{op}(a)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C(d) \sup_{\alpha, \beta \in \{0, 1\}^d} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)|_{L^\infty}$$

En utilisant les opérateurs isométriques entre les espaces de Sobolev $H^m \rightarrow H^{s+m}$ Γ^s donnés par $\Gamma = \text{op}(\langle \cdot \rangle)$, on voit que pour $a \in S_{1,0}^m$, $\text{op}(a)$ est borné $H^{s+m} \rightarrow H^s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Soit $a \in S_{1,0}^m$, alors*

$$\|\text{op}(a)\|_{H^m \rightarrow L^2} \lesssim M_{d,d}^m(a).$$

2.3 Quantification

On appelle quantification le fait d'associer une fonction (symbole) à un opérateur (on ne parlera pas en détail des concepts physiques qui ont menés à l'expression "quantification"). La quantification qu'on a déjà présentée est dite classique, mais on sera amenés à en utiliser des différentes dans la suite.

Les résultats suivants peuvent se trouver dans [TB2] Section 5, et [LN] Section 2.1.5.

2.3.1 Quantification Semi-Classique

À un symbole a on associe une famille $(\text{op}_\varepsilon(a))_{0 < \varepsilon < 1}$ d'opérateurs définis par :

$$(\text{op}_\varepsilon(a)u)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} a(x, \varepsilon \xi) \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (2.3.1)$$

Ici ε représente en fait la constante de Planck \hbar : cette quantification permet d'étudier le comportement physique lorsque \hbar tend vers zero, comme on l'a dit dans l'introduction.

Définissons les normes semi-classique de Sobolev $\|\cdot\|_{\varepsilon, s}$ par

$$\|u\|_{\varepsilon, s} = |(1 + |\varepsilon \xi|^2)^{s/2} \hat{u}|_{L^2},$$

La version semi-classique du théorème de Calderón-Vaillancourt nous donne :

Théorème 2.6. *Si $a \in S_{1,0}^m$, alors $\text{op}_\varepsilon(a)$ est un opérateur linéaire borné de $H^m \rightarrow L^2$ et de $H^{s+m} \rightarrow H^s$, tel que*

$$|\text{op}_\varepsilon(a)u|_{L^2} \lesssim \|a\|_0 \|u\|_{\varepsilon,m}, \quad (2.3.2)$$

$$\|\text{op}_\varepsilon(a)u\|_{\varepsilon,s} \lesssim (\|a\|_0 + \varepsilon \|a\|_{C(d)}) \|u\|_{\varepsilon,s+m} \quad (2.3.3)$$

où la constante dépend seulement de d, s .

On dispose aussi d'une formule de composition, donnée par l'expansion asymptotique suivante :

Théorème 2.7. *Soit $a \in S_{1,0}^m, b \in S_{1,0}^n$, et $r \in \mathbb{N}$, alors on a*

$$\text{op}_\varepsilon(a) \circ \text{op}_\varepsilon(b) = \sum_{0 \leq q < r} \varepsilon^q \text{op}_\varepsilon(a \#_q b) + \varepsilon^r \text{op}_\varepsilon(R_r(a, b)) \quad (2.3.4)$$

où le reste $R_r(a, b) \in S_{1,0}^{m+n-r}$ vérifie

$$|\text{op}_\varepsilon(R_r(a, b))u|_{L^2} \lesssim \|a\|_{r+C(d)} \|b\|_{r+C(d)} \|u\|_{\varepsilon, n+m-r}. \quad (2.3.5)$$

2.3.2 Quantification de Weyl

Le principe de la quantification de Weyl est d'associer à un symbole a l'opérateur a^w défini par :

$$(a^w u)(x) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{i(x-y) \cdot \xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi. \quad (2.3.6)$$

L'avantage de la quantification de Weyl est que qu'il est facile de calculer l'adjoint dans L^2 de l'opérateur associé à un symbole a . En effet on a ([LN] Remarque 1.1.11)

$$(a^w)^* = \bar{a}^w. \quad (2.3.7)$$

Ainsi a^w est auto-adjoint si a est réel.

Le théorème de Calderón-Vaillancourt et les formules de composition s'étendent aussi à la quantification de Weyl ([BA]).

Théorème 2.8. *Soit $a \in S_{1,0}^m$, alors a^w est un opérateur borné de $H^m \rightarrow L^2$ et de $H^{s+m} \rightarrow H^s$ et on a*

$$|a^w u|_{L^2} \lesssim \|a\|_0 \|u\|_{L^2}, \quad (2.3.8)$$

$$|a^w u|_{H^s} \lesssim \|a\|_{C(d)} \|u\|_{H^{s+m}} \quad (2.3.9)$$

où la constante dépend seulement de d, s .

Théorème 2.9. *Soient $a \in S_{1,0}^m, b \in S_{1,0}^n$. Alors en posant*

$$a \diamond_k b = (-i)^k \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha! \beta!} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha b, \quad (2.3.10)$$

on a, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$a^w \circ b^w = \sum_{0 \leq k < r} (a \diamond_k b)^w + R_r^w(a, b), \quad (2.3.11)$$

où $R_r(a, b) \in S_{1,0}^{m+n-r}$ vérifie

$$|R_r(a, b)^w u|_{L^2} \lesssim \|a\|_{r+C(d)} \|b\|_{r+C(d)} \|u\|_{H^{n+m-r}}. \quad (2.3.12)$$

Pour une étude approfondie de la quantification de Weyl, voir [HL] 18.5.

2.4 Décomposition de Littlewood-Paley

La loi de composition naturelle entre les symboles étant la multiplication dans l'espace des fréquences, on va donc travailler dans cet espace pour simplifier. La décomposition de Littlewood-Paley est alors une technique très utile pour étudier les symboles dans l'espace des fréquences.

L'idée de Littlewood-Paley est de décomposer la fréquence de manière dyadique, puis d'étudier séparément le symbole dans chaque intervalle de fréquence, c'est à dire qu'on étudie le symbole localement dans l'espace des fréquences, puis obtient à partir de cela des informations globales sur le symbole, comme si on utilisait une partition de l'unité sur une variétés différentielles.

On va maintenant définir rigoureusement cette décomposition et étudier ses propriétés fondamentales.

Soit $\phi_0 \in C_c^\infty$ où $0 \leq \phi_0$ et des réels $0 < A < B < 2A$ tels que $\phi_0 \equiv 1$ pour $|\xi| \leq A$ et $\phi_0 \equiv 0$ pour $|\xi| \geq B$. On pose

$$\phi_j(\xi) = \phi_0(2^{-j}\xi) - \phi_0(2^{-(j-1)}\xi), \quad j \geq 1. \quad (2.4.1)$$

Donc

$$\text{supp } \phi_j \subset \mathcal{C}_j = \{A2^{j-1} \leq |\xi| \leq B2^j\},$$

et ϕ_j est identiquement égale à 1 dans

$$\tilde{\mathcal{C}}_j = \{B2^{j-1} \leq |\xi| \leq A2^j\}.$$

On a directement l'égalité suivante :

$$\sum_{j \geq 0} \phi_j \equiv 1$$

où la somme est localement finie.

Une question naturelle est de savoir si cette partition de l'unité dans l'espace des fréquences induit une partition de l'unité pour la variable spatiale. La réponse est oui, d'après le lemme suivant.

Lemme 2.10. *On a l'égalité dans \mathcal{S}' ,*

$$\sum_{j \geq 0} \phi_j(D) = \text{Id}. \quad (2.4.2)$$

Les opérateurs $\{\phi_j(D)\}_j$ sont de plus bornés uniformément dans $\mathcal{L}(L^p)$:

Lemme 2.11. *Il existe $C(\phi_0)$ ne dépendant que de ϕ_0 , telle que pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $j \geq 0$ on a*

$$\|\phi_j(D)\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq C(\phi_0). \quad (2.4.3)$$

Les lemmes suivants sont remarquables, puisqu'ils donnent une caractérisation des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ par la décomposition de Littlewood-Paley. Par définition, l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des éléments de \mathcal{S}' tels que

$$|u|_{H^s} = |\langle \xi \rangle^s \hat{u}|_{L^2} < \infty.$$

Il est normal d'estimer $\langle \xi \rangle^s \hat{u}$ comme $2^{js} \hat{u}$ sur le domaine de fréquence C_j , d'où le lemme suivant :

Lemme 2.12. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $u \in \mathcal{S}'$, on a l'équivalence*

$$u \in H^s \Leftrightarrow \forall k \phi_k(D)u \in L^2, \left(2^{ks} |\phi_k(D)u|_{L^2}\right)_k \in l^2.$$

De plus, la norme $\sum_{k \geq 0} 2^{2ks} |\phi_k(D) \cdot|$ est équivalente à $|\cdot|_{H^s}$.

On peut se poser la même question pour des séries de fonctions : si les fonctions sont localisées en fréquence, est-ce que la somme est dans H^s ?

Lemme 2.13. *Soit $s \in \mathbb{R}$, $(u_k)_{k \geq 1} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ et $0 < r < R$ tels que*

$$\text{supp } \hat{u}_k \subset \{2^k r \leq |\xi| \leq 2^k R\}, \left(2^{ks} |u_k|_{L^2}\right)_{k \geq 1} \in l^2,$$

alors

$$u = \sum_k u_k \in H^s,$$

et pour une certaine constante qui ne dépend que de r, R, d, s ,

$$|u|_{H^s}^2 \lesssim \sum_{k \geq 1} 2^{ks} |u_k|_{L^2}^2.$$

2.5 Calcul Para-différentiel

Tous ce qui suit peut se trouver dans [TB1].

On en vient parfois à étudier des symboles moins réguliers comme ceux de Γ_k^m . La question est de savoir si les symboles de Γ_k^m possèdent des propriétés similaires à celles des symboles de $S_{1,0}^m$.

La formule de composition pour $a \sharp b$, où $a \in S^m, b \in S^n$ s'étend exactement de la même manière à $a \in \Gamma_r^m, b \in \Gamma_r^n$ avec $a \sharp b \in \Gamma_r^{m+n}$, si on rajoute une condition sur les supports de a et b , dite condition spectrale.

La difficulté est d'estimer les normes des opérateurs correspondants entre espaces de Sobolev. Une technique efficace consiste à utiliser le calcul para-différentiel. Le principe du calcul para-différentiel est d'associer à $a \in \Gamma_k^m$ le symbole

$$\text{op}^\psi(a) := \text{op}(a^\psi) \quad (2.5.1)$$

où a^ψ est une régularisation de a par rapport à une fonction de troncature admissible, qu'on appelle symbole para-différentiel. On majore ensuite a^ψ et $a - a^\psi$ pour obtenir les estimations voulues.

Définition 2.14. Une fonction lisse $\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de troncature admissible si elle satisfait

$$\psi(\eta, \xi) \equiv \begin{cases} 1, & |\eta| \leq \delta_1 \langle \xi \rangle, \\ 0, & |\eta| \geq \delta_2 \langle \xi \rangle, \end{cases}$$

pour un certain (δ_1, δ_2) tel que $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \exists C_{\alpha\beta} > 0$ tel que

$$|\partial_\eta^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\eta, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha| - |\beta|}.$$

Définition 2.15. Soit ψ une fonction de troncature admissible et $a \in \Gamma_k^m$, le symbole para-différentiel associé à a est le symbole

$$a^\psi(x, \xi) := \mathcal{F}^{-1}(\psi(\cdot, \xi) \hat{a}(\cdot, \xi))(x) = ((\mathcal{F}^{-1}\psi(\cdot, \xi)) * a(\cdot, \xi))(x). \quad (2.5.2)$$

Le calcul para-différentiel possède deux avantages. Tout d'abord, la définition donne directement que le symbole a^ψ est régulier. La second avantage est que a^ψ satisfait la condition spectrale (défini ci-dessous). L'importance de la condition spectrale est qu'en général, a^ψ n'appartient pas à $S_{1,0}^m$ mais seulement à $\Gamma_k^m \subset S_{1,1}^m$, donc on ne peut pas utiliser les résultats dont on dispose sur $S_{1,0}^m$, mais elle permet une estimation de la norme d'opérateur de $op(a)$ par le théorème 2.17

Définition 2.16. On dit qu'un symbole a satisfait la condition spectrale si pour un certain $\delta \in (0, 1)$

$$\text{supp } \hat{a} \subset \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, |\eta| < \delta \langle \xi \rangle\} \quad (2.5.3)$$

où \hat{a} est la transformée de Fourier de a par rapport à sa première variable.

Théorème 2.17. Soit a un symbole satisfaisant la condition spectrale et $M_{0,d}^m(a) < \infty$, alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe $C > 0$ ne dépendant pas de a , tel que

$$\|op(a)\|_{H^{s+m} \rightarrow H^s} \leq CM_{0,d}^m(a). \quad (2.5.4)$$

On a maintenant besoin d'une estimation des dérivées de a^ψ par les dérivées de a .

Lemme 2.18. Soit $a \in \Gamma_k^m$, alors $a^\psi \in \Gamma_k^m \cap C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ satisfait la condition spectrale, et on a la majoration $M_{k,k'}^m(a^\psi) \leq CM_{k,k'}^m(a)$ où la constante C ne dépend que de k, k', d, ψ .

Le théorème suivant est alors une conséquence directe du théorème et du lemme ci-dessus.

Théorème 2.19. Pour tous $m, s \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, il existe $C = C(m, k, s) > 0$ tel que pour tout $a \in \Gamma_k^m$, on a

$$\|op^\psi(a)\|_{H^{s+m} \rightarrow H^s} \leq CM_{0,d}^m. \quad (2.5.5)$$

Il est important de remarquer que la condition spectrale nous permet d'obtenir une majoration ne faisant intervenir aucune dérivées de a en x . Sinon, on aurait seulement la majoration $\|op(a)\|_{H^{s+m} \rightarrow H^s} \leq CM_{d,d}^m$

Les résultats précédents nous donnent une estimation de a^ψ , il faut maintenant faire de même avec $a - a^\psi$ et $a^\psi - a^\phi$ où ϕ et ψ sont deux troncatures admissibles (on a en fait besoin que les constantes définies dans la condition spectrale soient assez petites pour que la composition soit bien définie comme ci-dessus) :

Théorème 2.20. Soit $a \in \Gamma_k^m$ et ψ, ϕ deux fonctions de troncature admissible, alors $a - a^\psi, a^\psi - a^\phi \in \Gamma_k^m$, et on a les majorations des dérivées,

$$M_{0,k}^{m-r}(a - a^\psi) \lesssim M_{0,k}^m(\partial_x^r a), \quad (2.5.6)$$

$$M_{0,k}^{m-r}(a^\psi - a^\phi) \lesssim M_{0,k}^m(\partial_x^r a). \quad (2.5.7)$$

Si on prend pour fonction de troncature ψ définie par :

$$\psi(\eta, \xi) = \sum_{k \geq 0} \phi_0(2^{-k+N}\eta)\phi_k(\xi) \quad (2.5.8)$$

pour N assez grand, où ϕ_0, ϕ_k forment une décomposition de Littlewood-Paley, alors on a les majorations du reste $R(a, u) := (a - \text{op}^\psi(a))u$. suivantes :

Théorème 2.21. Soit $r \in \mathbb{N}, s \geq r$ et $a \in H^s$, alors pour un certain $C > 0$ ne dépendant pas de a , pour tout $u \in L^\infty$,

$$|R(a, u)|_{H^s} \leq C|\partial_x^r a|_{H^{s-r}}|u|_{L^\infty}. \quad (2.5.9)$$

Théorème 2.22. Si $a \in W^{r,\infty}$, alors pour un certain $C > 0$ ne dépendant pas de a , pour tout $u \in L^2$,

$$|R(a, u)|_{H^r} \leq C|a|_{W^{r,\infty}}|u|_{L^2}. \quad (2.5.10)$$

Les résultats ci-dessus nous permettent d'étudier la composition de symboles dans Γ_r^m . On obtient une expansion asymptotique similaire à celle de la composition de deux symboles de $S_{0,1}^m$. On pose, pour $a \in \Gamma_r^m$ et $b \in \Gamma_r^n$,

$$a\sharp_r b = \sum_{|a| < r} \frac{(-i)^{|a|}}{a!} \partial_\xi^a a \partial_x^a b. \quad (2.5.11)$$

On a alors :

Théorème 2.23. Pour $m, n, s \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}^*$, et pour tous $a \in \Gamma_r^m$ et $b \in \Gamma_r^n$, l'opérateur

$$\text{op}^\psi(a)\text{op}^\psi(b) - \text{op}^\psi(a\sharp_r b)$$

est borné de $H^{s+m+n-r}$ à H^s , et sa norme est inférieure à

$$C(m, n, s, r)(M_{0,r+2d+1}^m(a)M_{0,d}^n(\partial_x^r b) + M_{0,r+d-1}^m(\partial_x^r a)M_{0,d}^n(b)).$$

Par ailleurs, $\text{op}^\psi(a)\text{op}^\psi(b)$ est un opérateur d'ordre $m+n$, et si on l'approxime par l'expansion asymptotique à l'ordre r , le reste est d'ordre $m+n-r$

3 Les Inégalités de type Gårding

3.1 Énoncés des Inégalités

Il est naturel de se demander si l'opérateur associé à un symbole positif est un opérateur positive (en quantification classique, semi-classique, de Weyl, etc).

Ce n'est en général pas vrai, bien que cela soit vérifié pour la quantification de Wick ($a \geq 0$ implique $a^{Wick} \geq 0$), dont on parlera pas ici. Mais les inégalités de Gårding nous donnent cependant des minoration similaires.

Comme on l'a dit précédemment, la première inégalité de Gårding fut prouvée par Gårding dans [GL], où il considère un opérateur homogène de degré pair $2m$, défini sur un domaine ouvert borné Ω de \mathbb{R}^d sous une forme de divergence par

$$Lu = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (A_{\alpha\beta} \partial^\beta u), \quad (3.1.1)$$

Le résultat suivant reste par ailleurs vrai si L admet des termes d'ordre plus petit grâce au lemme de Poincaré puisque Ω est borné. Les $A_{\alpha\beta}$ sont des fonctions réelles, bornées et continues sur $\bar{\Omega}$, vérifiant une condition d'uniforme ellipticité, c'est à dire qu'il existe une constante $\theta > 0$ telle que

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \xi^\alpha A_{\alpha\beta}(x) \xi^\beta \geq \theta |\xi|^{2m} \quad (3.1.2)$$

pour tout $x \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$ (typiquement pour $T = -\Delta$). On a alors l'inégalité de Gårding suivante ([GL] Page 64)

Théorème 3.1. *Soient Ω et L définis comme précédemment, où L est uniformément elliptique, alors on a pour un certain $C > 0, C' \geq 0$ et pour tout $u \in H^m(\Omega)$*

$$B[u, u] + C'|u|_{L^2(\Omega)}^2 \geq C|u|_{H^m(\Omega), \mathbb{R}}^2, \quad (3.1.3)$$

où la forme bilinéaire B est définie par

$$B[u, v] = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_{\Omega} A_{\alpha\beta}(x) \partial^\alpha u(x) \partial^\beta v(x) dx. \quad (3.1.4)$$

On dispose d'un résultat similaire ([AS GP] I.5.3 Propriété 5.3) utilisant la langage du calcul pseudo-différentiel :

Théorème 3.2. *Soit $a \in S_{1,0}^{2m}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, tel qu'il existe $R \geq 0, c > 0$ tel que pour tout $|\xi| \geq R$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a $\operatorname{Re} a(x, \xi) \geq c \langle \xi \rangle^m$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $C_N \geq 0$ tel que pour tout $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$,*

$$\operatorname{Re} \langle \operatorname{op}(a)u, u \rangle + C_N |u|_{H^{-N}}^2 \geq \frac{c}{2} |u|_{H^m}^2. \quad (3.1.5)$$

Ici, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans L^2 , notation qu'on conservera dans la suite. La condition que le symbole a satisfait dans le théorème s'appelle aussi ellipticité, une analogie de l'ellipticité pour les opérateurs différentiels.

Dans le livre de Guy Métivier [MG], on trouve aussi une version similaire pour les symboles Γ_k^m .

Théorème 3.3 (L'Inégalité de Gårding Faible). *Soit a un symbole de Γ_1^m à valeurs dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, satisfaisant pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$*

$$\operatorname{Re} a(x, \xi) \geq c \langle \xi \rangle^m \operatorname{Id} \quad (3.1.6)$$

pour un certain $c > 0$, alors on a pour tout $u \in H^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$

$$\operatorname{Re} \langle \operatorname{op}^\psi(a)u, u \rangle + C_0 \|u\|_{H^{\frac{m-1}{2}}}^2 \geq C_1 \|u\|_{\frac{m}{2}}^2, \quad (3.1.7)$$

où ψ est une fonction troncature admissible et les constantes C_0, C_1 ne dépendent que de ψ, a, m, d, N .

L'idée de la preuve de ce théorème consiste à écrire

$$\operatorname{op}^\psi(\operatorname{Re} a) = \operatorname{op}^\psi(b)^* \circ \operatorname{op}^\psi(b) + r$$

où

$$b = (\operatorname{Re} a)^{1/2}$$

et r est un symbole d'ordre $m - 1$. Pour plus de détails, voir [MG] Théorème 6.3.4.

La version standard de l'inégalité de Gårding est énoncée dans le théorème suivant.

Théorème 3.4 (L'Inégalité de Gårding Précisée). *Soit $a \in S_{1,0}^m$ un symbole positif, à valeurs dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ (ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$), alors il existe une constante C tel que pour tout $u \in H^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$, on ait l'inégalité*

$$\operatorname{Re} \langle \operatorname{op}(a)u, u \rangle + C \|u\|_{\frac{m-1}{2}}^2 \geq 0. \quad (3.1.8)$$

Cette inégalité est encore vraie si a est une matrice et u est un vecteur, en fait on a une version plus générale de ce théorème où a est un symbole à valeur dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ l'espace des opérateurs linaires borné d'un espace de Hilbert \mathbb{H} et $u \in H^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{H})$, ce qui est expliqué dans le livre de Lerner.

En dimension un l'inégalité de Fefferman-Phong est un raffinement de l'inégalité de Gårding .

Théorème 3.5 (L'Inégalité de Fefferman-Phong). *Soit $a \in S_{1,0}^m$ un symbole positif, à valeurs dans \mathbb{C} (ou \mathbb{R}), alors il existe une constante C tel que pour tout $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$, on ait l'inégalité*

$$\operatorname{Re} \langle \operatorname{op}(a)u, u \rangle + C \|u\|_{\frac{m-2}{2}}^2 \geq 0. \quad (3.1.9)$$

Les deux inégalités ci-dessus ont été énoncées pour la quantification classique, mais elles sont encore vraies pour la quantification de Weyl. Il suffit en fait de les montrer pour a^w .

Les preuves de l'inégalité de Gårding précisée et de Fefferman-Phong peuvent se trouver dans le livre de Lerner ([LN] Théorème 1.1.26, (2.5.11), Théorème 2.5.5, Théorème 2.5.10, Remarque 2.5.13), où la quantification de Wick est utilisée pour obtenir un résultat plus général.

Dans la section suivante, on va présenter une preuve du résultat partiel de l'inégalité de Gårding par approximation du flot de pseudo-différentiel, qu'on peut trouver dans [TB2] (Théorème 4.1).

Théorème 3.6. *Soit $a \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ à valeurs dans \mathbb{C} tel que $\operatorname{Re} a \geq 0$, alors pour tout $0 < \theta < 1$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$, on ait*

$$\operatorname{Re} \langle \operatorname{op}(a)u, u \rangle + C \|u\|_{H^{\frac{m-\theta}{2}}}^2 \geq 0.$$

Ce théorème est un résultat partiel de l'inégalité de Gårding parce qu'on a besoin dans la preuve d'avoir $\theta < 1$ pour obtenir une décroissance exponentielle, mais l'inégalité de Gårding est encore vraie pour $\theta = 1$.

De plus a doit être ici un symbole scalaire, mais pour l'inégalité de Gårding générale, a peut être un symbole à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{H})$, où \mathbb{H} est un espace de Hilbert de dimension quelconque. Cette restriction sur la dimension vient de l'utilisation du lemme (3.12), dont la preuve ne marche que pour un symbole scalaire.

3.2 Lemme d'Approximation du Flot Pseudo-Différentiel en Quantification Semi-Classique

On va d'abord énoncer et prouver des lemmes qui jouent un rôle très important dans la preuve du théorème (3.6). Soit $M(t)$ une famille C^∞ et bornée de matrices de symboles de $S_{1,0}^0$, à valeurs dans $\mathbb{C}^{N \times N}$. On considère l'équation différentielle ordinaire associée

$$\begin{cases} \partial_t u = \text{op}_\varepsilon(M)u + f, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où $u_0 \in H^s$ et $f \in C^0([0, T]|\ln \varepsilon|, H^s(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N))$.

On veut approximer la solution de l'équation par $\text{op}_\varepsilon(S_0(0, t))$ (approximation d'ordre 0) lorsque t est petit, où $S_0(\tau; t)$ sont une famille de solutions de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \partial_t S_0(\tau; t) = M(t)S_0(\tau, t), \\ S_0(\tau, \tau) \equiv \text{Id}. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

On voit par la formule de composition de quantification semi-classique (Théorème 2.7) que

$$\partial_t \text{op}_\varepsilon(S_0) = \text{op}_\varepsilon(MS_0) = \text{op}_\varepsilon(M) \circ \text{op}_\varepsilon(S_0) - \varepsilon \text{op}_\varepsilon(M\sharp_1 S) - \varepsilon^2(\dots) \quad (3.2.3)$$

ce qui nous amène à considérer le correcteur d'ordre 1 défini par

$$\begin{cases} \partial_t S_1 = MS_1 + M\sharp_1 S, \\ S_1(\tau, \tau) \equiv 0, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

et nous donne

$$\partial_t \text{op}_\varepsilon(S_1 + \varepsilon S_1) = \text{op}_\varepsilon(M) \circ \text{op}_\varepsilon(S_0 + \varepsilon S_1) - \varepsilon^2(\dots), \quad (3.2.5)$$

ce qui est une meilleure approximation. On définit ainsi par récurrence le correcteur d'ordre q comme solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t S_q = MS_q + \sum_{\substack{q_1+q_2=q \\ q_1>0}} M\sharp_{q_1} S_{q_2}, \\ S_1(\tau, \tau) \equiv 0. \end{cases} \quad (3.2.6)$$

On montre par récurrence sur $|\alpha| + |\beta|$ (on n'intègre pas directement (3.2.2), mais on utilise la première égalité suivante pour que l'ordre de la dérivée à droite soit strictement

plus petit que l'ordre des dérivées à gauche, et donc on peut utiliser une récurrence) en utilisant les deux équations suivantes séparément,

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_0(\tau; t) &= \int_\tau^t S_0(t'; t) [\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta, M(t')] S_0(\tau; t') dt', \\ S_q(\tau; t) &= \int_\tau^t S(s; t) \sum_{\substack{q_1+q_2=q \\ q_1>0}} M \#_{q_1} S_{q_2}(\tau; s) ds\end{aligned}$$

qu'on a les majorations des dérivées

$$\langle \xi \rangle^{q+|\beta|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_q(\tau; t)| \lesssim |\ln \varepsilon|^* e^{\gamma(t-\tau)} \quad (3.2.7)$$

où $*$ est un entier dépendant de α positive et $\gamma = |M|_{\mathcal{L}^\infty}$.

On pose

$$\Sigma_{q_0} = \sum_{1 \leq q \leq q_0} \varepsilon^q S_q, \quad (3.2.8)$$

qui est l'opérateur d'approximation à l'ordre q_0 . Le lemme suivant qui nous dit que Σ_{q_0} est vraiment un opérateur d'approximation.

Lemme 3.7 (Lemme d'Approximation).

$$\partial_t \text{op}_\varepsilon(\Sigma_{q_0}) = \text{op}_\varepsilon(M) \circ \text{op}_\varepsilon(\Sigma_{q_0}) + \varepsilon \text{op}_\varepsilon(\rho) \quad (3.2.9)$$

où ρ est un symbole tel que

$$|\text{op}_\varepsilon(\rho(\tau; t))u|_{L^2} \lesssim |\ln \varepsilon|^{N^*} \|u\|_{\varepsilon, -q_0-1} \quad (3.2.10)$$

pour un certain entier N^* qui ne dépend que de q_0, N, d , et pour tout $u \in H^{-q_0-1}(\mathbb{R}^d)$, uniformément pour $0 \leq \tau \leq t \leq T |\ln \varepsilon|$.

Démonstration. D'après les résultats qu'on a énoncés précédemment sur la quantification semi-classique (Théorème 2.7), on a pour tout $q \geq 0$,

$$\varepsilon^q \text{op}_\varepsilon(M) \circ \text{op}_\varepsilon(S_q) = \varepsilon^q \text{op}_\varepsilon(M S_q) + \sum_{1 \leq q_1 \leq q_0 - q} \varepsilon^{q+q_1} \text{op}_\varepsilon(M \#_{q_1} S_q) + \varepsilon^{q_0+1} \varepsilon(\rho_q)$$

avec $\rho_q = R_{q_0-q+1}(M, S_q)$, et

$$\varepsilon^{q_0+1} |\text{op}_\varepsilon(\rho_q(\tau; t))u|_{L^2} \lesssim \varepsilon^{q_0+1} |\ln \varepsilon|^* e^{\gamma(t-\tau)} \|u\|_{\varepsilon, -q_0-1}$$

pour tout $u \in H^{-q_0-1}$ et uniformément pour $0 \leq \tau \leq t \leq T |\ln \varepsilon|$.

En sommant sur q , on obtient que

$$\text{op}_\varepsilon(M) \circ \text{op}_\varepsilon(\Sigma) = \text{op}_\varepsilon(M \Sigma) + \sum_{\substack{0 \leq q \leq q_0 \\ 1 \leq q_1 \leq q_0 - q}} \varepsilon^{q_1} \text{op}_\varepsilon(M \#_{q_1} S_q) - \varepsilon \text{op}_\varepsilon(\rho),$$

avec $\rho = -\sum_{0 \leq q \leq q_0} \rho_q$.

Finalement, par définition des correcteurs S_q , on obtient l'équation vérifiée par Σ :

$$\partial_t \text{op}_\varepsilon(\Sigma) = \text{op}_\varepsilon(M \Sigma) + \sum_{\substack{0 \leq q_1+q_2 \leq q_0 \\ q_1 > 0}} \varepsilon^{q_1+q_2} \text{op}_\varepsilon(M \#_{q_1} S_{q_2}),$$

ce qui nous permet de conclure. \square

Théorème 3.8. *Pour ε assez petit, dépendant uniquement de d, N, M, T , l'unique solution $u \in C^0([0, T|\ln \varepsilon|], L^2(\mathbb{R}^d))$ de (3.2.1) est donnée par*

$$u = \text{op}_\varepsilon(\Sigma(0; t))u_0 + \int_0^t \text{op}_\varepsilon(\Sigma(t'; t))(\text{Id} + \varepsilon R)(f - \varepsilon \text{op}_\varepsilon(\rho(0; \cdot))u_0)(t') dt' \quad (3.2.11)$$

où R est un opérateur borné de $C^0([0, T|\ln \varepsilon|], H^{-q_0-1}) \rightarrow C^0([0, T|\ln \varepsilon|], L^2)$ avec, pour tout $w \in C^0(H^{-q_0-1})$,

$$|(Rw)(t)|_{L^2} \leq C |\ln \varepsilon|^{N^*} \sup_{0 \leq t \leq T|\ln \varepsilon|} \|w(t)\|_{\varepsilon, -q_0-1},$$

uniformément pour $t \in [0, T|\ln \varepsilon|]$, où N^* est un entier ne dépendant que de d, N, m, T .

Démonstration. Soit $g \in C^0([0, T|\ln \varepsilon|], L^2)$, et u défini par

$$u(t) = \text{op}_\varepsilon(\Sigma(0; t))u_0 + \int_0^t \text{op}_\varepsilon(\Sigma(t'; t))g(t') dt'.$$

Alors u satisfait l'équation (3.2.1) si et seulement si

$$((\text{Id} + \rho_0)g)(t) = f(t) - \varepsilon \text{op}_\varepsilon(\rho(0; t))u_0$$

où ρ_0 est un opérateur de $C^0(L^2) \rightarrow C^0(L^2)$ défini par

$$(\rho v)(t) = \varepsilon \int_0^t \text{op}_\varepsilon(\rho(t'; t))v(t') dt'.$$

La borne de ρ nous donne une estimation de la norme de ρ_0 ,

$$\sup_{0 \leq t \leq T|\ln \varepsilon|} |(\rho_0 u)(t)|_{L^2} \leq \varepsilon C(d, N, M, T) |\ln \varepsilon|^* \sup_{0 \leq t \leq T|\ln \varepsilon|} \|u(t)\|_{\varepsilon, -q_0-1}.$$

Donc pour ε assez petit, $\text{Id} + \rho_0$ est inversible, et on conclut directement. \square

3.3 Preuve du Théorème 3.6

3.3.1 Réduction

En utilisant quelques propriétés de quantification de Weyl, on peut se ramener à prouver

$$\langle a^w u, u \rangle + C|u|_{H^{(m-\theta)/2}}^2 \geq 0 \quad (3.3.1)$$

où a est un symbole réel.

En effet, on a vu que $\text{op}(a) = a^w + \text{op}(\rho)$, $\rho \in S_{1,0}^{-1}$ et que l'adjoint de l'opérateur a^w est $(a^w)^* = (\bar{a})^w$, ce qui nous donne que

$$\text{Re} \langle a^w u, u \rangle = \langle (\text{Re } a)^w u, u \rangle.$$

En suite, en posant $a_0 = \langle \xi \rangle^{-m} a \in S_{1,0}^0$ et $\Lambda = \text{op}(\langle \cdot \rangle)$, on a par la formule de composition

$$\Lambda^{m/2} a_0^w \Lambda^{m/2} = a^w + R$$

avec

$$\langle Rw, w \rangle \leq |Rw|_{H^{-(m-2)/2}} |w|_{H^{(m-2)/2}} \lesssim \|a\|_{C(d)} |w|_{H^{(m-2)/2}}^2 \quad (3.3.2)$$

pour tout $w \in H^{(m-2)/2}$. Comme Λ est autoadjoint dans L^2 , on a

$$\langle a^w u, u \rangle = \left\langle a_0^w \Lambda^{m/2} u, \Lambda^{m/2} u \right\rangle + \langle Ru, u \rangle.$$

Donc on peut se ramener au cas $m = 0$.

Un résultat de [LN] (2.5.24) dit que si $(\phi_j)_{j \geq 0}$ et $(\psi_j^2)_{j \geq 0}$ sont deux décompositions de Littlewood-Paley telles que $\phi_j \equiv \phi_j \psi_j^2$, alors on a l'estimation

$$\left| \langle a^w u, u \rangle - \sum_{j \geq 0} \langle (\phi_j a)^w \psi_j(D)u, \psi_j(D)u \rangle \right| \leq C |u|_{H^{-1}}^2 \quad (3.3.3)$$

où C dépend des normes de a . La caractérisation de H^s par la décomposition de Littlewood-Paley nous dit qu'il suffit de prouver

$$\langle a_j^w u_j, u_j \rangle + C 2^{-j\theta} |u_j|_{L^2}^2 \geq 0 \quad (3.3.4)$$

pour $a_j = \psi_j(\xi) a(x, \xi)$, $u_j = \psi_j(D)u$, et pour un certain $C > 0$ ne dépendant pas de j et u . En ajoutant $2^{-j\theta}$ à a_j , on peut supposer

$$a_j \geq 2^{-j\theta}. \quad (3.3.5)$$

De plus, pour un j_0 fixé, les termes de basse fréquence peut être majorées par

$$\sum_{0 \leq j \leq j_0} \langle a_j^w u_j, u_j \rangle \lesssim \|a\|_0 2^{j_0\theta} |u|_{H^{-\theta/2}}^2. \quad (3.3.6)$$

En divisant a par $\|a\|_{C(\theta)}$ pour un $C(\theta)$ assez grand, on peut finalement se ramener à montrer ce qui suit :

Soit $a \in \mathcal{S}_{1,0}^0$ un symbole réel et positif, $a_j = \psi_j a + 2^{-j\theta}$, tel que $\|a_j\|_{C(\theta)} \leq 1$, alors il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $u \in L^2$ et pour tout $j \geq j_0$, on a

$$\langle a_j^w u_j, u_j \rangle \geq 0, \quad u_j = \psi(D)u. \quad (3.3.7)$$

3.3.2 Reformulation avec le Flot de a_j^w

Le théorème de Calderón-Vaillancourt nous donne que a_j^w est linéaire borné de $L^2 \rightarrow L^2$. Soit Φ la flot de a_j^w :

$$\Phi(t) = \exp(ta_j^w), \quad (3.3.8)$$

c'est à dire que pour tout $w \in L^2$, $t \mapsto \Phi(t)w$ est l'solution unique dans $C(\mathbb{R}, L^2)$ de

$$y' = a_j^w y, \quad y(0) = w.$$

On a ainsi que

$$\begin{aligned} |\Phi(t)w|_{L^2}^2 - |w|_{L^2}^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds} |\Phi(s)w|_{L^2}^2 ds \\ &= \int_0^t 2 \langle a_j^w \Phi(s)w, \Phi(s)w \rangle ds \\ &\leq 2t \langle a_j^w \Phi(t)w, \Phi(t)w \rangle \end{aligned}$$

puisque l'intégrande est croissante par rapport à s .

Le flot étant bijectif à t fixé, il existe w tel que $u_j = \Phi(t)w$ (et donc $w = \Phi(-t)u_j$). L'inégalité précédente devient

$$|u_j|_{L^2}^2 - |\Phi(-t)u_j|_{L^2}^2 \leq 2t \langle a_j^w u_j, u_j \rangle.$$

Donc on il nous suffit de trouver $t > 0$ tel que

$$|u_j|_{L^2}^2 \geq |\Phi(-t)u_j|_{L^2}^2. \quad (3.3.9)$$

3.3.3 Approximation du Flot de a_j en Quantification de Weyl

On va maintenant approximer le flot $\Phi(t)$ de a_j^w : posons $S_0 = \exp(-ta_j)$ et

$$\partial_t S_q = -a_j S_q - \sum_{\substack{q_1+q_2=q \\ q_1>0}} a_j \diamond_{q_1} S_{q_2}, \quad S_q(0) = 0. \quad (3.3.10)$$

On fixe $q_0 = 1 + c_d \lceil \frac{\theta}{1-\theta} \rceil$ pour un certain c_d dépendant uniquement de d qu'on fixera plus tard plus tard dépendant. En utilisant la même méthode que pour la preuve du lemme d'approximation en quantification semi-classique, on a :

Lemme 3.9. *Soit $\Sigma = \sum_{0 \leq q \leq q_0-1} S_q$, alors*

$$\partial_t \Sigma^w = -a_j^w \Sigma^w + \rho(t)^w \quad (3.3.11)$$

où $\rho \in S^{-q_0}$ vérifie

$$|\rho(t)^w|_{H^s} \lesssim \sigma(t) |w|_{H^{s-q_0}}, \quad (3.3.12)$$

avec

$$\sigma(t) = \sum_{0 \leq q \leq q_0-1} \|S_q(t)\|_{q_0-q+C(d)} \quad (3.3.13)$$

pour un certain $C(d) > 0$ dépendant seulement de d .

Corollaire 3.10. *Il existe des constantes C, C' ne dépendant que de d telles que l'on ait*

$$|\Phi(-t)u_j| \leq |\Sigma(t)^w u_j|_{L^2} + C' t^2 2^{-jq_0} |\sigma|_{L^\infty(0,t)} \|\Sigma\|_{L^2 \rightarrow L^2} |L^\infty(0,t)| u_j|_{L^2} \quad (3.3.14)$$

lorsque

$$C t 2^{-jq_0} |\sigma|_{L^\infty(0,t)} < 1/2. \quad (3.3.15)$$

Démonstration. On pose

$$u(t) = \Sigma(t)^w u_j + \int_0^t \Sigma(t-t')^w g(t') dt'.$$

Alors u satisfait l'équation

$$\begin{cases} u' = -a_j^w u, \\ u(0) = u_j \end{cases}$$

si et seulement si

$$(\text{Id} + \rho_0)g(t) = -\rho(t)^w u_j$$

où

$$(\rho_0 v)(t) = \int_0^t \rho(t-t')^w v(t') dt'.$$

En utilisant le fait que les fréquences de u_j sont localisées autour de 2^j , on obtient par récurrence la majoration

$$|\rho_0^k(\rho(\cdot)^w u_j)(t)| \lesssim (t2^{-jq_0} |\sigma|_{L^\infty(0,t)})^{k+1} |u_j|_{L^2}.$$

Donc si (3.3.15) est vérifiée, $\text{Id} + \rho_0$ est inversible, ce qui nous donne la représentation

$$\Phi(-t)u_j = \Sigma(t)^w u_j - \int_0^t \Sigma(t-t')^w \sum_{k \geq 0} (-1)^{k+1} \rho_0^k(\rho(\cdot)^w u_j)(t') dt'$$

d'où l'estimation voulue. \square

Donc on peut se ramener à trouver un $t > 0$ satisfaisant (3.3.15) tel que

$$\|\Sigma(t)^w\|_{L^2} + C' t^2 2^{-jq_0} |\sigma|_{L^\infty(0,t)} \|\Sigma\|_{L^2} |_{L^\infty(0,t)} \leq 1. \quad (3.3.16)$$

3.3.4 Estimations Finales

Posons

$$t_* = j\tau_* 2^{j\theta} \quad (3.3.17)$$

où $\tau_* > 0$ ne dépend que de d est sera choisi plus tard. La raison pour laquelle on choisit t_* comme cela sera dans la section suivante. Le lemme suivant nous donne des estimations concernant les correcteurs S_q :

Lemme 3.11. *Il existe un polynôme P_j en j de degré $q + (|\alpha| + |\beta|)/2$ tel que pour tout $0 \leq t \leq t_*$ et $0 \leq q \leq q_0$, on a*

$$|\langle \xi \rangle^{q+|\beta|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_q(t)| \leq P_j(1+t)^{q+(|\alpha|+|\beta|)/2} \exp(-t2^{-j\theta}). \quad (3.3.18)$$

L'idée de la preuve de ce lemme est d'utiliser la formule de Faà di Bruno pour obtenir par récurrence des égalités de la forme

$$\langle \xi \rangle^q D^\gamma S_q = e^{-ta_j} \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\gamma| \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k = \gamma}} C_* t^k (Da_j)^{k_0} P_*(\partial)(D^2 a_j) \quad (3.3.19)$$

où C_* sont des constantes, et

$$D^\gamma = \langle \xi \rangle^{|\gamma|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta, \quad \gamma = \alpha + \beta \in \mathbb{N}^{2d};$$

$$\max(k_0, k) \leq 2q + |\gamma|, \quad k - k_0/2 \leq q + |\gamma|/2; \quad (3.3.20)$$

$$(Da_j)^{k_0} = \prod_{1 \leq i, j \leq d} (\partial_{x_i} a)^{\gamma_0^{(i)}} (\langle \xi \rangle \partial_{\xi_j} a)^{\gamma_0^{(j)}}, \quad \text{pour un certain } \gamma_0 \in \mathbb{N}^{2d} \quad |\gamma_0| = k_0; \quad (3.3.21)$$

et $P_*(\partial)(D^2 a)$ est un polynôme à coefficients constant en des dérivées de a d'ordre au moins 2.

Cette borne vient du fait que pour $a_j \geq 2^{-j\theta} + Ct^{-1} \ln t$, les dérivées de a_j sont plus petites que 1 et de la minoration de a_j par $2^{-j\theta}$, comme on l'a vu dans section 3.3.1, et pour $a_j < 2^{-j\theta} + Ct^{-1} \ln t$, on peut majorer par le lemme suivant les dérivées d'ordre 1 de a_j .

Lemme 3.12. *Sur la domaine $\{a_j < h\}$, on a $|Da_j| \leq 4h^{1/2}$ avec $D = (\nabla_x, \langle \xi \rangle \nabla_\xi)$.*

Ce lemme nous donne la majoration

$$\langle \xi \rangle^q |D^\gamma S_q| \leq C_q t^{k-k_0/2} (\ln t)^{k_0/2} e^{-t2^{-j\theta}} \quad (3.3.22)$$

qui nous permet de conclure avec l'aide de (3.3.20) et le choix de t_* .

On est maintenant en mesure de finir la démonstration du théorème. L'estimation du lemme 3.11 et le fait que les fréquences de S_q soient localisées autour de 2^j nous donnent que

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq t_*} |S_q(t)^w|_{L^2 \rightarrow L^2} &\lesssim P_j 2^{-jq+j\theta(q+C(d))}, \\ |S_q(t_*)^w|_{L^2 \rightarrow L^2} &\lesssim P_j 2^{-jq+j\theta(q+C(d))} e^{-\tau_* j}, \\ \max_{0 \leq t \leq t_*} \|S_q(t)\|_{q_0+q+C(d)} &\lesssim P_j 2^{j\theta(q_0+C(d))}, \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

où P_j est un polynôme en j de degré inférieur à $q_0 + C(d)$. En fait, la facteur 2^{-jq} est obtenu grâce à l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} (S_q(t)^w u)(x) &= (S_q(t)^w \Gamma^{-q} \Gamma^q u)(x) \\ &= ((S_q(t) \langle \xi \rangle^{-q})^w \Gamma^q u)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{i(x-y) \cdot \xi} S_q \left(\frac{x+y}{2}, \xi \right) \langle \xi \rangle^{-q} (\Gamma^q u)(y) d\xi dy \\ &\lesssim 2^{-jq} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{i(x-y) \cdot \xi} S_q \left(\frac{x+y}{2}, \xi \right) (\Gamma^q u)(y) d\xi dy \\ &= 2^{-jq} ((S_q(t)^w \Gamma^q u)(x) \end{aligned}$$

Donc

$$|S_q(t)^w u|_{L^2} \lesssim 2^{-jq} \|S_q\|_{C(d)} |\Gamma^q u|_{H^{-q}} \lesssim 2^{-jq} \|S_q\|_{C(d)} |u|_{L^2}. \quad (3.3.24)$$

Comme $\theta < 1$, on somme par rapport à q et on obtient

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq t_*} |\Sigma(t)^w|_{L^2 \rightarrow L^2} &\lesssim P_j 2^{j\theta C(d)}, \\ |\Sigma(t_*)^w|_{L^2 \rightarrow L^2} &\lesssim P_j 2^{j\theta C(d)} e^{-\tau_* j}, \\ |\sigma|_{L^\infty(0,t)} &\lesssim P_j 2^{j\theta(q_0+C(d))}. \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

On choisi d'abord τ_* assez grand dépendant seulement de d et θ , puis on choisi j_1 assez grand dépendant seulement de τ_*, q_0, d tel que pour $j \geq j_1$

$$\|\Sigma(t_*)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C' P_j 2^{j\theta C(d)} e^{-\tau_* j} < 1/2. \quad (3.3.26)$$

Puis, en utilisant le choix de q_0 , on choisi j_2 assez grand dépendant seulement de θ, d tel que pour $j \geq j_2$ on a

$$C'_* t_*^{2-jq_0} |\sigma|_{L^\infty(0,t_*)} \|\Sigma\|_{L^2 \rightarrow L^2} |L^\infty(0,t_*)| \leq C' P_j 2^{j\theta(q_0+C(d))-jq_0} < 1/2. \quad (3.3.27)$$

Enfin, on obtient (3.3.16) pour $j \geq j_0 = \max(j_1, j_2)$.

3.4 Quelques Remarques sur la Preuve

3.4.1 Réduction de la Dimension

Comme on l'a dit précédemment, la raison pour laquelle on se restreint à la dimension un est qu'on utilise cette condition dans la preuve de Lemme 3.12, qui est essentiel dans la preuve de ce théorème. En effet, grâce à lui la puissance de t dans (3.3.22) est $k - k_0/2 \leq q + C(d)$. Sans ce lemme, la puissance est $k \leq 2q + C(d)$, et (3.3.27) est mauvais comme

$$Ct_*^2 2^{-jq_0} |\sigma|_{L^\infty(0,t_*)} \|\Sigma\|_{L^2 \rightarrow L^2} |L^\infty(0,t_*)| \leq C' P_j 2^{j\theta(2q_0+C(d))-jq_0},$$

ce qui nous donne le résultat voulu seulement pour $\theta < 1/2$.

3.4.2 Choix de t_*

On a besoin de minimiser le terme de gauche dans gauche de (3.3.16) qui est contrôlé par la croissance de S_q et de ses dérivées par le Lemme 3.11. Il y a concurrence entre la croissance polynomiale et la décroissance exponentielle, donc t_* doit être choisi grand pour ce terme soit petit.

Cependant, t_* ne peut être trop grand, car on doit avoir (3.3.15), où σ croît comme S_{q_0} , majoré par $2^{-jq_0} t^{q_0+C(d)}$ lorsque t n'est pas trop grand. Cela implique l'estimation $t_* = O(2^{j\theta})$. On pose $t_* = j\tau_* 2^{j\theta}$ afin que $\exp(-t_* 2^{-j\theta}) = \exp(-j\tau_*)$ ait une décroissance exponentielle par rapport à j et puisse surmonter la croissance de P_j dans l'estimation donnée par (3.3.26).

Références

- [AS GP] S. Alinhac, P. Gérard, *Pseudo-differential Operators and the Nash-Moser Theorem*
- [BA] A. Boulkhemair, *L^2 estimates for Weyl Quantization*.
- [EL ZM] L. Evans, M. Zworski, *Semiclassical Analysis*.
- [FG] G. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*
- [GL] L. Gårding, *Dirichlet's Problem for Linear Elliptic Partial Differential Equations*.
- [HI] I. Hwang, *The L^2 boundedness of pseudo differential operators*.
- [HL] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Volume III, Pseudo-Differential Operators*
- [KS] Sergiu Klainerman, *PDE as a Unified Subject*.
- [LN] N. Lerner, *Metrics on the Phase Space and Non-Selfadjoint Pseudodifferential Operators*.
- [MA] André Martinez, *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*.
- [MG] G. Métivier, *Para-differential Calculus and Applications to the Cauchy Problem for Nonlinear Systems*.
- [TB1] B. Texier, *Calcul Pseudo-Différentiel et Para-Différentiel*.
- [TB2] B. Texier, *Approximations of Pseudo-Differential Flows*.