

Mémoire de maîtrise  
Ondes de choc dans les équations hyperboliques

Maxime Ingremeau  
Amiel Peiffer-Smadja  
Sous la direction d'Anne-Laure Dalibard

22 juin 2011

**Table des matières**

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Solutions classiques</b>	<b>3</b>
2.1	Deux exemples . . . . .	3
2.2	Présentation de la méthode des caractéristiques . . . . .	4
2.3	Intérêt et limites . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Définition des solutions</b>	<b>5</b>
3.1	Quelques résultats d'intégration par parties . . . . .	5
3.2	Solutions au sens des distributions . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Conditions de Rankine-Hugoniot</b>	<b>8</b>
4.1	Le cas des fonctions paliers . . . . .	8
4.2	Fonctions approchables par des chocs . . . . .	9
4.3	Fonctions Lipschitz par morceaux . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Conditions d'admissibilité</b>	<b>12</b>
5.1	Non-unicité . . . . .	12
5.2	Solutions de viscosité . . . . .	12
5.3	Entropie . . . . .	13
5.4	Solutions de Volpert . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Problème de Riemann</b>	<b>18</b>
6.1	Présentation . . . . .	19
6.2	Discretisation du problème . . . . .	20
6.3	Résolution du problème ainsi simplifié . . . . .	21
6.3.1	Présentation d'un algorithme . . . . .	21
6.3.2	Terminaison de l'algorithme . . . . .	22
6.3.3	Conclusion . . . . .	23

<b>7</b>	<b>Théorèmes d'existence et d'unicité</b>	<b>25</b>
7.1	Un théorème de compacité . . . . .	25
7.2	Le théorème d'existence . . . . .	27
7.3	Théorème d'unicité . . . . .	28

# 1 Introduction

Pour introduire les équations hyperboliques, nous allons voir comment elles peuvent représenter un modèle de trafic routier. Imaginons une route infinie, que l'on assimilera à la droite réelle, sur laquelle les voitures roulent dans un seul sens. Nous modéliserons le trafic de manière continue, en notant  $\rho(t, x)$  la densité de voiture au point  $x$  à l'instant  $t$ . Supposons dans un premier temps pour simplifier que la densité de voiture et le flux de voiture sont  $\mathcal{C}^1$ . On peut alors écrire la loi de "conservation des voitures", équivalent de la conservation de la masse ou de la charge :

$$\rho(t, x)_t + j(t, x)_x = 0.$$

$j(t, x)$  représente le flux de voitures en  $x$  et au temps  $t$ . On note  $f_y$  la dérivée de  $f$  par rapport à la variable  $y$ .

En notant  $v(t, x)$  la vitesse des voitures en  $x$  à l'instant  $t$ , on a :

$$j(t, x) = \rho(t, x)v(t, x).$$

L'hypothèse que nous allons faire est que  $v$  est une fonction de  $\rho$ . C'est à dire qu'un conducteur adapte sa vitesse à la densité du trafic à l'endroit où il se trouve. Remarquons que le point de vue adopté habituellement est plutôt différent : le conducteur est censé adapter sa distance avec les autres voitures à sa vitesse.

Dans notre modèle, on a donc  $v = g(\rho)$ , et  $j = f(\rho)$  avec  $f(\rho) = \rho g(\rho)$ . L'équation devient alors :

$$\rho_t + f(\rho)_x = 0.$$

**Remarque 1.** *Pour un modèle de trafic routier, il est naturel de demander que  $g$  soit décroissante, et que  $g$  soit à valeurs entre 0 et  $130\text{km.h}^{-1}$ .*

*En fait, afin d'étudier l'équation dans toute sa généralité, nous ne ferons pas de telle hypothèse. En revanche, faire des hypothèses de régularité sur  $f$  est naturel, et se révélera essentiel par la suite.*

**Remarque 2.** *Il est aussi possible d'étudier l'équation dans un cadre multidimensionnel. Elle peut alors représenter des lois de conservations en mécanique des fluides, par exemple. Pour plus de détails sur la manière dont cette équation apparaît dans de nombreux domaines physiques, voir [2]. Cependant, nous ne considérerons que le cas scalaire, beaucoup plus simple.*

Nous commencerons naturellement par regarder les solutions  $\mathcal{C}^1$  d'une telle équation. Ce sont celles pour lesquelles donner un sens à l'équation est évident. Ces solutions peuvent être trouvées de manière explicite grâce à une méthode appelée méthode des caractéristiques.

Toutefois, nous verrons qu'en général, même si la condition initiale est régulière, la solution n'a pas de raison de rester continue. En un temps fini, des chocs se créent.

Par conséquent, notre objectif sera dans un deuxième temps de donner un sens à la notion de solution de l'équation, en admettant des discontinuités.

Nous étudierons alors ces discontinuités plus en détail. En particulier, nous montrerons que les chocs se déplacent à des vitesses données par une loi appelée condition de Rankine-Hugoniot.

Ensuite, nous remarquerons qu'il n'y a pas unicité de la solution, pour une condition initiale donnée. Nous chercherons donc à donner des critères pour choisir une solution plutôt qu'une autre. Nous choisirons des conditions appelées conditions d'entropie

Nous montrerons alors qu'il existe toujours une solution entropique à un problème de Cauchy, sous certaines conditions.

Enfin, nous énoncerons sans preuve un théorème d'unicité de la solution entropique.

## 2 Solutions classiques

Nous étudierons donc l'équation

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{E}$$

et le problème de Cauchy associé

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(0, x) = u_0. \end{cases} \tag{PC}$$

Dans ce paragraphe, on va étudier l'existence de solutions fortes (ou classiques) au problème de Cauchy dans le cadre où  $f$  est  $C^\infty$  et la condition initiale  $u_0$  est continue. Une solution classique est une solution  $u$  définie sur  $[0; T[ \times \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  pour  $T > t > 0$  et continue pour  $T > t \geq 0$  qui vérifie ponctuellement l'équation (E). Si  $u_0$  est elle-même  $C^1$  alors  $u \in C^1([0; T[ \times \mathbb{R})$ . Avant de donner une méthode générale pour trouver les solutions fortes de (PC), donnons quelques exemples.

### 2.1 Deux exemples

L'exemple non-trivial le plus simple est celui où  $f$  est linéaire. On a alors

$$u_t + cu_x = 0$$

où  $c$  est une constante réelle.

L'équation est alors linéaire. Dans notre modèle de trafic routier, cela correspond au cas où les voitures roulent toutes à la même vitesse,  $c$ . Il est donc facile de voir que la solution de (PC) est

$$u(t, x) = u_0(x - ct).$$

La condition initiale est transportée à la vitesse  $c$ .

L'équation qui nous servira de modèle est celle où  $f(y) = \frac{y^2}{2}$ . (E) s'écrit alors

$$u_t + u \cdot u_x = 0.$$

On appelle cette équation équation de Burgers.

Donnons maintenant une méthode générale pour résoudre le problème de Cauchy (PC).

## 2.2 Présentation de la méthode des caractéristiques

Pour résoudre le problème de Cauchy, on va chercher des caractéristiques, c'est à dire des courbes  $X(t)$  telles que  $u$  soit constante le long des courbes  $t \mapsto (t, X(t))$ . Pour cela il faut et il suffit que :

$$\frac{d}{dt}(u(t, X(t))) = 0.$$

Or on a (en notant  $c(u) = f'(u)$ ) :

$$\frac{d}{dt}(u(t, X(t))) = u_t(t, X(t)) + \frac{dX}{dt}u_x(t, X(t)) = \left(\frac{dX}{dt} - c(u(t, X))\right)u_x(t, X).$$

On voit donc que si on considère  $X^y$  la solution (qui existe d'après Cauchy-Lipschitz) de l'équation

$$\begin{cases} z' = c \circ u(t, z) \\ z(0) = y. \end{cases}$$

Alors  $u(t, X^y(t)) = u(0, X^y(0)) = u_0(y)$  d'après le calcul précédent. En réinjectant cela dans l'équation que vérifie  $X^y$ , on trouve alors que les caractéristiques  $X^y$  sont des droites de pente  $c \circ u_0(y)$  i.e.  $X^y(t) = y + tc \circ u_0(y)$ .

## 2.3 Intérêt et limites

On a vu que si on a  $u$  une solution classique sur  $[0; T[ \times \mathbb{R}$ , alors nécessairement, on a :  $u(t, y + tc \circ u_0(y)) = u_0(y)$ . Donc si on nous donne  $(t, x)$ , pour connaître  $u(t, x)$ , il suffit de trouver  $y$  solution de l'équation algébrique

$$x = y + tc \circ u_0(y).$$

On déduit de ces constatations le théorème suivant :

**Théorème 1.** Soit  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  bornée ainsi que sa dérivée et  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

On pose  $T^* = \sup\{a > 0; \forall t \in [0; a[, \text{ les } X^y(t) \text{ soient tous distincts}\}$ . Alors le problème de Cauchy possède une seule solution de classe  $\mathcal{C}^1$  dans la bande  $[0; T^*[ \times \mathbb{R}$  et n'en possède dans aucune bande strictement plus grande  $[0; T[ \times \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Trouvons tout d'abord une solution classique  $u$  dans la bande  $[0; T^*[ \times \mathbb{R}$  grâce à la méthode des caractéristiques.

Pour cela, nous commencerons par montrer que  $T^* > 0$ . Notons  $p = c \circ u_0$  et  $F^t(y) = X^y(t) = y + tp(y)$ . On a alors :

$$T^* = \sup\{a > 0; \forall t \in [0; a[; F^t \text{ est injective}\}.$$

$u_0$  est bornée, donc  $p$  l'est également, donc  $F^t(\pm\infty) = \pm\infty$ . Par conséquent,  $F^t$  est injective si et seulement si elle est bijective si et seulement si elle est strictement croissante.

Or  $(F^t)'(y) = 1 + tp'(y)$ , donc si  $p'$  est positive,  $(F^t)' \geq 1$  donc  $T^* = +\infty$ . Sinon on voit que  $T^* = \frac{-1}{\inf p'}$ .  $u_0$  et sa dérivée étant bornée,  $p'$  est bornée, et on a bien  $T^* > 0$ .

Si  $t < T^*$ , on note  $y^t$  l'inverse de  $F^t$ . Et on pose alors :

$$u(t, x) = u_0(y^t(x)).$$

Il reste à voir que  $(t, x) \mapsto y(t, x) = y^t(x)$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$ . Notons  $H(t, x, y) = y + tc \circ u_0(y) - x$ .  $H$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $H(t, x, y(t, x)) = 0$ . Or comme  $\forall t < T^*, \frac{\partial H}{\partial y} = (F^t)'(y) > 0$ , le théorème des fonctions implicites assure que  $y$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On peut donc dériver l'égalité  $y(t, x) + tc \circ u_0(y(t, x)) = x$  et on obtient :

$$\begin{cases} y_t(1 + tp'(y)) = -p(y) \\ y_x(1 + tp'(y)) = 1. \end{cases}$$

On calcule :

$$(1 + tp'(y))(u_t + c(u)u_x) = u'_0(y)(1 + tp'(y))(y^t + c(u)y_x) = u'_0(y)(-p(y) + c(u_0(y))) = 0.$$

Donc  $u_t + c(u)u_x = 0$ , on a bien construit une solution classique  $u$  de classe  $\mathcal{C}^1$  dans la bande  $[0; T^*[\times\mathbb{R}$ .

Supposons qu'on ait une solution classique sur  $[0; T[\times\mathbb{R}$  avec  $T > T^*$ . On trouve alors  $\tau$  et  $y_1 \neq y_2$  tel que  $X^{y_1}(\tau) = X^{y_2}(\tau) = x$ . Comme  $\forall t \in [0, T[, \forall y \in \mathbb{R}, u(t, X^y(t)) = u_0(y)$ , on a  $u(t, x) = u_0(y_1) = u_0(y_2)$ . Comme  $X^y(t) = y + tc \circ u_0(y)$ , on déduit de  $X^{y_1}(\tau) = X^{y_2}(\tau)$  et de  $u_0(y_1) = u_0(y_2)$  que  $y_1 = y_2$ . Cela est absurde!  $\square$

On voit que la plupart du temps, on ne peut pas construire de solutions classiques sur  $[0; +\infty[$  et qu'il se crée naturellement des discontinuités : c'est le cas quand des caractéristiques se croisent, la fonction  $u$  doit faire un saut entre 2 valeurs possibles. En fait pour déterminer  $u(t, \cdot)$  à partir de  $u_0$ , il suffit de considérer tous les points  $(x, u_0(x))$  et de les décaler en considérant qu'ils ont été à la vitesse  $c \circ u_0(x)$  : ils deviennent  $(x + tc \circ u_0(x), u_0(x))$ . Au premier croisement de caractéristiques, on a :  $\forall x \in [x_0, x_1], x + tc \circ u_0(x) = X$  et alors  $u(t, \cdot)$  présente en  $X$  une discontinuité reliant  $u_0(x_0)$  à  $u_0(x_1)$  d'où l'intérêt de considérer des solutions discontinues.

### 3 Définition des solutions

Nous avons vu qu'en général, les solutions classiques de  $(E)$  n'étaient pas définies à tout instant. Il nous faut donc affaiblir le concept de solutions. L'idée naturelle est de regarder des solutions de  $(E)$  au sens des distributions, c'est à dire de regarder "l'effet qu'a l'équation sur les fonctions-test".

Pour cela, rappelons tout d'abord sans démonstration le théorème de la divergence, et d'autres résultats d'intégration par parties :

#### 3.1 Quelques résultats d'intégration par parties

**Définition 1.** On dit qu'un ouvert  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^2$  s'il existe  $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  telle que :  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; \Phi(x) < 0\}$  et  $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; \Phi(x) = 0\}$  et telle que  $\forall x \in \partial\Omega, \nabla\Phi(x) \neq 0$ .

On définit alors la normale extérieure en  $x$  par  $\vec{n}(x) = \frac{\nabla\Phi(x)}{|\nabla\Phi(x)|}$ .

**Théorème 2** (divergence). Soit  $\Omega$  un ouvert de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $\psi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . Alors on a :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\psi) = \int_{\partial\Omega} \psi(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma(x).$$

Nous ne démontrerons pas ce résultat classique. Pour plus de détails, voir [3].

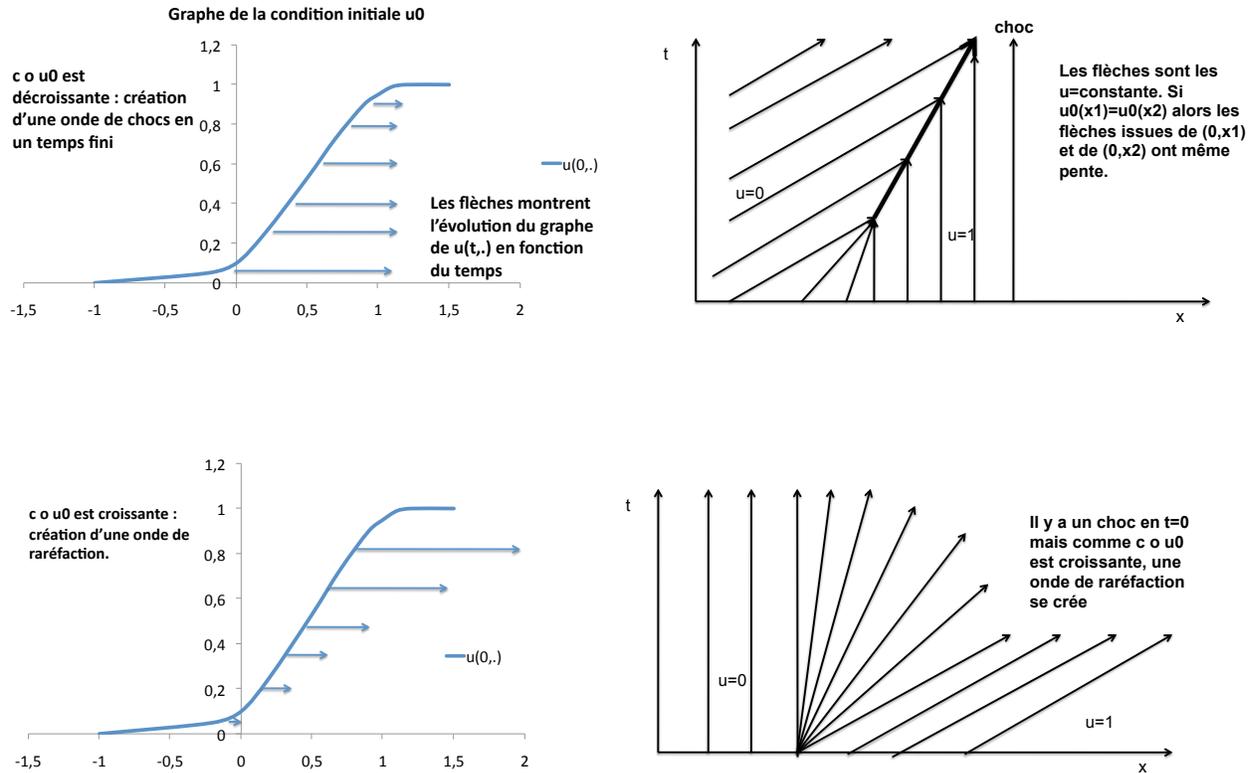


FIGURE 1 – 2 cas de figure : la formation d'une onde de choc et d'une onde de raréfaction

Le lemme suivant sera utile par la suite, pour regarder le comportement de fonctions le long de lignes de discontinuité. On s'intéresse à des fonctions  $\mathcal{C}^1$  partout, sauf le long d'une ligne de discontinuité, elle-même régulière.

**Lemme 1.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Gamma$  une courbe incluse dans  $\Omega$ .  $\Gamma = \{(t, \gamma(t)); a < t < b\}$ , avec  $\gamma \in \mathcal{C}^1$ . Soient  $g$  et  $h$  deux fonctions  $\mathcal{C}^1$  en tout  $(t, x) \notin \Gamma$ . Posons (on suppose de plus que les limites existent) :

$$\Delta g(t) = \lim_{x \rightarrow \gamma(t)^+} g(t, x) - \lim_{x \rightarrow \gamma(t)^-} g(t, x)$$

$$\Delta h(t) = \lim_{x \rightarrow \gamma(t)^+} h(t, x) - \lim_{x \rightarrow \gamma(t)^-} h(t, x).$$

On a alors l'égalité :

$$\iint_{\Omega} [g\phi_t + h\phi_x] dx dt = - \iint_{\Omega} [g_t + h_x] \phi dx dt + \int_a^b [\Delta h(t) - \dot{\gamma}(t) \Delta g(t)] \phi(t, \gamma(t)) dt.$$

*Démonstration.* On pose  $\Omega^+ = \{(t, x); x > \gamma(t)\}$  et  $\Omega^- = \{(t, x); x < \gamma(t)\}$ . Soit  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ . On applique le théorème de la divergence à  $(\phi g, \phi h)$  sur  $\Omega^+$  et sur  $\Omega^-$ . Comme la normale le long de la

courbe  $x = \gamma(t)$  vaut  $\vec{n}d\sigma = \pm(-\dot{\gamma}, 1)dt$ , on déduit que :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^+} [g\phi_t + h\phi_x] dxdt &= - \iint_{\Omega^+} [g_t + h_x]\phi dxdt + \int_a^b [h(t, \gamma(t)+) - \dot{\gamma}(t)g(t, \gamma(t)+)]\phi(t, \gamma(t))dt \\ \iint_{\Omega^-} [g\phi_t + h\phi_x] dxdt &= - \iint_{\Omega^-} [g_t + h_x]\phi dxdt - \int_a^b [h(t, \gamma(t)-) - \dot{\gamma}(t)g(t, \gamma(t)-)]\phi(t, \gamma(t))dt. \end{aligned}$$

En sommant, on a l'égalité voulue.  $\square$

### 3.2 Solutions au sens des distributions

Regardons donc ce qui se passe si on multiplie (E) par une fonction-test, et si l'on intègre sur  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $u$  une solution  $\mathcal{C}^1$  de (E), et  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . On a :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} [u_t\phi + f(u)_x\phi] dxdt = 0 = - \iint_{\mathbb{R}^2} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dxdt \text{ par intégration par parties.}$$

C'est cette dernière égalité que nous prendrons comme définition d'une solution de (E). Pour que l'égalité ait un sens, il suffit que  $u$  et  $f(u)$  soient mesurables et localement intégrables.

**Définition 2.** On dit qu'une fonction mesurable  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  localement intégrable est une solution de (E) au sens des distributions si  $f(u)$  est aussi localement intégrable et si, pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dxdt = 0.$$

Par la suite, nous aurons besoin de considérer des limites de solutions au sens des distributions, et le lemme suivant se révélera utile :

**Lemme 2.** Soit  $(u_n)_n$  une suite de solutions au sens des distributions de (E).

- (i) Si  $u_n \rightarrow u$  et  $f(u_n) \rightarrow f(u)$  dans  $L_{loc}^1$ , alors  $u$  est une solution de (E) au sens des distributions.
- (ii) En particulier, si  $u_n \rightarrow u$  dans  $L_{loc}^1$  et s'il existe  $M > 0$  tel que  $\forall n, \|u_n\|_\infty \leq M$ , alors  $u$  est une solution de (E) au sens des distributions.

*Démonstration.* (i) Soit  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Alors

$$\iint_{\mathbb{R}^2} [u\phi_t + (f(u))\phi_x] dxdt = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}^2} [u_n\phi_t + f(u_n)\phi_x] dxdt = 0.$$

(ii) Si  $u_n \rightarrow u$  dans  $L_{loc}^1$ , alors quitte à extraire une sous-suite,  $u_n$  converge vers  $u$  presque partout, donc  $f \circ u_n$  converge presque partout vers  $f \circ u$  par continuité de  $f$ . D'après le théorème de convergence dominée, on a  $f(u_n) \rightarrow f(u)$  dans  $L_{loc}^1$  car les  $u_n$  sont bornés. On peut donc appliquer (i).  $\square$

Nous avons généralisé la notion de solution de (E). Il nous faut maintenant généraliser la notion de solution du problème de Cauchy (PC).

**Définition 3.** Soit  $\bar{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On dit qu'une fonction mesurable  $u : [0; +\infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localement intégrable est une solution du problème de Cauchy (PC) avec pour condition initiale  $u(0, \cdot) = \bar{u}$  au sens des distributions si, pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , on a :

$$\iint [u\phi_t + f(u)\phi_x] dxdt + \int_{\mathbb{R}} \bar{u}(x)\phi(0, x) dx = 0.$$

On vérifie sans peine par intégration par parties qu'une solution classique  $\mathcal{C}^1$  de (PC) est bien solution au sens des distributions. En fait, la "bonne" notion de solution de (PC) est plus restrictive que celle-ci. En effet, pour modéliser les ondes de chocs qui se créent, il nous faut bien admettre des discontinuités spatiales. Par contre, les discontinuités temporelles n'ont pas de sens physique, et doivent être exclues. C'est ce que nous dit la définition suivante.

**Définition 4.** On dit que  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution faible de (E) si  $u$  est une solution de (E) au sens des distributions, et si  $t \rightarrow u(t, \cdot)$  est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $L^1_{loc}$ .

## 4 Conditions de Rankine-Hugoniot

Rappelons sans preuve le théorème de Rademacher, qui sera utile par la suite :

**Théorème 3** (Rademacher). Soit  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  lipschitzienne. Alors  $f$  est presque partout différentiable.

Pour une preuve de ce résultat classique, voir [4].

Nous avons vu que la bonne manière de définir les solutions de (E) était de demander que (E) soit vérifiée au sens des distributions. Demander seulement que (E) soit vérifiée presque partout est évidemment une condition beaucoup trop faible pour être retenue, car une solution peut avoir des lignes de discontinuité. Toutefois, nous allons voir que si l'on ajoute des conditions sur les lignes de discontinuité, on obtient une notion de solution équivalente à celle de solution au sens des distributions.

Nous commencerons par regarder le cas des fonctions paliers, ou fonctions chocs.

### 4.1 Le cas des fonctions paliers

**Définition 5.** On notera

$$U^{\lambda, u^+, u^-}(t, x) = \begin{cases} u^+ & \text{si } x > \lambda t \\ u^- & \text{si } x < \lambda t \end{cases} \quad \text{où } u^+, u^-, \lambda \in \mathbb{R}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons simplement cette fonction  $U$ .

**Lemme 3.**  $U$  est solution faible de (E) si et seulement si

$$\lambda(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-). \tag{RH}$$

*Démonstration.* Notons  $\Omega^+ = \{x > \lambda t\}$  et  $\Omega^- = \{x < \lambda t\}$ .

$$\begin{aligned} U \text{ est solution de } (E) &\iff \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty, \iint [U\phi_t + f(U)\phi_x] dxdt = 0 \\ &\iff \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty, \iint_{\Omega^+} [u^+\phi_t + f(u^+)\phi_x] dxdt + \iint_{\Omega^-} [u^-\phi_t + f(u^-\phi_x] dxdt = 0. \end{aligned}$$

On applique maintenant le théorème de la divergence à  $(U\phi, f(U)\phi)$  sur  $\Omega^+$  :

$$\iint_{\Omega^+} [u^+\phi_t + f(u^+)\phi_x] dxdt = \int_{\mathbb{R}} (u^+\phi(\lambda t, t), f(u^+)\phi(\lambda t, t)) \cdot \vec{n} dt$$

avec  $\vec{n} = \frac{(-\lambda, 1)}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$  qui est le vecteur normal à la frontière de  $\Omega^+$ . En raisonnant de même sur  $\Omega^-$ , on obtient :

$$\begin{aligned} U \text{ est solution de } (E) &\iff \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty, \int_{\mathbb{R}} (\lambda[u^+ - u^-] - [f(u^+) - f(u^-)])\phi(t, \lambda t) dt = 0 \\ &\iff (RH) \text{ est vérifiée.} \end{aligned} \quad \square$$

La condition  $(RH)$  s'appelle la condition de Rankine-Hugoniot.  $\lambda$  est la vitesse de la discontinuité.

**Remarque 3.** Pour l'équation de Burgers, la condition  $(RH)$  s'écrit :

$$\lambda = \frac{u^+ + u^-}{2}.$$

La condition de Rankine-Hugoniot caractérise les solutions parmi les fonctions paliers. Nous aimerions maintenant étendre cette condition à une classe beaucoup plus large de fonctions, que l'on peut approcher par des paliers.

## 4.2 Fonctions approchables par des chocs

**Définition 6.** Soient  $u^-, u^+, \lambda \in \mathbb{R}$  avec  $u^+ \neq u^-$ . On dit que  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est approchable par le choc  $U$  en  $(\tau, \xi)$  si on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{-r}^r \int_{-r}^r [u(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)] dxdt = 0.$$

Un cas particulier dans lequel une fonction est approchable par un choc, est le cas où  $u$  a une ligne de discontinuité suffisamment régulière.

**Lemme 4.** Supposons que  $f_1, f_2$  et  $g$  sont des fonctions continues de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

Définissons  $u(y) = \begin{cases} f_1(y) & \text{si } g(y) \leq 0 \\ f_2(y) & \text{si } g(y) > 0. \end{cases}$

Soit  $\tilde{y} = (\tau, \xi)$  tel que  $g(\tilde{y}) = 0$  et tel que  $g$  soit différentiable en  $\tilde{y}$ . On pose  $u^+ = f_2(\tilde{y})$ ,  $u^- = f_1(\tilde{y})$  et  $\nabla g(\tilde{y}) = (a, b)$ . Si  $u^+ \neq u^-$  et  $a \neq 0$ , en posant  $\lambda = -\frac{b}{a}$ , alors  $u$  est approchable par le choc  $U$  en  $\tilde{y}$ .

*Démonstration.* Notons  $\Omega_r^+ = \{y \in \mathbb{R}^2, \|y - \tilde{y}\|_\infty < r, g(y) > 0\}$  et  $\Omega_r^- = \{y \in \mathbb{R}^2, \|y - \tilde{y}\|_\infty < r, g(y) \leq 0\}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \int_{-r}^r \int_{-r}^r [u(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)] dx dt &= \frac{1}{r^2} \iint_{\Omega_r^+} [f_2(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)] dx dt \\ &+ \frac{1}{r^2} \iint_{\Omega_r^-} [f_1(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)] dx dt. \end{aligned}$$

Regardons ce que vaut la première intégrale.

$$\frac{1}{r^2} \iint_{\Omega_r^+} [f_2(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)] dx dt = \frac{1}{r^2} \iint_{\Omega_r} [f_2(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)] \chi_{g(\tau+t, \xi+x) > 0} dx dt$$

On réalise le changement de variables  $t = rt'$ ,  $x = rx'$  et on note  $y' = (t', x')$ .

$$\frac{1}{r^2} \iint_{\Omega_r^+} [f_2(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)] dx dt = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [f_2(\tau + rt', \xi + rx') - U(t', x')] \chi_{g(\tau+rt', \xi+rx') > 0} dx' dt'.$$

On veut maintenant faire tendre  $r$  vers 0, en utilisant le théorème de convergence dominée. Par un développement limité, on a :

$$g(\tau + rt', \xi + rx') = g(\tau, \xi) + (t', x') \cdot \nabla g(\tau, \xi) + o(y') = at' + bx' + o(y') = a(t' - \lambda x') + o(y'). \quad (*)$$

Montrons que  $\chi_{g(\tau+rt', \xi+rx') > 0} \longrightarrow \chi_{a(t' - \lambda x') > 0}$  presque partout. Si  $a(t' - \lambda x') > 0$ , alors pour  $r$  assez petit, on a bien  $g(\tau + rt', \xi + rx') > 0$ .

Supposons  $\chi_{g(\tau+rt', \xi+rx') > 0} \not\rightarrow \chi_{a(t' - \lambda x') > 0}$ . Alors, par le développement limité précédent, cela signifie que  $(t' - \lambda x') = 0$ . Ceci ne peut donc se produire que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

On a donc bien montré que  $\chi_{g(\tau+rt', \xi+rx') > 0} \longrightarrow \chi_{a(t' - \lambda x') > 0}$  presque partout.

Or  $a(t' - \lambda x') > 0$  si et seulement si  $U(t', x') = u^+$ . Par conséquent, presque partout, on a

$$[f_2(\tau + rt', \xi + rx') - U(t', x')] \chi_{g(\tau+rt', \xi+rx') > 0} \longrightarrow 0.$$

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée, et voir que l'intégrale sur  $\Omega_r^+$  tend vers 0.

On raisonne de même sur  $\Omega_r^-$ , et on en déduit le résultat.  $\square$

L'intérêt d'approcher une solution de (E) par un choc est que ce choc vérifiera alors les conditions de Rankine-Hugoniot, comme le dit le lemme suivant.

**Lemme 5.** Soit  $u$  une solution de (E) au sens des distributions, bornée, et soit  $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ .

On suppose qu'il existe  $u^+, u^-$  et  $\lambda$  des réels tels que  $u$  soit approchable par le choc  $U$  en  $(\tau, \xi)$ .

Alors  $U$  vérifie (RH) et donc  $\lambda(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-)$ .

*Démonstration.* Soit  $\eta > 0$ . On pose  $u^\eta(t, x) = u(\tau + \eta t, \xi + \eta t)$ .  $u^\eta$  est aussi solution de (E).

Montrons que  $u^\eta \longrightarrow U$  et  $f(u^\eta) \longrightarrow f(U)$  dans  $L_{loc}^1$ , quand  $\eta \longrightarrow 0$ . Soit  $R > 0$ .

$$\int_{-R}^R \int_{-R}^R (u^\eta(t, x) - U(t, x)) dx dt = \frac{1}{\eta^2} \int_{-\eta R}^{\eta R} \int_{-\eta R}^{\eta R} (u(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)) dx dt$$

Et l'hypothèse de bornitude nous donne bien la convergence de  $u^\eta$  vers  $U$  dans  $L^1_{loc}$ . Donc quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que  $u^\eta$  converge presque partout vers  $U$ .

Comme  $u$  est bornée et  $f$  est continue, on a de même  $f(u^\eta) \rightarrow f(U)$  dans  $L^1_{loc}$ . Par le lemme 3,  $U$  est une solution au sens des distributions de (E), donc  $U$  vérifie (RH).  $\square$

Nous allons définir une classe de fonctions suffisamment régulières pour que le lemme précédent puisse leur être facilement appliqué.

### 4.3 Fonctions Lipschitz par morceaux

**Définition 7.** On dit que  $u$  est de régularité Lipschitz par morceaux, noté  $L_{pm}$ , si  $u$  est mesurable, bornée, et s'il existe un nombre fini de points  $P_i$  et un nombre fini de fonctions lipschitziennes  $\gamma_j : ]a_j; b_j[ \rightarrow \mathbb{R}$  telles que, en notant  $\Gamma_j$  le graphe de  $\gamma_j$ , les  $\Gamma_j$  sont deux à deux disjoints, et que l'on ait :

- (a)  $\forall P \in \mathbb{R}^2, P \notin \Gamma_j, P \neq P_i$  il existe  $V$  un voisinage de  $P$  tel que  $u$  soit lipschitzienne sur  $V$ .
- (b)  $\forall Q = (t, \gamma_j(t))$  sur une courbe  $\Gamma_j$ , il existe un voisinage  $V$  de  $Q$  tel que  $u$  soit lipschitzienne sur  $V^+$  et sur  $V^-$ , où  $V^+ = V \cap \{x > \gamma_j(t)\}$  et  $V^- = V \cap \{x < \gamma_j(t)\}$ .

**Remarque 4.** Les points  $P_i$  sont dans la définition pour que l'on autorise les courbes de discontinuités à se croiser.

Pour les fonctions  $L_{pm}$ , les conditions de Rankine-Hugoniot caractérisent les solutions de (E), comme le dit le théorème suivant :

**Théorème 4.** Soit  $u$  de régularité  $L_{pm}$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $u$  est solution de (E) au sens des distributions.
- (ii) L'équation  $u_t + f'(u)u_x = 0$  est vérifiée pour presque tout  $(t, x)$ . De plus, pour tout  $j$ , pour presque tout  $t \in ]a_j; b_j[$ , on a :

$$\dot{\gamma}_j(t)[u_j^+(t) - u_j^-(t)] = f(u_j^+(t)) - f(u_j^-(t)).$$

*Démonstration.* Rappelons que par le théorème de Rademacher,  $u$  et  $f(u)$  sont différentiables presque partout dans le plan, et les courbes  $\gamma_j$  sont presque partout dérivables.

Soit  $u$  une solution de (E) au sens des distributions. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert sur lequel  $u$  est lipschitzienne. Pour toute fonction test  $\phi$  de support compact inclus dans  $\Omega$ , on a :

$$\iint [u_t + f'(u)u_x] \phi dx dt = \iint [u \phi_t + f(u) \phi_x] dx dt = 0.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction-test de support contenu dans  $\Omega$ , on en déduit bien que l'équation  $u_t + f'(u)u_x$  est vérifiée presque partout.

Maintenant, si  $\gamma_j$  est différentiable en  $\tau$ , alors d'après le lemme 4,  $u$  est approchable par un choc en  $(\tau, \gamma_j(\tau))$ , et on peut appliquer le lemme 5 pour  $u^- = u_j^-(\tau), u^+ = u_j^+(\tau), \lambda = \dot{\gamma}_j(\tau)$ . On en déduit que les conditions (RH) sont vérifiées. D'où (i)  $\Rightarrow$  (ii).

Supposons (ii). Soit  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Soit  $\alpha : [0, \infty[ \rightarrow [0, 1] \mathcal{C}^\infty$  telle que :

$$\alpha(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } r \geq 1. \end{cases} \quad \text{et on pose } \alpha^\epsilon(r) = \alpha\left(\frac{r}{\epsilon}\right).$$

Pour  $\epsilon$  assez petit les disques  $B(P_i, \epsilon)$  sont deux à deux disjoints. Pour tout  $P = (t, x) \in \mathbb{R}^2$ , on définit :

$$\tilde{\phi}^\epsilon(P) = \phi(P) \cdot \sum_i \alpha^\epsilon(|P - P_i|) \text{ et } \phi^\epsilon(P) = \phi(P) - \tilde{\phi}^\epsilon(P)$$

Chaque  $P_i$  est en dehors du support de  $\phi^\epsilon$ . On applique le lemme 1, et on obtient :

$$\iint [u\phi_t^\epsilon + f(u)\phi_x^\epsilon] dxdt = - \iint [u_t + f'(u)u_x]\phi^\epsilon dxdt + \sum_j \int_{a_j}^{b_j} [\dot{\gamma}_j(u_j^+ - u_j^-) - (f(u_j^+) - f(u_j^-))]\phi^\epsilon(t, \gamma_j(t)) dt = 0.$$

D'un autre côté, on a :

$$\left| \iint [u\tilde{\phi}_t^\epsilon + f(u)\tilde{\phi}_x^\epsilon] dxdt \right| \leq (\|u\|_\infty + \|f(u)\|_\infty) \cdot \|\nabla \tilde{\phi}^\epsilon\|_{L^1}.$$

Or on a :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\nabla \tilde{\phi}^\epsilon\|_{L^1} = 0$  car on est en dimension 2.

$$\text{D'où } \iint [u\phi_t + f(u)\phi_x] dxdt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint [u(\phi_t^\epsilon + \tilde{\phi}_t^\epsilon) + f(u)(\phi_x^\epsilon + \tilde{\phi}_x^\epsilon)] dxdt = 0.$$

Et donc (ii)  $\Rightarrow$  (i). □

## 5 Conditions d'admissibilité

### 5.1 Non-unicité

Nous allons voir qu'il n'y a en général pas unicité de la solution à un problème de Cauchy. Considérons l'équation de Burgers, avec la condition initiale triviale  $u_0 \equiv 0$ .

Une solution évidente de (PC) est alors  $u \equiv 0$ . Toutefois, nous allons voir qu'il y en a d'autres. Considérons par exemple

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -pt \\ -2p & \text{si } -pt < x < 0 \\ 2p & \text{si } 0 < x < pt \\ 0 & \text{si } pt < x. \end{cases}$$

Il suffit alors d'utiliser le théorème précédent pour montrer que,  $\forall p > 0$ ,  $u$  est solution de (PC).

### 5.2 Solutions de viscosité

Il va donc falloir ajouter des critères pour sélectionner une solution parmi toutes celles qui sont disponibles. Sur l'exemple précédent, la bonne solution est évidemment celle où  $u$  est constante nulle : c'est celle qui correspond à notre intuition physique du problème. Une première condition d'admissibilité nous viendra donc directement de la physique. Dans l'équation (E), il n'y a que des dérivées du premier ordre. L'idée est que (E) est une approximation d'une équation physique plus compliquée, dans lequel intervient un terme du second ordre, négligeable. Par exemple, en mécanique des fluides, cette contribution sera due à la viscosité du fluide.

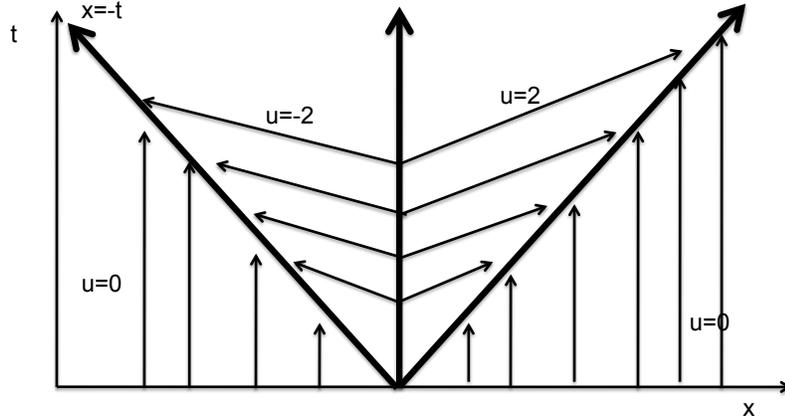


FIGURE 2 – Exemple de non unicité

**Définition 8.** On dit que  $u$  est une solution de viscosité de  $(E)$  s'il existe une suite  $(u^\epsilon)$  de fonctions lisses convergeant vers  $u$  dans  $L^1_{loc}$  et solution de :

$$u_t^\epsilon + f(u^\epsilon)_x = \epsilon u_{xx}^\epsilon. \quad (E_\epsilon)$$

Cette condition a une interprétation physique assez simple, mais est en pratique assez difficile à utiliser. Nous allons donner des conditions d'admissibilité plus faible, mais beaucoup plus maniables. Pour cela, nous aurons besoin de la notion d'entropie, et de flux d'entropie.

### 5.3 Entropie

**Définition 9.** On dit que  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une entropie de  $(E)$  ayant pour flux d'entropie  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si  $\eta$  et  $q$  sont localement lipschitziennes et  $\eta'(u) \cdot f'(u) = q'(u)$ , pour presque tout  $u \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 5.** Cette définition a bien un sens pour des fonctions qui ne sont que localement lipschitziennes, en vertu du théorème de Rademacher.

**Remarque 6.** Si  $\eta$  et  $q$  sont  $C^1$ , et si  $u$  est une solution  $C^1$  de  $(E)$ , on a :

$$\eta'(u)u_t + q'(u)u_x = \left( -f'(u) \cdot \eta'(u) + q'(u) \right) u_x = 0.$$

Autrement dit,  $\eta(u)_t + q(u)_x = 0$ . Mais si  $u$  n'est pas  $C^1$ , cette égalité n'a pas de raison d'être vraie !

Nous allons voir que la notion importante est celle d'entropie convexe. En effet, soit  $\eta$  une entropie convexe, et  $q$  le flux associé, avec  $\eta, q$  de classe  $C^2$ , et soient  $u^\epsilon$  des solutions de  $(E_\epsilon)$ . On a :

$$\begin{aligned} \eta'(u^\epsilon) \cdot (u_t^\epsilon + f'(u^\epsilon)u_x^\epsilon) &= \epsilon \cdot \eta'(u^\epsilon)u_{xx}^\epsilon \\ \eta(u^\epsilon)_t + q(u^\epsilon)_x &= \epsilon(\eta(u^\epsilon)_{xx} - \eta''(u^\epsilon) \cdot (u^\epsilon)^2) \end{aligned}$$

$\eta$  étant convexe, on a  $\eta''(u^\epsilon) \geq 0$ . On a donc  $\eta(u^\epsilon)_t + q(u^\epsilon)_x \leq \epsilon \cdot \eta(u^\epsilon)_{xx}$ . Cette inégalité est évidemment à comprendre au sens des distributions. Si  $\phi$  est  $C^\infty$  à support compact, et  $\phi \geq 0$ , on a :

$$\iint [\eta(u^\epsilon)\phi_t + q(u^\epsilon)\phi_x] dxdt \geq -\epsilon \iint \eta(u^\epsilon)\phi_{xx} dxdt. \quad (*)$$

On a obtenu (\*) en intégrant par parties. Si on suppose que  $(u^\epsilon)$  est uniformément bornée et converge vers  $u$  dans  $L^1_{loc}$ , on peut faire tendre  $\epsilon$  vers 0 dans (\*), et on obtient que :

$$\iint [\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x] dxdt \geq 0.$$

Ce qui signifie que l'on a  $\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0$  au sens des distributions. Le calcul que l'on vient d'effectuer motive la condition d'admissibilité suivante :

**Définition 10.** *Si  $u$  est une solution faible de (E), on dit que  $u$  est une solution entropique si,  $\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0$  au sens des distributions, pour toute entropie convexe  $\eta$  de flux  $q$ , avec  $\eta, q$  localement lipschitziennes.*

On a vu que dans le cas où  $u, \eta$  et  $q$  étaient  $C^1$ , cette inégalité était une égalité. On a donc de bonnes raisons de penser que c'est le long des lignes de discontinuité que se joue la condition d'entropie. C'est exactement ce que nous dit le théorème suivant.

**Théorème 5.** *Soit  $u$  une solution de (E),  $L_{pm}$ , et  $\eta$  une entropie convexe de flux  $q$ . Alors  $u$  vérifie  $\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0$  au sens des distributions si et seulement si pour chaque courbe  $\gamma_j$ , pour tout presque tout  $t \in ]a_j, b_j[$ , on a :*

$$\dot{\gamma}_j(t)(\eta(u_j^+(t)) - \eta(u_j^-(t))) \geq q(u_j^+(t)) - q(u_j^-(t)).$$

*Démonstration.* Soit  $\phi \geq 0$   $C^1$  à support compact. Par le lemme 1, on a :

$$\begin{aligned} \iint [\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x] dxdt &= - \iint [\eta(u)_t + q(u)_x] \phi dxdt \\ &\quad + \sum_j \int_{a_j}^{b_j} [\dot{\gamma}_j[\eta(u_j^+) - \eta(u_j^-)] - [q(u_j^+) - q(u_j^-)]] \phi(t, \gamma_j(t)) dt \end{aligned}$$

Or par hypothèse, en dehors des lignes de discontinuité,  $\eta(u)_t + q(u)_x = 0$ . Par conséquent, la condition d'entropie est vérifiée si et seulement si pour toute fonction test positive  $\phi$  :

$$\sum_j \int_{a_j}^{b_j} [\dot{\gamma}_j[\eta(u_j^+) - \eta(u_j^-)] - [q(u_j^+) - q(u_j^-)]] \phi(t, \gamma_j(t)) dt \geq 0.$$

C'est bien équivalent à  $\dot{\gamma}_j(t)[\eta(u_j^+(t)) - \eta(u_j^-(t))] \geq q(u_j^+(t)) - q(u_j^-(t))$  pour tout  $j$  et tout  $t$ .  $\square$

**Remarque 7.** *Nous avons dit que l'équation (E) se généralisait à un cadre multidimensionnel, avec par exemple  $u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Une entropie sera alors une fonction  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $D\eta(u) \cdot Df(u) = Dq(u)$  pour presque tout  $u \in \mathbb{R}^n$ .*

*Cependant dans ce cas multidimensionnel, trouver des entropies convexes non triviales n'est pas évident du tout, et il se peut que la condition d'entropie soit inutile. Par contre dans le cas scalaire qui nous intéresse, le problème ne se pose pas. Il suffit de choisir  $\eta$  convexe, et de poser  $q(u) = \int_a^u \eta'(v) f'(v) dv$  où  $a$  est une constante quelconque.*

## 5.4 Solutions de Volpert

Il y a donc beaucoup d'entropies à notre disposition. On va voir que l'on peut se limiter à une classe assez restreinte d'entropies, à savoir les fonctions  $\eta_k : u \rightarrow |u - k|$ .

On a alors  $q_k(u) = \text{sgn}(u - k)(f(u) - f(k))$ .

**Définition 11.** On dit que  $u : [0, +\infty[ \rightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R})$  est une solution entropique au sens de Volpert si  $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \phi \in \mathcal{C}^1$  à support compact inclus dans  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ , avec  $\phi \geq 0$ , on a :

$$\iint \left( |u - k| \phi_t + (f(u) - f(k)) \text{sgn}(u - k) \phi_x \right) dx dt \geq 0.$$

**Remarque 8.** Vérifions qu'une solution entropique au sens de Volpert bornée est bien une solution de (E) au sens des distributions. Soit  $\phi \in \mathcal{C}^\infty$  à support compact inclus dans  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ , avec  $\phi \geq 0$ . On prend  $k < \inf u(t, x)$ . L'inégalité se réécrit alors :

$$\iint \left( (u - k) \phi_t + (f(u) - f(k)) \phi_x \right) dx dt = \iint \left( u \phi_t + f(u) \phi_x \right) dx dt \geq 0.$$

En prenant  $k > \sup u(t, x)$ , on a l'inégalité inverse. On en déduit bien que  $u$  est solution au sens des distributions de (E).

**Remarque 9.** Soit  $(u_n)_n$  une suite de solutions entropiques de (E). Si  $u_n \rightarrow u$  et  $f(u_n) \rightarrow f(u)$  dans  $L^1_{loc}$ , alors  $u$  est une solution entropique de (E).

Nous avons vu qu'une fonction palier était solution de (E) si et seulement si elle vérifiait les conditions de Rankine-Hugoniot. Nous allons maintenant voir quelles sont les conditions, plus fortes, pour qu'une fonction en palier soit une solution de Volpert de (E).

**Proposition 1.** La fonction  $U$  est solution entropique au sens de Volpert de (E) si et seulement si elle vérifie les conditions de Rankine-Hugoniot et si on a,  $\forall \alpha \in [0; 1]$  :

$$\begin{cases} f(\alpha u^+ + (1 - \alpha)u^-) \geq \alpha f(u^+) + (1 - \alpha)f(u^-) & \text{si } u^- < u^+ \\ f(\alpha u^+ + (1 - \alpha)u^-) \leq \alpha f(u^+) + (1 - \alpha)f(u^-) & \text{si } u^- > u^+. \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $k \in \mathbb{R}$ . Par le théorème précédent,  $U$  vérifie la condition d'entropie de Volpert si et seulement si on a :

$$\lambda(\eta(u^+) - \eta(u^-)) \geq q(u^+) - q(u^-) \text{ pour toute entropie } \eta \text{ de flux } q.$$

En particulier, pour les entropies qui nous intéressent, on a :

$$\lambda[|u^+ - k| - |u^- - k|] \geq [(f(u^+) - f(k)) \text{sgn}(u^+ - k)] - [(f(u^-) - f(k)) \text{sgn}(u^- - k)]. \quad (*)$$

- Si  $k \leq \min(u^-, u^+)$ , on déduit de l'inéquation (\*) que  $\lambda(u^+ - u^-) \geq f(u^+) - f(u^-)$ .

- Si  $k \geq \max(u^-, u^+)$ , on déduit de (\*) que  $\lambda(u^+ - u^-) \leq f(u^+) - f(u^-)$ .

On obtient bien les conditions de Rankine-Hugoniot.

- Si  $k = \alpha u^+ + (1 - \alpha)u^-$  avec  $\alpha \in [0; 1]$ ,

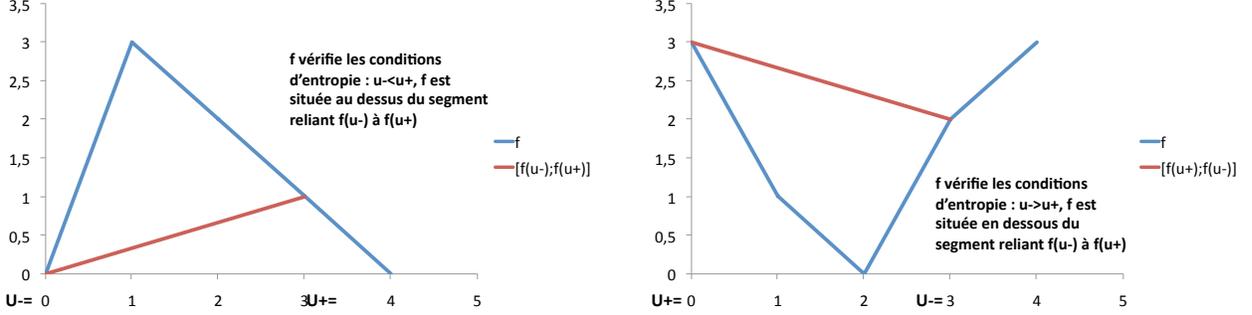


FIGURE 3 – Illustrations des conditions pour qu'un choc soit entropique

$$\lambda(u^+ - u^- - 2k) \operatorname{sgn}(u^+ - u^-) \geq [f(u^+) - f(u^-) - 2f(k)] \operatorname{sgn}(u^+ - u^-). \quad (**)$$

En se rappelant que  $\lambda = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$ , et en multipliant chaque membre de (\*\*) par  $|u^+ - u^-|$ , on obtient que :

$$\begin{aligned} (f(u^+) - f(u^-))(u^+ - u^- - 2k) &\geq [f(u^+) - f(u^-) - 2f(k)](u^+ - u^-) \\ [f(u^+) - f(u^-)](1 - 2\alpha)(u^+ - u^-) &\geq [f(u^+) - f(u^-) - 2f(k)](u^+ - u^-) \\ -[2\alpha f(u^+) + (2 - 2\alpha)f(u^-)](u^+ - u^-) &\geq -2(u^+ - u^-)f(\alpha u^+ + (1 - \alpha)u^-) \end{aligned}$$

ce qui est bien équivalent aux inégalités recherchées.  $\square$

**Remarque 10.** Cette proposition nous dit que si le choc est croissant,  $f$  doit être au dessus du segment reliant  $f(u^-)$  et  $f(u^+)$ . Si le choc est décroissant,  $f$  doit être en dessous du segment entre  $f(u^+)$  et  $f(u^-)$ .

**Remarque 11.** Les conditions de la proposition précédente reviennent à dire que

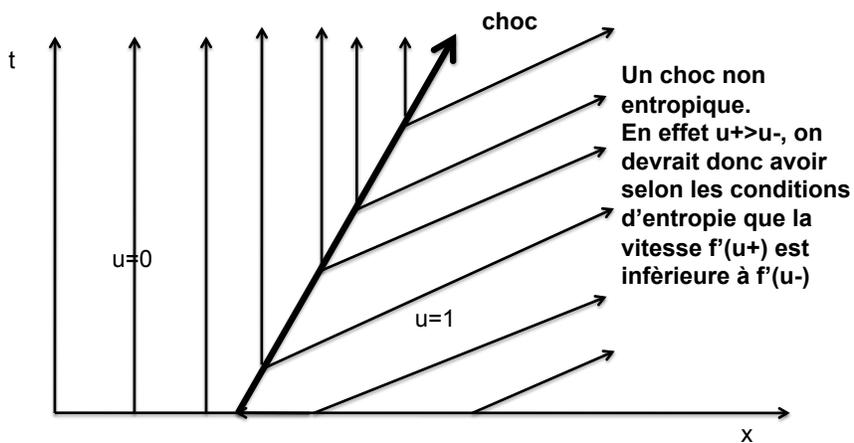
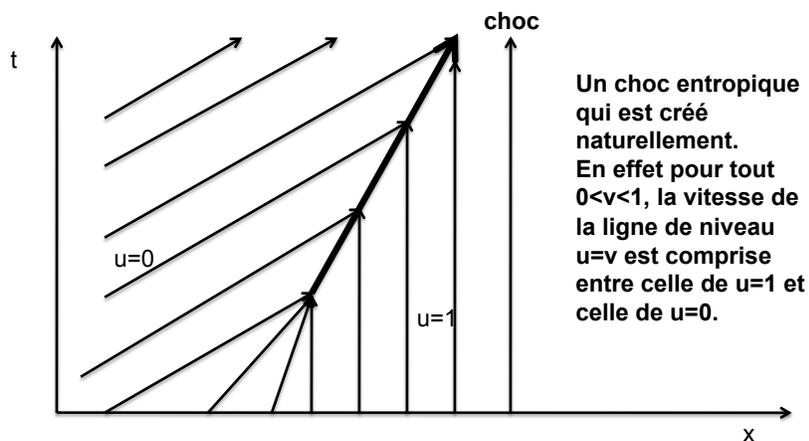
$$\frac{f(u^*) - f(u^-)}{u^* - u^-} \geq \frac{f(u^+) - f(u^*)}{u^+ - u^*} \text{ pour tout } u^* \text{ entre } u^- \text{ et } u^+.$$

Cela peut être vu comme une condition de stabilité. Par exemple, dans le cas où  $u^- < u^* < u^+$ , supposons que le choc se divise en deux chocs, avec la valeur intermédiaire en  $u^*$ . Alors l'inégalité précédente, combinée aux conditions de Rankine-Hugoniot, nous dit que le choc entre  $u^-$  et  $u^*$  va au moins aussi vite que celui entre  $u^*$  et  $u^+$ . Les deux chocs n'ont donc pas tendance à s'éloigner avec le temps.

On peut prendre les limites quand  $u^* \rightarrow u^+$  et  $u^* \rightarrow u^-$ . On obtient alors que

$$f'(u^-) \geq \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} \geq f'(u^+)$$

. Cela signifie que la vitesse du choc est comprise entre la vitesse des particules après le choc, et la vitesse des particules avant le choc.



Reprenons l'exemple de non unicité

On voit que les chocs de droite et de gauche sont entropiques mais pas celui du milieu

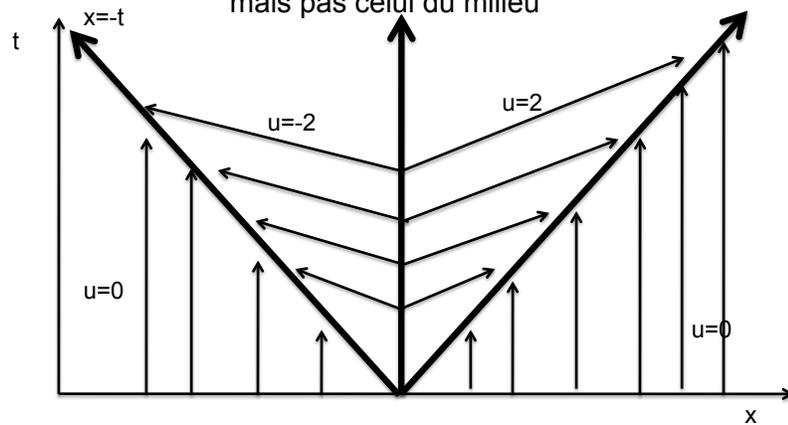


FIGURE 4 – Exemples de chocs entropiques et non entropiques

Nous allons en déduire un critère général pour qu'une solution soit entropique au sens de Volpert.

**Théorème 6.** *Soit  $u \in L_{pm}$ , bornée. Alors  $u$  est solution entropique au sens de Volpert si et seulement si*

- (i)  $u$  est une solution de (E) au sens des distributions, et
- (ii) pour tout  $j$ , pour presque tout  $t \in ]a_j, b_j[$ , on a  $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$\begin{cases} f(\alpha u_j^+ + (1 - \alpha)u_j^-) \geq \alpha f(u_j^+) + (1 - \alpha)f(u_j^-) & \text{si } u_j^- < u_j^+ \\ f(\alpha u_j^+ + (1 - \alpha)u_j^-) \leq \alpha f(u_j^+) + (1 - \alpha)f(u_j^-) & \text{si } u_j^- > u_j^+ \end{cases}$$

*Démonstration.* Supposons que  $u$  soit une solution entropique au sens de Volpert. Alors, comme  $u$  est bornée, par la remarque 8,  $u$  est une solution au sens des distributions, donc (i) est bien vérifié.

Soit  $\Gamma_j$  une courbe de discontinuité de  $u$ . Soit  $\tau$  un point en lequel  $\gamma_j$  est différentiable. Par le lemme 4,  $u$  est approchable par un choc  $U$  en  $(\tau, \xi)$ , avec  $\xi = \gamma_j(\tau)$ . On raisonne comme dans la preuve du lemme 5. Soit  $\epsilon > 0$ . On pose  $u^\epsilon(t, x) = u(\tau + \epsilon t, \xi + \epsilon t)$ .  $u^\epsilon$  est aussi solution de (E), entropique au sens de Volpert.

Or on a montré dans la preuve du lemme 5 que  $u^\epsilon$  convergeait vers  $U$  dans  $L_{loc}^1$  et que  $f(U^\epsilon)$  convergeait vers  $f(u)$  dans  $L_{loc}^1$ . Par la remarque 9,  $U$  est une solution entropique de (E), au sens de Volpert. Par la proposition 1, cela signifie bien que l'inégalité dans (ii) est vérifiée en  $(\tau, \xi)$ . Comme  $\gamma_j$  est presque partout différentiable, (ii) est bien vérifiée.

Supposons maintenant que (i) et (ii) sont vrais.

Par le théorème 5, il nous faut montrer que, pour tout  $j$ , pour presque tout  $t \in ]a_j, b_j[$ , on a :

$$\dot{\gamma}_j(t)[|u_j^+(t) - k| - |u_j^-(t) - k|] \geq \text{sgn}(u_j^+(t) - k) \cdot [f(u_j^+(t)) - f(k)] - \text{sgn}(u_j^-(t) - k) \cdot [f(u_j^-(t)) - f(k)] (*)$$

Soit  $t$  tel que  $\gamma_j$  soit différentiable en  $t$ . On prend  $U$  la fonction palier qui approche  $u$  en  $(t, \gamma_j(t))$ . Comme on a (ii), on peut appliquer à  $U$  la proposition 1.  $U$  est donc solution de (E), entropique au sens de Volpert. Par conséquent, (\*) est bien vérifiée.  $\square$

**Remarque 12.** *On a donc plusieurs conditions d'admissibilité possibles sur  $u$  solution de (E) :*

- (i)  $u$  est une solution de viscosité,
- (ii)  $u$  est une solution entropique,
- (iii)  $u$  est une solution de Volpert.

*On a vu dans ce mémoire que (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii). On peut aussi voir que (ii)  $\Rightarrow$  (iii) en faisant des combinaisons linéaire de fonction de type  $u \mapsto |u - k|$ . Dans la plupart des cas, ces trois notions sont en fait équivalentes*

## 6 Problème de Riemann

Dans cette partie, on va montrer l'existence d'une solution à l'équation (E) dans le cas où  $u$  est à variations bornées. Pour cela, on va discrétiser le problème puis on utilisera des théorèmes de compacité pour avoir l'existence dans le cas général.

## 6.1 Présentation

Considérons le problème de Riemann

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(0, x) = \begin{cases} u^- & \text{si } x < 0 \\ u^+ & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{P})$$

et on cherche une solution de la forme (avec  $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$ ) :

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0 & \text{si } x < \lambda_1 t \\ u_i & \text{si } \lambda_i t < x < \lambda_{i+1} t \\ u_k & \text{si } x > \lambda_k t \end{cases}$$

Pour que  $v$  soit solution, il faut et il suffit que  $v$  vérifie les conditions de Rankine-Hugoniot et les conditions d'admissibilité à chaque discontinuité d'après le théorème 6, c'est à dire :

- si  $u_i < u_{i+1}$ , alors  $\forall \alpha \in [0; 1] f(\alpha u_i + (1 - \alpha)u_{i+1}) \geq \alpha f(u_i) + (1 - \alpha)f(u_{i+1})$ ;
- si  $u_i > u_{i+1}$ , alors  $\forall \alpha \in [0; 1] f(\alpha u_i + (1 - \alpha)u_{i+1}) \leq \alpha f(u_i) + (1 - \alpha)f(u_{i+1})$ ;
- $\lambda_i = \frac{f(u_i) - f(u_{i-1})}{u_i - u_{i-1}}$ .

On trouve alors une solution explicite de (P) si  $f$  est affine par morceaux. Si  $u^- < u^+$ , on prend  $f_*$  la plus grande fonction convexe majorée par  $f$ . On voit aisément que  $f_*$  est affine par morceaux, on note alors  $u^- = v_0 < \dots < v_k = u^+$  les points de discontinuité  $z$  de  $f'_*$ . De plus, nécessairement  $\forall i = 1, \dots, k, f_*(x_i) = f(x_i)$ .

Alors  $u$  définie comme avant avec  $\lambda_k = \frac{f(v_k) - f(v_{k-1})}{v_k - v_{k-1}}$  (la convexité de  $f_*$  et le fait que  $f'_*$  a une discontinuité en chaque  $v_k$  assure que  $\lambda_1 < \dots < \lambda_k$ ) et  $u_i = v_i$  est solution de l'équation. En effet, par construction, cette fonction vérifie les conditions de Rankine-Hugoniot et les conditions d'admissibilité le long de toutes les courbes de discontinuité.

Si  $u^- > u^+$ , on fait de même avec  $f^*$  la plus petite fonction concave minorée par  $f$  : les  $u_i$  seront les points  $z$  de discontinuité de  $f^{*prime}$  et les  $\lambda_i$  choisis tel que  $u$  soit bien une solution. Pour la preuve de ce résultat, voir [5]

**Remarque 13.** Si  $f$  est strictement convexe, alors on peut résoudre aussi explicitement le problème de Riemann.

- Si  $u^+ < u^-$ , alors la solution est un choc se déplaçant à la vitesse  $\lambda = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$ .
- Sinon on note  $G$  l'inverse de  $f'$  strictement croissante et on voit apparaître une onde de raréfaction comme le dit la formule de Lax-Oleïpnik :

$$v(t, x) = \begin{cases} u^- & \text{si } x < t f'(u^-) \\ G\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } t f'(u^+) < x < t f'(u^+) \\ u^- & \text{si } x > t f'(u^+) \end{cases}$$

Pour la preuve de ce résultat, voir [5]

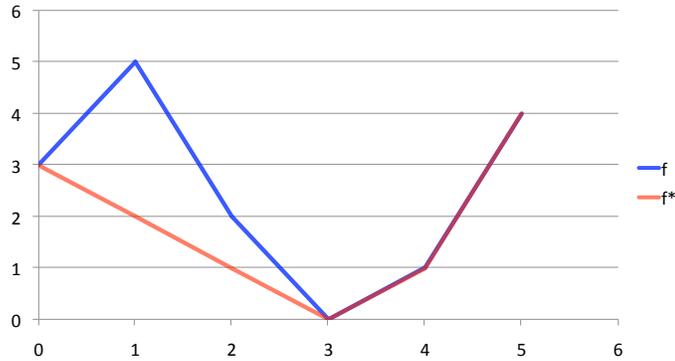


FIGURE 5 – Un exemple de calcul de  $f_*$

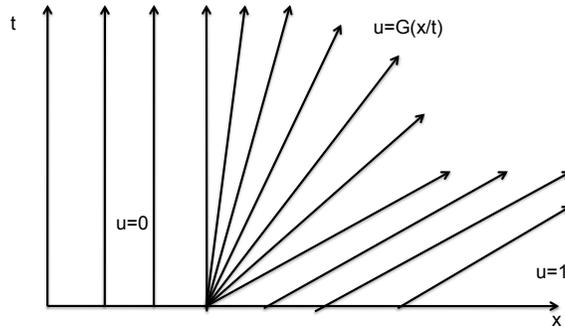


FIGURE 6 – Le cas  $f$  strictement convexe avec  $u^+ > u^-$

## 6.2 Discrétisation du problème

**Définition 12.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ .  $u$  est dite à variations bornées si

$$\text{Tot. Var}(u) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{x_0 < \dots < x_N} \sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| < +\infty.$$

**Remarque 14.** Soit  $u$  une fonction à variations bornées sur un intervalle  $I$ . Alors  $u$  est bornée et est à variations bornées sur tout sous intervalle  $J \subset I$ . On a alors :

$$\forall x, y \in J, |u(x) - u(y)| \leq \text{Tot. Var}(u|_J).$$

$$\forall a < b < c, \text{Tot. Var}(u|_{[a;c]}) = \text{Tot. Var}(u|_{[a;b]}) + \text{Tot. Var}(u|_{[b;c]})$$

On a la proposition suivante :

**Proposition 2.** Soit  $u \in L^1(\mathbb{R})$  une fonction à variations bornées. Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe alors  $v$  une fonction en escaliers à support compact tel que :

- (i)  $\text{Tot.Var}(v) \leq \text{Tot.Var}(u)$
- (ii)  $\|v\|_\infty \leq \|u\|_\infty$
- (iii)  $\|u - v\|_{L^1} < \epsilon$ .

*Démonstration.* On prend  $M > 1$  tel que

$$\left| \int_{-M}^M |u(x)| dx - \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| dx \right| < \epsilon$$

Posons  $x_j = \inf\{x \in \mathbb{R}; \text{Tot.Var}(u|_{]-\infty; x[}) \geq \frac{j\epsilon}{M}\}$  et  $N = \sup\{n \in \mathbb{N}; x_n \neq -\infty\}$  et montrons que :

$$\forall j = 1, \dots, N-1, \text{Tot.Var}(u|_{]x_j; x_{j+1}[}) < \frac{\epsilon}{M}.$$

Si  $x_j < a_0 < \dots < a_k < x_{j+1}$ , alors

$$\sum_{i=1}^k |u(a_i) - u(a_{i-1})| \leq \text{Tot.Var}(u|_{]a_0; a_k[}) = \text{Tot.Var}(u|_{]-\infty; a_k[}) - \text{Tot.Var}(u|_{]-\infty; a_0[}) \leq (j+1)\frac{\epsilon}{M} - j\frac{\epsilon}{M} \leq \frac{\epsilon}{M}.$$

$$\text{On définit } v \text{ de la façon suivante : } v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-M; M] \\ u\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) & \text{si } x \in [x_j; x_{j+1}[ \cap [-M; M] \end{cases}$$

On a bien  $\|v\|_\infty \leq \|u\|_\infty$  et  $\text{Tot.Var}(v) \leq \text{Tot.Var}(u)$ .

D'autre part, comme pour presque tout  $x$  dans  $[-M; M]$ ,  $|u(x) - v(x)| < \frac{\epsilon}{M}$ , on a

$$\|u - v\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{-M} |u(x)| dx + \int_{-M}^M |u(x) - v(x)| dx + \int_M^{+\infty} |u(x)| dx < \epsilon + 2M \frac{\epsilon}{M} < 3\epsilon \quad \square$$

**Remarque 15.** On remarque que dans la preuve précédente, on peut imposer de plus que  $v$  soit à valeurs dans  $2^{-\nu}\mathbb{Z}$  si  $\nu$  est assez grand. Cette proposition sera utile pour approximer la condition initiale.

On doit aussi considérer une approximation affine par morceaux de  $f$  qu'on prend localement lipschitzienne. Soit  $\nu \in \mathbb{N}$ .  $f_\nu$  est la fonction affine sur les  $[\frac{j}{2^\nu}; \frac{j+1}{2^\nu}]$  et qui coïncide avec  $f$  sur les  $\frac{j}{2^\nu}$   $\forall j \in \mathbb{Z}$  c'est à dire : si  $j \in \mathbb{Z}$  et  $\lambda \in [0; 1]$  alors

$$f_\nu\left(\lambda \frac{j}{2^\nu} + (1-\lambda) \frac{j+1}{2^\nu}\right) = \lambda f\left(\frac{j}{2^\nu}\right) + (1-\lambda) f\left(\frac{j+1}{2^\nu}\right). \quad (6.2.1)$$

## 6.3 Résolution du problème ainsi simplifié

### 6.3.1 Présentation d'un algorithme

Considérons  $\bar{u} \in L^1(\mathbb{R})$  une fonction en escaliers à valeurs dans  $2^{-\nu}\mathbb{Z}$  ayant un nombre fini de discontinuités situées en  $x_1 < \dots < x_N$ . On résout alors les problèmes de Riemann (en prenant  $f = f_\nu$  c'est à dire  $f$  affine par morceaux sur les  $[\frac{j}{2^\nu}; \frac{j+1}{2^\nu}]$  comme défini dans (6.2.1)) correspondants

en  $x_1, \dots, x_N$  et on obtient ainsi une solution locale  $u$  définie pour  $t > 0$  assez petit.

En effet si  $u_0^i < \dots < u_{n_i}^i$  sont les  $u_i$  définis précédemment pour le problème de Riemann avec  $u^- = \bar{u}(x_i^-)$  et  $u^+ = \bar{u}(x_i^+)$ , on a  $\lambda_k^i = \frac{f(u_k^i) - f(u_{k-1}^i)}{u_k^i - u_{k-1}^i}$ . On pose alors :

$$v(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 + \lambda_1^1 t \\ u_{n_i}^i & \text{si } x_i + \lambda_{n_i}^i t < x < x_{i+1} + \lambda_1^{i+1} t \\ u_j^i & \text{si } x_i + \lambda_j^i t < x < x_i + \lambda_{j+1}^i t \\ 0 & \text{si } x > x_N + \lambda_{n_N}^N t \end{cases}$$

On note  $t_0$  le sup des  $a > 0$  tels que les  $\gamma_{ij}(t) = x_i + \lambda_j^i t$  soient tous distincts pour tout  $t \in ]0; a[$ .  $v$  est alors une solution locale sur  $[0; t_0[$  de  $(E)$  avec  $\bar{u}$  comme condition initiale. Notons  $A$  l'application qui à  $\bar{u}$  donne le couple  $(t_0, v) \in ]0; +\infty[ \times L_{loc}^1([0; t_0[ \times \mathbb{R})$  explicité précédemment. On distingue alors 2 cas :

– Si  $t_0 = +\infty$ , l'algorithme s'arrête.

– Sinon on note  $(t_1, v_1) = A(v(t_0, \cdot))$  avec  $v(t_0, \cdot)$  donnée par la formule ci-dessus et on continue avec  $(t_1, v_1)$ .

On obtient ainsi une suite  $(t_n, v_n)$  qui vérifie la relation de récurrence  $A(v_n(t_n, \cdot)) = (t_{n+1}, v_{n+1})$ . On va essayer de montrer que cette suite est nécessairement finie. Pour une illustration de cet algorithme dans un exemple voir la figure 8.

### 6.3.2 Terminaison de l'algorithme

On définit  $a_n = \left( 2^\nu \text{Tot.Var} \left( v_n \left( \frac{t_n}{2}, \cdot \right) \right), \text{nombre de discontinuités de } v_n \left( \frac{t_n}{2}, \cdot \right) \right) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Le but de ce paragraphe est de montrer que la suite  $(a_n)$  définie ci-dessus est strictement décroissante pour l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , qui est un bon ordre. Cela assurera qu'on a un nombre fini d'étapes dans l'algorithme précédent.

Notons tout d'abord quelques propriétés évidentes de l'application  $A$ . On prend  $A(\bar{u}) = (t_0, v)$ .

- (i) Si  $t_0 < +\infty$  alors  $v(t_0, \cdot)$  vérifie toutes les conditions exigées sur  $\bar{u}$  au début de cette section (Cela justifie la possibilité d'appliquer  $A$  à  $v(t_0, \cdot)$ )
- (ii)  $\forall t \in [0; t_0], \text{Tot.Var}(v(t, \cdot)) \leq \text{Tot.Var}(\bar{u})$ .

Pour montrer la stricte décroissance de  $(a_n)$ , il s'agit dorénavant d'expliciter précisément  $v_1$  en fonction de  $v_0$ .

Si on prend  $\gamma_1(t) < \dots < \gamma_m(t) \forall t < t_0$  la localisation de  $m$  discontinuités qui interagissent au temps  $t_0$ , c'est à dire  $\gamma_1(t_0) = \dots = \gamma_m(t_0)$  (on sait qu'il en existe d'après la définition de  $t_0$ ) ; on note  $u_i = v(t, \gamma_i(t)-)$  et  $u_{m+1} = v(t, \gamma_m(t)+)$ . En  $\gamma_1(t_0)$ ,  $v(t_0, \cdot)$  a donc une discontinuité reliant  $u_0$  à  $u_m$ . Pour expliciter  $v_1$ , il faut résoudre le problème de Riemann correspondant au saut reliant  $u_0$  et  $u_m$ . On distingue alors 2 cas.

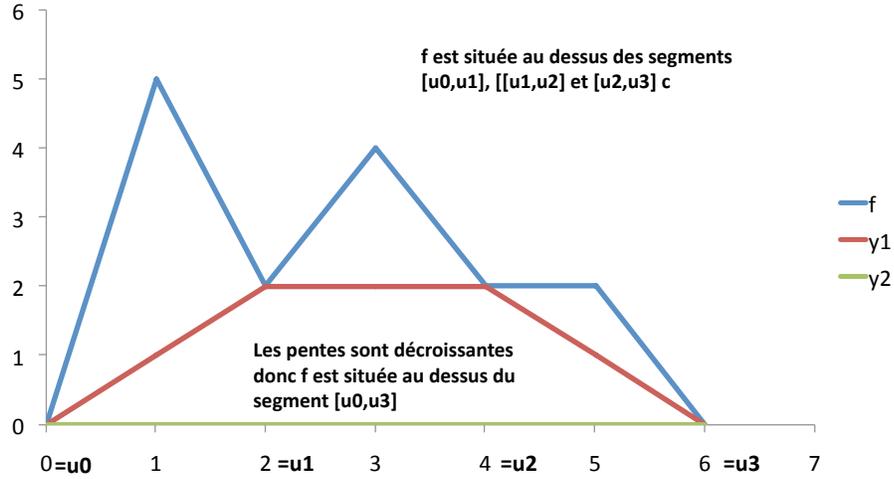


FIGURE 7 – illustration de la preuve du 2ème cas

**1er cas** Si les  $u_i$  ne sont pas rangés dans un ordre strictement croissant ou décroissant alors on note que  $\text{Tot.Var}(v_1(\frac{t_1}{2}, \cdot)) \leq \text{Tot.Var}(v(\frac{t_0}{2}, \cdot)) - 2^{-\nu}$ . En effet,

$$\sum_{i=1}^m |u_{i+1} - u_i| \geq |u_m - u_0| + 2^{-\nu} \text{ d'après l'hypothèse faite sur les } u_i$$

**2ème cas** Si les  $u_i$  sont rangés en ordre strictement croissant ou strictement décroissant, alors le problème de Riemann pour la discontinuité reliant  $u_0$  et  $u_m$  est tout simplement une unique discontinuité se déplaçant à la vitesse  $\frac{f(u_m) - f(u_0)}{u_m - u_0}$ . En effet, il s'agit seulement de voir que cette solution est entropique. Supposons par exemple que  $u_0 < \dots < u_m$ , on sait que  $\dot{\gamma}_1(t) > \dots > \dot{\gamma}_m(t)$  et que le graphe de  $f$  est situé au dessus de la fonction affine par morceaux reliant  $u_0$  à  $u_1$  (de pente  $\dot{\gamma}_1(t)$  sur  $[u_0; u_1]$ ),  $u_1$  à  $u_2, \dots, u_{m-1}$  à  $u_m$ . Or comme les pentes sont décroissantes, cette fonction affine par morceaux est concave donc elle-même est située au dessus du segment reliant  $u_0$  à  $u_m$ . Donc le graphe de  $f$  est bien situé au dessus du segment reliant  $u_0$  à  $u_m$  (voir la figure 7). La solution est entropique. On voit alors que le nombre de discontinuités entre  $v_0$  et  $v_1$  a été réduit d'au moins 1.

Dans les deux cas  $a_n$  décroît strictement.

### 6.3.3 Conclusion

La partie précédente assure qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $t_N = +\infty$  et alors on a bien résolu l'équation (E) en recollant les  $v_n$ . En effet, on peut se ramener au cas  $n = 2$  et il s'agit de voir que  $v$  définie ci-dessous est bien solution sur  $[0; t_0 + t_1]$ . Cela est conséquence du théorème 4 si on exclut les points

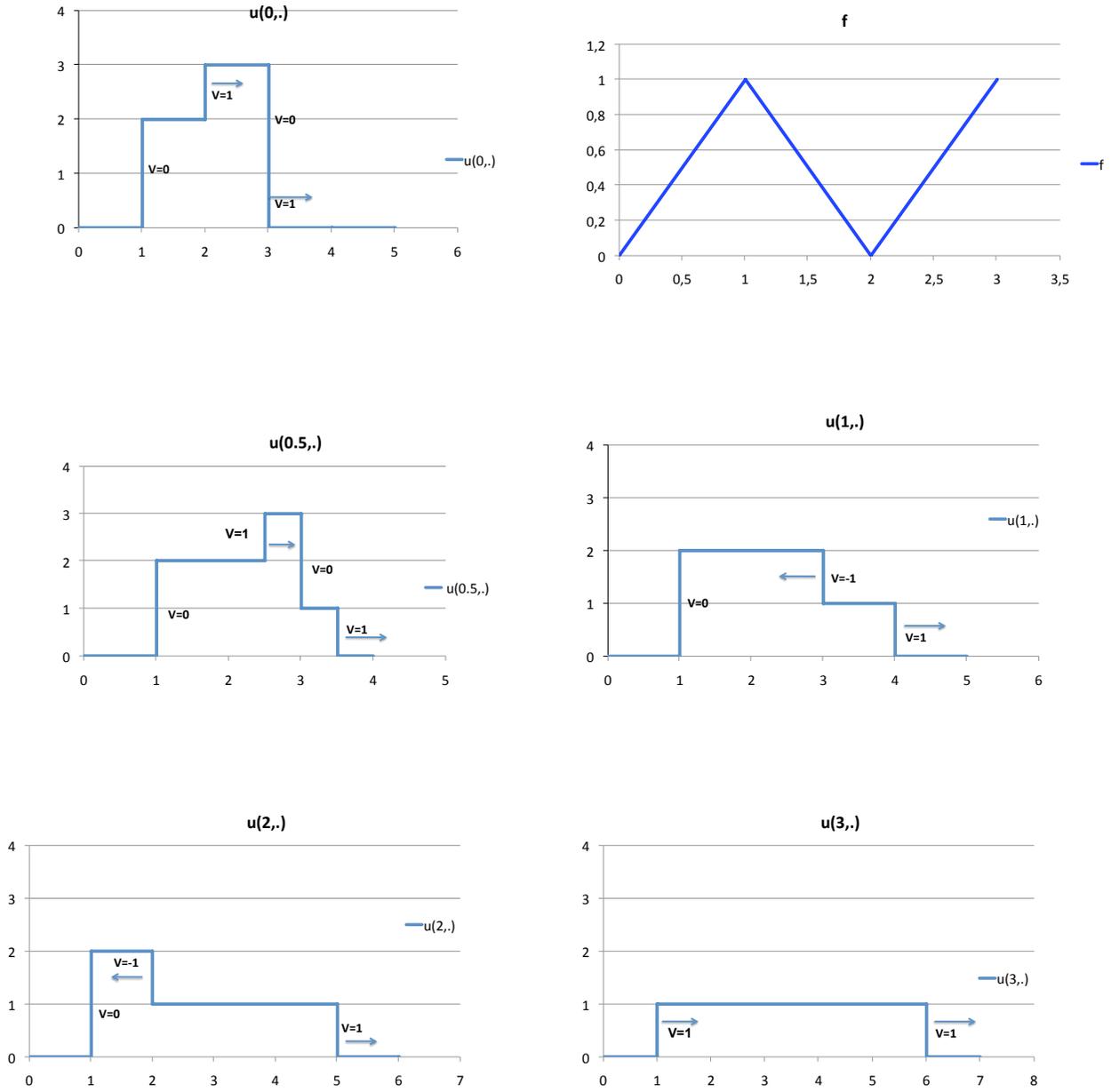


FIGURE 8 – Exemple de résolution de l'équation suivant l'algorithme

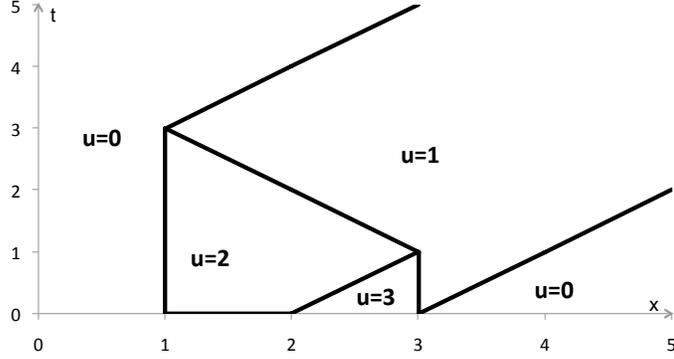


FIGURE 9 – On peut résumer l'évolution précédente par ce diagramme

où des discontinuités se rencontrent (les points  $(t_0, \gamma_j(t_0))$ ) (ce qu'on peut faire d'après les conditions  $L_{pm}$ ).

$$v(t, x) = \begin{cases} v_0(x) & \text{si } x < t_0 \\ v_1(x - t_0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On déduit de cette partie la

**Proposition 3.** *Soit  $\bar{u}$  une fonction en escaliers à variations bornées et dans  $L^1(\mathbb{R})$ . On suppose que  $f = f_\nu$  c'est à dire que  $f$  est affine sur les  $[\frac{j}{2^\nu}, \frac{j+1}{2^\nu}]$  et que  $\bar{u}$  est à valeurs dans  $2^{-\nu}\mathbb{Z}$ . Alors il existe une solution  $u$  au problème de Cauchy avec  $\bar{u}$  comme condition initiale qui vérifie*

$$\forall t \geq 0, \text{Tot. Var}(u(t, \cdot)) \leq \text{Tot. Var}(\bar{u}).$$

## 7 Théorèmes d'existence et d'unicité

### 7.1 Un théorème de compacité

On utilisera dans ce paragraphe le théorème d'Ascoli qu'on rappelle brièvement :

**Théorème 7.** *Soit  $K$  un espace compact et  $(F, d)$  un espace métrique. On munit  $C(K, F)$  de la distance uniforme.  $A \subset C(K, F)$  est relativement compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i)  $\forall x \in K \{f(x); f \in A\}$  est relativement compacte.
- (ii)  $A$  est équicontinue, c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in K, \exists V \in V(x), \forall f \in A, \forall y \in V, d(f(x), f(y)) \leq \epsilon.$$

On démontre une condition suffisante pour qu'un ensemble de  $L^1(I)$  soit compact pour la topologie forte :

**Théorème 8.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $(u_j)_{j \in J}$  une famille de fonctions de  $L^1(I)$  qui vérifie :

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \forall j \in J, \text{Tot.Var}(u_j) < C; \\ \exists u \in L^1(I), \forall j \in J, |u_j| \leq u. \end{aligned}$$

Alors  $(u_j)_{j \in J}$  est relativement compacte dans  $L^1(I)$

*Démonstration.* Pour fixer les notations on considère que  $I = ]a; b[$ .

On prend  $U_j(x) = \text{Tot.Var}(u_j|_{]a;x])}$ .  $U_j$  est croissante positive et bornée par  $C$ . Par un argument diagonal, on prend alors une sous-suite telle que  $U_{\phi(n)}(x)$  converge en tout point  $x \in \mathbb{Q} \cap I$  vers  $U(x)$ .  $U$  est croissante positive et majorée par  $C$ . Cela implique que l'ensemble des points  $x \in [-m; m]$  tel que  $U$  ne soit pas prolongeable par continuité en  $x$  est dénombrable. On note  $K$  cet ensemble. En effet

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \text{ avec } K_n = \{x \in I; \limsup_{y \rightarrow x+} U(y) - \limsup_{y \rightarrow x-} U(y) \geq 1/n\}$$

et  $\text{Card}(K_n) \leq Cn$  car  $U$  étant croissante, pour tout  $\delta > 0$ , elle a au plus  $\lceil \frac{C}{\delta} \rceil$  sauts de hauteur supérieure à  $\delta$ .

On considère désormais une sous-suite  $u_{\psi(n)}$  qui converge en tout point de  $x \in K \cup \mathbb{Q}$  vers  $u(x)$ . Montrons que  $u_{\psi(n)}(x)$  vérifie le critère de Cauchy en tout point  $x \notin K$ . Soient  $q_1, q_2$  deux rationnels tels que  $q_1 < x < q_2$  et  $U(q_2) - U(q_1) \leq 1/n$

$$\begin{aligned} \limsup_{n, n' \rightarrow +\infty} |u_{\psi(n)}(x) - u_{\psi(n')}(x)| &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} |u_{\psi(n)}(x) - u(q_1)| + \limsup_{n' \rightarrow +\infty} |u(q_1) - u_{\psi(n')}(x)| \\ &\leq 2 \cdot \limsup_{n \rightarrow +\infty} |u_{\psi(n)}(x) - u_{\psi(n)}(q_1)| \leq 2 \cdot \limsup_{n \rightarrow +\infty} |U_{\psi(n)}(q_2) - U_{\psi(n)}(q_1)| \\ &\leq 2/n. \end{aligned}$$

Cela assure que  $u_{\psi(n)}$  converge simplement vers  $u$ . Par le théorème de convergence dominée, on a bien une convergence dans  $L^1$ .  $\square$

Et voici le théorème de compacité qu'on va utiliser par la suite :

**Théorème 9.** Soit  $u_n : [0; +\infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions telles que pour tout  $t \geq 0$   $u_n(t, \cdot)$  soit à variations bornées et dans  $L^1$ . Supposons qu'il existe des constantes  $C, M$  et  $L$  strictement positives telles que :

- (i)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (t, x) \in [0; +\infty[ \times \mathbb{R}, |u_n(t, x)| \leq M$ .
- (ii)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R} \text{ Tot.Var}(u_n(t, \cdot)) \leq C$ .
- (iii)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t, t' > 0, \|u_n(t, \cdot) - u_n(t', \cdot)\|_{L^1} \leq L|t - t'|$ .

Alors il existe  $u \in L^1_{loc}([0; +\infty[ \times \mathbb{R})$  et une sous suite  $u_{\phi(n)}$  convergeant dans  $L^1_{loc}([0; +\infty[ \times \mathbb{R})$  vers  $u$  et dans  $\mathcal{C}([0; T], L^1([-M; M]))$ ,  $\forall T > 0, \forall M > 0$ .

*Démonstration.* Soit  $m \in \mathbb{N}$ .

Le (iii) assure que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathcal{C}([0; m], L^1([-m; m]))$  et que cette famille est équicontinue car  $L$ -lipschitzienne.

Soit  $t \geq 0$ . Avec (i) et (ii), on montre que la famille  $u_n(t, \cdot)$  est relativement compacte dans  $L^1([-m; m])$  d'après le théorème 8. Le théorème d'Ascoli assure alors la relative compacité de  $u_n$  dans  $\mathcal{C}([0; m], L^1([-m; m]))$  muni de la distance uniforme. En faisant alors une extraction diagonale avec  $m \rightarrow +\infty$ , on obtient une sous suite de  $u_n$  qui a pour limite  $u$  dans  $L^1_{loc}([0; +\infty[ \times \mathbb{R})$ . La convergence dans  $\mathcal{C}([0; T], L^1([-M; M]))$  est claire par construction de la sous suite.  $\square$

## 7.2 Le théorème d'existence

**Théorème 10.** *Soit  $f$  localement lipschitzienne et  $\bar{u} \in L^1$  une fonction à variations bornées. Alors l'équation (E) admet une solution faible entropique  $u = u(t, x)$  définie pour tout  $t \geq 0$  et on a :*

- (i)  $\text{Tot.Var}(u(t, \cdot)) \leq \text{Tot.Var}(\bar{u})$
- (ii)  $\forall t \geq 0, \|u(t, \cdot)\|_\infty \leq \|\bar{u}\|_\infty.$

*Démonstration.* On note  $M = \|\bar{u}\|_\infty$ . Comme  $\bar{u}$  est à variations bornées, d'après la proposition 2, on peut trouver une suite de fonctions en escaliers  $\bar{u}_\nu \in L^1(\mathbb{R})$  vérifiant :

- (i)  $\bar{u}_\nu(x) \in 2^{-\nu}\mathbb{Z}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $\|\bar{u}_\nu - \bar{u}\|_{L^1} \rightarrow 0.$
- (iii)  $\text{Tot.Var}(\bar{u}_\nu) \leq \text{Tot.Var}(\bar{u}).$
- (iv)  $\|\bar{u}_\nu\|_\infty \leq M.$

On considère désormais l'équation (voir (6.2.1) pour la définition de  $f_\nu$ ) :

$$\begin{cases} v_t + f_\nu(v)_x = 0 \\ v(0, \cdot) = \bar{u}_\nu \end{cases} \quad (PC_\nu)$$

Pour tout  $\nu$ , on note  $u_\nu = u_\nu(t, x)$  la fonction en escaliers solution de  $(PC_\nu)$  qu'on peut trouver grâce à la proposition 3. On note que pour tout  $\nu, t$  et  $x$ , on a :

$$\text{Tot.Var}(u_\nu(t, \cdot)) \leq \text{Tot.Var}(\bar{u}) \text{ et } |u_\nu(t, x)| \leq M.$$

D'autre part soit  $L$  une constante de Lipschitz pour  $f$  sur le compact  $[-M; M]$ . On a alors :

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \forall w, w' \in [-M; M], |f_\nu(w) - f_\nu(w')| \leq L|w - w'|.$$

D'après la formule de Rankine-Hugoniot, cela assure que toutes les vitesses des discontinuités de  $u_\nu$  sont inférieures à  $L$ . Montrons dorénavant qu'on a :

$$\forall t' \geq t, \|u_\nu(t, \cdot) - u_\nu(t', \cdot)\|_{L^1} \leq L|t - t'| \text{Tot.Var}(\bar{u})$$

Si sur  $]t, t'[\times\mathbb{R}$ , on a  $u_\nu$  de la forme (avec  $x_1, \dots, x_k$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  quelconques) :

$$u_\nu(\tau, x) = \begin{cases} u_0 & \text{si } x < x_1 + \lambda_1\tau \\ u_i & \text{si } x_i + \lambda_i\tau < x < x_{i+1} + \lambda_{i+1}\tau \\ u_k & \text{si } x > x_k + \lambda_k\tau \end{cases}$$

$$\text{et } \forall \tau \in ]t, t'[, x_1 + \lambda_1\tau < \dots < x_k + \lambda_k\tau.$$

On prend alors  $\Phi_n$  une fonction  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  qui tend vers la somme des Diracs  $\delta_t - \delta_{t'}$  au sens des mesures (qu'on peut trouver par convolution par exemple). Si on pose  $\phi_n(x) = \int_{-\infty}^x \Phi_n(u) du$  alors  $\phi_n$  converge vers la fonction plateau  $\chi_{[t, t']}$  au sens des mesures. Soit  $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Comme  $u_\nu$  est solution de  $(PC_\nu)$ , on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u_\nu(\tau, x) \phi_n'(\tau) \phi(x) d\tau dx = - \iint_{\mathbb{R}^2} f_\nu(u_\nu(\tau, x)) \phi_n(\tau) \phi'(x) d\tau dx.$$

Or  $u_\nu \in \mathcal{C}([0; -\infty[, L^1(\text{supp } \phi))$ . Donc on peut passer à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans l'égalité précédente :

$$\int_{\mathbb{R}} (u_\nu(t, x) - u_\nu(t', x)) \phi(x) dx = - \int_t^{t'} \int_{\mathbb{R}} f_\nu(u_\nu(\tau, x)) \phi'(x) dx d\tau.$$

A  $\tau$  fixé,  $f_\nu \circ u_\nu(\tau, \cdot)$  est une somme de fonctions de type Heavyside donc on connaît sa dérivée au sens des distributions en  $x$  :

$$\partial_x (f_\nu \circ u_\nu)(\tau, x) = \sum_{i=1}^k \left( f_\nu(u_i) - f_\nu(u_{i-1}) \right) \delta_{x_i + \lambda_i \tau}.$$

$$\text{Donc } - \int_t^{t'} \int_{\mathbb{R}} f_\nu(u_\nu(\tau, x)) \phi'(x) dx d\tau = \int_t^{t'} \sum_{i=1}^k \left( f_\nu(u_i) - f_\nu(u_{i-1}) \right) \phi(x_i + \lambda_i \tau) d\tau.$$

$$\text{et } \left| \int_{\mathbb{R}} (u_\nu(t, x) - u_\nu(t', x)) \phi(x) dx \right| \leq \|\phi\|_\infty |t' - t| \sum_{i=1}^k L |u_i - u_{i-1}| \leq L |t - t'| \text{Tot.Var}(u_\nu(t, \cdot)) \|\phi\|_\infty.$$

Cette inégalité est vraie pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  donc par densité pour toute fonction  $\psi \in L^1([-M; M])$  et on obtient (en prenant par exemple  $\psi(x) = \text{sgn}(u_\nu(t, x) - u_\nu(t', x))$ ) que pour tout  $M > 0$  :

$$\int_{-M}^M |u_\nu(t, x) - u_\nu(t', x)| dx \leq L |t - t'| \text{Tot.Var}(\bar{u})$$

D'où l'inégalité voulue :  $\|u_\nu(t, \cdot) - u_\nu(t', \cdot)\|_{L^1} \leq L |t - t'| \text{Tot.Var}(\bar{u})$ .

Sinon, on peut trouver  $t_1 < \dots < t_n$  tels que  $u_\nu$  soit de la bonne forme sur  $]t, t_1[ \times \mathbb{R}, \dots, ]t_n, t' [ \times \mathbb{R}$  et on a alors :

$$\|u_\nu(t, \cdot) - u_\nu(t', \cdot)\|_{L^1} \leq \|u_\nu(t, \cdot) - u_\nu(t_1, \cdot)\|_{L^1} + \dots + \|u_\nu(t_n, \cdot) - u_\nu(t', \cdot)\|_{L^1} \leq L |t' - t| \text{Tot.Var}(\bar{u})$$

De plus d'après le lemme 6, on a :  $\text{Tot.Var}(u_\nu(t, \cdot)) \leq \text{Tot.Var}(\bar{u}_\nu) \leq \text{Tot.Var}(\bar{u})$ . On vérifie alors toutes les hypothèses du théorème de compacité (avec  $L' = L \text{Tot.Var}(\bar{u})$ ) : on peut trouver une sous suite  $u_{\phi(n)}$  qui converge vers  $u$  dans  $L^1_{loc}([0; +\infty[ \times \mathbb{R})$  et dans  $\mathcal{C}([0; T], L^1([-M; M]))$ ,  $\forall T > 0, \forall M > 0$ . On a clairement (i) et (ii) par convergence dans  $L^1_{loc}$ . D'autre part, comme on a convergence de  $u_{\phi(n)}$  dans  $\mathcal{C}([0; 1], L^1([-M; M]))$   $\forall M > 0$ ,  $\|u(0, \cdot) - \bar{u}\|_{L^1} = 0$ .  $\square$

### 7.3 Théorème d'unicité

Citons aussi dans ce document un théorème dû à Kruzhkov [1] :

**Théorème 11.** *On prend  $f$  localement lipschitzienne. Et on note  $u, v$  deux solutions entropiques bornées de  $(E)$  tel que  $\|u(0, \cdot) - v(0, \cdot)\|_{L^1} < \infty$ . Alors  $\forall t \geq 0$ , on a :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x) - v(t, x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u(0, x) - v(0, x)| dx.$$

*En particulier, pour toute condition initiale  $\bar{u} \in L^\infty$ , le problème de Cauchy a au plus une solution entropique bornée.*

On peut regrouper les théorèmes d'existence et d'unicité :

**Théorème 12.** *On suppose  $f$  localement lipschitzienne. Soit  $\bar{u} \in L^1 \cap L^\infty$  une condition initiale à variations bornées. Alors le problème de Cauchy possède une unique solution faible entropique bornée.*

**Remerciements** Nous tenons à remercier fortement Anne-Laure Dalibard pour sa présence, ses conseils avisés et son aide mathématique précieuse.

## Références

- [1] Bressan A. : *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, chapitres 2, 4 et 6, Oxford University Press, 2000
- [2] Serre D. : *Systèmes de lois de conservation. I. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc*. Diderot Éditeur 1996
- [3] Carlier G. *Notes de cours d'Analyse Fonctionnelle*, chapitre 2, 2010
- [4] Stein E. *Singular integrals and differentiability properties of functions*, chapitre 3, Princeton University Press 1970
- [5] Evans L. *Partial Differential Equations*, chapitre 3.4, Graduate Studies in Mathematics, 1999