Solutions périodiques d'EDP elliptiques

1 Introduction

Le but de ce mémoire est l'étude des opérateurs différentiels elliptiques à coefficients périodiques. On expose les résultats de chapitre 3 du livre de Bers, John, Schechter [1]. C'est un livre paru en 1964, relativement ancien puisque la théorie s'est développée depuis ; on a noté que certaines définitions sont stricto sensu différentes des définitions modernes (bien qu'elles soient équivalentes) et que certains points peuvent être simplifiés en utilisant des résultats désormais connus - nous pensons à la théorie sur les opérateurs de Fredolhm s'est développée depuis. Nous étudierons en annexe la théorie des opérateurs pseudodifférentiels, afin de comprendre dans un cadre plus général l'inégalité fondamentale vérifiée par les opérateurs elliptiques, qui permet de démontrer tous les autres résultats : l'inégalité de Gårding.

Commençons par définir ce qu'est un opérateur elliptique : il s'agit d'un opérateur différentiel dont les coefficients du plus haut degré forment un polynôme de signe strictement constant hors de 0. Plus précisément, si $\mathbf{L} = \sum_{|p|\leq m} a_p(x)D^p$ où m est le degré de $\mathbf{L}$, alors on considère la forme caractéristique $Q(x,\xi) = \sum_{|p|=m} a_p(x)\xi^p$ et on dit que L est elliptique si et seulement s'il existe un m' tel que :

$$\forall x,\, \forall \xi \neq 0,\, (-1)^{m'}Q(x,\xi) > 0 \tag{1}$$

Comme l'étude de l'équation $\mathbf{L}u = f$ est inchangée en substituant $-\mathbf{L}$ à $\mathbf{L}$ et comme cette définition entraîne que m est forcement pair, on peut sans perdre de généralité supposer $m' = m/2$, ce que l'on fera par la suite.

Afin de mieux comprendre l'origine de cette définition, considérons un opérateur différentiel $\mathbf{L}$ de degré 2. On peut alors démontrer qu'il est elliptique si et seulement si les lignes de niveau du polynôme caractéristique $\sum_{|p|\leq m} a_p(x)\xi^p$ (noter que la somme porte sur $p \leq m$) définissent des ellipses, sauf cas dégénérés. De plus, si les coefficients sont constants, la théorie de réduction des formes quadratiques montre que le monôme du plus haut degré de $\mathbf{L}$ est, modulo un simple changement de coordonnées linéaire, égal à l'opposé du laplacien.

2 Espaces de Hilbert dans le cas périodique

Une grande partie du problème est de définir de bons espaces de fonctions, entre lesquels $\mathbf{L}$ se comportera de manière simple. Comme on le verra dans ce mémoire, un choix intéressant est celui des espaces de Hilbert, notés H_t ($t \in \mathbb{Z}$). Ils sont définis comme le complété des fonctions C^∞ pour la norme $\|.\|_t$; dans le cas périodique, la décomposition en série de Fourier nous permet de définir cette norme d'une façon simple. On écrit $u = u(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \alpha_l e^{il\cdot x}$ avec $l \cdot x = l_1x_1 + \cdots + l_nx_n$, et la condition $\alpha_{-l} = \overline{\alpha}_l$. Pour chaque $t \in \mathbb{Z}$ on définit la norme $\|\cdot\|_t$ comme la norme associée au produit scalaire

$$(u,v)_t = (2\pi)^n \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} (1 + l\cdot l)^t \alpha_l \beta_{-l}$$

ou $v = \sum \beta_l e^{il\cdot x}$. On note que

$$(u,v)_0 = \int u(x)v(x)dx$$

$$\alpha_l = (u, e^{il\cdot x})_0 \tag{2}$$

On a alors $H_0 = \mathbf{L}^2$. Ces normes $\|\cdot\|_t$ sont dépendantes, on a en effet une généralisation de Cauchy-Schwarz (qui n'est rien d'autre qu'une réécriture de Cauchy-Schwarz) : pour chaque s,t

$$|(u,v)_s| \leq \|u\|_{s+t}\|v\|_{s-t} \tag{3}$$

qui pour $u = v$ donne

$$\|u\|_s^2 \leq \|u\|_{s+t}\|u\|_{s-t} \tag{4}$$

On a également l'inégalité :

$$\|u\|_s \leq \|u\|_t \text{ pour chaque } s < t$$

et alors $H_t \subset H_s$. Il est aisé de vérifier que :

$$(1 + l\cdot l)^s \leq \epsilon(1 + l\cdot l)^{t_1} + \epsilon^{-(s-t_2)/(t_1-s)}(1 + l\cdot l)^{t_2}$$

On obtient alors :

$$|(u,v)_s| \leq \epsilon(\tilde{u},\tilde{v})_{t_1} + \epsilon^{-(s-t_2)/(t_1-s)}(\tilde{u},\tilde{v})_{t_2} \tag{5}$$

Où pour $u = \sum \alpha_l e^{il.x}$, $\tilde{u}$ est défini par $\tilde{u} = \sum |\alpha_l| e^{il.x}$.

Donc en prenant u=v, en utilisant $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour $a, b \geq 0$ et en remarquant naturellement que $\|\tilde{u}\|_t = \|u\|_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$:

$$\|u\|_s \leq \epsilon\|u\|_{t_1} + \epsilon^{-(s-t_2)/(t_1-s)}\|u\|_{t_2} \text{ pour chaque } t_1 > s > t_2,\ \epsilon > 0 \tag{6}$$

Comme les dérivées partielles agissent terme à terme dans les sommes de Fourier, on a $D^p \sum \alpha_l e^{il\cdot x} = \sum (il)^p \alpha_l e^{il\cdot x}$ ou $(il)^p = (il_1)^{p_1}(il_2)^{p_2}\dots(il_n)^{p_n}$. Cela donne alors

$$\|D^p u\|_t \leq \|u\|_{t+|p|} \tag{7}$$

et en développant $(1 + l\cdot l)^t$ on a

$$\|u\|_t \leq \text{ (const. dependant de } t) \sum_{|p|\leq t} \|D^p u\|_0 \tag{8}$$

L'opérateur elliptique $\mathbf{K} := 1 - \Delta$ induit naturellement des isométries sur les espaces de Hilbert. En effet, on a $\mathbf{K}\sum \alpha_l e^{il\cdot x} = \sum (1 + l\cdot l)\alpha_l e^{il\cdot x}$ et donc pour chaque $t \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{K}^t \sum \alpha_l e^{il\cdot x} = \sum (1 + l\cdot l)^t \alpha_l e^{il\cdot x}$$

et donc pour chaque s, t :

$$(\mathbf{K}^t u, v)_s = (u, \mathbf{K}^t v)_s = (u,v)_{s+t} \tag{9}$$

$$\|\mathbf{K}^t u\|_s = \|u\|_{s+2t} \tag{10}$$

Concentrons-nous maintenant sur les propriétés des espaces H_t. On a déjà vu $H_0 = \mathbf{L}^2$ et $H_t \subset H_s$ si $t > s$. Montrons que $H_\infty = \bigcap H_t$ est l'espace des fonctions C^∞ périodiques. En effet, les fonctions périodiques de classe C^t sont dans H^t d'après (7), et pour l'inclusion inverse on montre

Lemme 2.1 *Soit $u(x) \in H_t$ et $t \geq \lfloor n/2 \rfloor + k + 1$, alors u est de classe C^k et*

$$\max |D^p u| \leq \textit{const. } \|u\|_t \qquad \textit{pour chaque } p \textit{ avec } |p| \leq k$$

D'après (7) il est suffisant de démontrer le cas $k = 0$. Soit $u = \sum \alpha_l e^{il\cdot x}$ et $t \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1 > \lfloor n/2 \rfloor$. On a donc

$$\left(\sum |\alpha_l|\right)^2 = \sum (1 + l \cdot l)^t |\alpha_l|^2 (1 + l \cdot l)^{-t} \leq \sum (1 + l \cdot l)^t |\alpha_l|^2 \sum (1 + l \cdot l)^{-t} < +\infty$$

et alors la série de Fourier de u converge uniformément et $\max |u| \leq \sum |\alpha_l| \leq \left(\sum (1 + l \cdot l)^{-t}\right)^{1/2} \|u\|_t$.

Il serait aussi possible - résultats que l'on ne démontrera pas ici - de montrer que $H_{-\infty} = \bigcup H_t$ est l'espace des distributions périodiques, et H_{-t} les distributions pour lesquelles l'image de chaque suite convergente pour $\|\cdot\|_t$ est convergente. On démontrera néanmoins les trois résultats suivants :

Lemme 2.2 *Les espaces H_t et H_{-t} sont duaux pour le produit $(\cdot, \cdot)_0$.*

Lemme 2.3 *Si $\boldsymbol{L}$ est un opérateur différentiel (pas nécessairement elliptique) d'ordre m dont les coefficients sont C_∞ et périodiques, alors pour chaque $u \in H_t$ on a $\boldsymbol{L}u \in H_{t-m}$ et*

$$\|\boldsymbol{L}u\|_{t-m} \leq \textit{const.}\ \|u\|_t$$

Lemme 2.4 *Si $s < t$ alors H_t est relativement compact dans H_s.*

Commençons par le lemme 2.2. L'une des inclusions est directe d'après (3). Soit alors ω une forme linéaire sur H_t. Par la théorème de représentation il existe une unique $\hat{v} \in H_t$ tel que $\omega(u) = (u, \hat{v})_t$ et $\|\omega\| = \|\hat{v}\|_t$. Soit $v = \mathbf{K}^t \hat{v}$. Alors (9) et (10) nous donnent directement $v \in H_{-t}$, $\|v\|_{-t} = \|\hat{v}\|_t$ et $(u, v)_0 = (u, \hat{v})_t = \omega(u)$. Comme $\|\mathbf{K}^t(\hat{v} - \hat{v'})\|_{-t} = 0$ implique $\|\hat{v} - \hat{v'}\|_t = 0$ et donc $\hat{v} = \hat{v'}$ on a unicité.

Le lemme 2.3 s'obtient comme corollaire de (en l'appliquant avec (7)) :

Lemme 2.5 *Si ϕ est C_∞ et $u \in H_t$ alors $\phi u \in H_t$ et*

$$\|\phi u\|_t \leq (\textit{const dépendant de } \phi) \|u\|_t$$

Par densité des fonctions C_∞ il suffit de montrer la dernière équation pour $u \in H_\infty$. Si $t \geq 0$ on applique (8) pour retrouver la norme $\|\cdot\|_0$ et en appliquant (7) on trouve l'inégalité avec une constante dépendante des dérivées de ϕ d'ordre plus petit que t. Sinon, soit $t = -s < 0$. Alors par lemme 2.2 et (3) on a

$$\begin{aligned} \|\phi u\|_{-s} &= \sup\{(\phi u, v)_0 / \|v\|_s\} = \sup\{(u, \phi v)_0 / \|v\|_s\} \\ &\leq \|u\|_{-s} \frac{\|\phi v\|_s}{\|v\|_s} \leq \text{const.}\ \|u\|_{-s} \end{aligned}$$

Finalement, montrons le lemme 2.4. Soit $\left(u^{(j)}\right)_j = \left(\sum a_l^{(j)} e^{il\cdot x}\right)_j$ une suite bornée par M pour la norme $\|\cdot\|_t$. On va montrer qu'il existe une sous-suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_s$. Notons que $|a_j^{(l)}| \leq M(1 + l \cdot l)^{-t/2}$ et donc, vu que les ensembles fermés bornés inclus dans $\mathbb{C}$ sont compacts, on peut supposer que pour chaque l la suite $a_j^{(l)}$ converge par procédé d'extraction diagonale. Soit $u_N^{(j)} = \sum_{l \cdot l \leq N^2} a_l^{(j)} e^{il\cdot x}$ et $u^{(j)} = u_N^{(j)} + v_N^{(j)}$. Clairement, pour un N fixé, on a $\|u_N^{(j)} - u_N^{(k)}\|_s$ arbitrairement petit si j, k sont assez grands. De plus, $\|v_N^{(j)} - v_N^{(k)}\|_s^2 \leq (1 + N^2)^{s-t} M^2$ qui est, pour N assez grand, arbitrairement petit pour chaque j, k. Alors on choisit d'abord N tel que le deuxième terme soit plus petit que $\epsilon/2$ pour chaque j, k, et ensuite l tel que pour $j, k \geq l$ $\|u_N^{(j)} - u_N^{(k)}\|_s \leq \epsilon/2$, ce qui nous donne finalement pour $j, k \geq l$, $\|u^{(j)} - u^{(k)}\| \leq \epsilon$.

3 Inégalités principales

Dans cette partie on se fixe un opérateur elliptique périodique **L** et on démontre les inégalités principales (les constantes et paramètres sont tous dépendants de **L**).

Théorème 3.1 *Inégalité de Gårding : Il existe* c_1*,* $c_2 > 0$*, tels que pour toute fonction* u C^∞ *périodique,*

$$(u, Lu)_0 \geq c_1 \|u\|^2_{\frac{m}{2}} - c_2 \|u\|^2_0$$

L étant par hypothèse elliptique, il existe donc $c > 0$ tel que pour $x \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$(-1)^{m/2} \sum_{|p|=m} a_p(x) \xi^p \geq c|\xi|^m$$

En effet, par homogénéité en ξ et périodicité en x, on se ramène à minorer une fonction continue strictement positive sur un compact.

Premier cas : L a des coefficients constants et uniquement des termes de degré maximal, m. Alors $L = \sum_{|p|=m} a_p D^p$ et pour $u = \sum \alpha_l e^{il.x}$,

$$\begin{aligned}
(u, Lu)_0 &= \left(\sum \alpha_l e^{il.x}, \sum (\sum_{|p|=m} a_p (il)^p) \alpha_l e^{il.x}) \right)_0 \\
&= \sum (-1)^{m/2} Q(l) |\alpha_l|^2 \\
&\geq c \sum (l.l)^{m/2} |\alpha_l|^2 \\
&\geq c \sum [1 + (l.l)^{m/2}] |\alpha_l|^2 - c \sum |\alpha_l|^2 \\
&\geq c' \|u\|^2_{m/2} - c \|u\|^2_0
\end{aligned}$$

où $c' = c.sup_{\xi \in \mathbb{R}_+} \frac{1+\xi^m}{(1+\xi^2)^{m/2}}$

Deuxième cas : L a seulement des termes de degré maximal m, et $L = L_0 + L_1$ où L_0 à coefficients constants, et $L_1 = \sum_{|p|=m} b_p(x) D^p$ avec $max|b_p(x)| \leq \eta$, η assez petit.

Le cas 1 montre l'inégalité pour L_0, notons $(u, L_0 u)_0 \geq c_0 \|u\|_{m/2} - c_0' \|u\|_0$. Il reste donc à traiter le terme perturbatif L_1, en choisissant η assez petit de façon à ce que l'inégalité reste valable pour $L_0 + L_1$.

En intégrant par parties (on dérive $x \to b_p(x)u(x)$ et intègre $x \to D^p u(x)$), et en notant que les termes aux bords se compensent par périodicité, on obtient :

$$(u, L_1 u)_0 = \int [\sum_{|p|=m} b_p(x) u(x) D^p u(x)] \, dx = I_1 + I_2$$

Où :

$$I_1 = \sum \int b_p D^{p'} u D^{p''} u \, dx$$

Sommé sur les |p|=m, |p'| = |p"| = m/2.

$$I_2 = \sum \int b_{p,q} D^p u D^q u \, dx$$

Sommé sur les $|p| < m/2$, $|q| \leq m/2$, les $b_{p,q}$ étant des combinaisons linéaires des b_s et de leurs dérivées que l'on ne cherchera pas à calculer ; notons simplement qu'elles sont C^∞ périodiques.

En utilisant les inégalités (4, 7) on obtient :

$$|I_1| = |\sum (b_p D^{p'}u, D^{p''}u)_0| \leq \eta c_1 \|u\|_{m/2}^2$$

Et en utilisant les inégalités (7)

$$\begin{aligned}
|I_2| = |\sum (b_{p,q} D^p u, D^q u)_0| &\leq \text{const.} \sum |(D^p u, D^q u)_0| \\
&\leq \epsilon \text{const.} \sum (D^{\tilde{p}} u, D^{\tilde{q}} u)_{m/2} + \epsilon^{1-m} \text{const.} \sum (D^{\tilde{p}} u, D^{\tilde{q}} u)_{-m/2} \\
&\leq \text{const.} \|u\|_{m/2} . (\epsilon . \|u\|_{m/2} + \epsilon^{1-m} \|u\|_{-m/2}) \\
&\leq \epsilon c_2 \|u\|_{m/2}^2 + \epsilon^{1-m} c_2' \|u\|_0^2
\end{aligned}$$

Où $\epsilon > 0$. Noter que les constantes c_1, c_2, c_2' sont indépendantes de u, ϵ et η.

En choisissant ϵ et η assez petits, par exemple tels que $\eta c_1 \leq \frac{c_0}{3}$ et $\epsilon c_2 \leq \frac{c_0}{3}$, on obtient l'inégalité souhaitée.

Troisième cas : $L = L_0 + L_1 + L_2$ où L_0, L_1 sont comme dans le deuxième cas, et $L_2 = \sum_{|p|<m} a_p(x) D^p$.

Par le deuxième cas, on a l'inégalité pour $L_0 + L_1$. Pour L_2, on se ramène par intégration par parties à un terme de la forme I_2 que l'on sait déjà traiter, ce qui permet de démontrer le résultat par la même méthode, en prenant ϵ assez petit.

Cas général : Soit $\eta > 0$. Par uniforme continuité des a_p, on construit des fonctions périodiques C^∞, $\omega_1, .., \omega_n$ ayant les propriétés suivantes :

— Sur le support de chaque ω_j, l'oscillation de chacun des a_p, |p|=m est plus petite que η.

— $\sum \omega_j(x)^2 = 1$

Par le troisième cas :

$$(\omega_j u, L\omega_j u)_0 \geq pos.\text{const.} \|\omega_j u\|_{m/2}^2 - \text{const.} \|\omega_j u\|_0^2$$

Par ailleurs,

$$(u, Lu)_0 = \int (\sum \omega_j^2) u Lu \, dx = \sum (\omega_j u, L\omega_j u)_0 + R$$

Où $R = -\sum \int \omega_j u . (L\omega_j u - \omega_j Lu) \, dx$

A l'aide d'intégrations par parties, on obtient :

$$R = -\sum \int c_{pq} D^p u D^q u \, dx, |p| + |q| < m, |m| \leq m/2, |q| \leq m/2$$

Où les c_{pq} sont des fonctions C^∞ périodiques.

Puis, comme dans les cas précédents,

$$|R| \leq \epsilon \text{const.} \|u\|_{m/2}^2 + \epsilon^{-m/2} \text{const.} \|u\|_0^2$$

Clairement, $\|\omega_j u\|_0 \leq \|u\|_{m/2}$, et il n'est pas difficile de vérifier avec (7) et (8) que :

$$\sum \|\omega_j u\|_{m/2}^2 \geq pos.\text{const.} \|u\|_{m/2}^2 - \text{const.} \|u\|_0^2$$

Il vient alors l'inégalité de Gårding, en utilisant l'expression de $(u, Lu)_0$ et les inégalités démontrées au cours du raisonnement, en prenant ϵ assez petit.

Théorème 3.2 *Il existe $\Lambda > 0$ et $c_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et pour tout u C^∞ périodique,*

$$\|u\|_t \leq c_3(t) \|Lu + \lambda u\|_{t-m}$$

Dans ce mémoire, on ne démontrera l'inégalité que dans une forme faible (qui suffira pour la démonstration des points qui nous intéressent) : l'inégalité tient pour $\lambda > \Lambda_0(t)$ où $\Lambda_0(t)$ dépend non seulement de L, mais aussi de t. Soit s un entier positif. Les opérateurs différentiels $K^s L$ et LK^s, d'ordre $m + 2s$, sont elliptiques ; donc, par l'inégalité de Gårding, il existe des constantes positives c'_1, c'_2 dépendantes de s telles que :

$$(u, K^s Lu)_0 \geq c'_1 \|u\|^2_{s+m/2} - c'_2 \|u\|^2_0$$

$$(u, LK^s u)_0 \geq c'_1 \|u\|^2_{s+m/2} - c'_2 \|u\|^2_0$$

En utilisant la première inégalité avec (10,3,9,2) on obtient :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{s+m/2} \|Lu + \lambda u\|_{s-m/2} &= \|u\|_{s+m/2} \|K^s Lu + \lambda K^s u\|_{-s-m/2} \\
&\geq (u, K^s Lu + \lambda K^s u)_0 \\
&\geq c'_1 \|u\|^2_{s+m/2} - c'_2 \|u\|^2_0 + \lambda (u, K^s u)_0 \\
&\geq c'_1 \|u\|^2_{s+m/2} - c'_2 \|u\|^2_0 + \lambda \|u\|^2_s \\
&\geq c'_1 \|u\|^2_{s+m/2} + (\lambda - c'_2).\|u\|^2_0 \\
&\geq c'_1 \|u\|^2_{s+m/2} \text{ pour } \lambda \geq c'_2
\end{aligned}$$

En divisant par $\|u\|_{s+m/2}$, on obtient l'inégalité souhaitée pour $t = s + m/2$, qui reste évidemment valide si $u = 0$.

De manière similaire,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{-s-m/2} \|Lu + \lambda u\|_{-s-m/2} &= \|K^{-s} u\|_{s+m/2} \|Lu + \lambda u\|_{-s-m/2} \\
&\geq (K^{-s} u, Lu + \lambda u)_0 \\
&= (K^{-s} u, LK^s K^{-s} u + \lambda u) \\
&\geq c'_1 \|K^{-s} u\|^2_{s+m/2} - c'_2 \|K^{-s} u\|^2_0 + \lambda \|u\|^2_{-s} \\
&= c'_1 \|u\|^2_{-s+m/2} - c'_2 \|u\|^2_{-2s} + \lambda \|u\|^2_{-s} \\
&\geq c'_1 \|u\|^2_{-s+m/2} \text{ pour } \lambda \geq c'_2
\end{aligned}$$

De même, en divisant par $\|u\|_{-s+m/2}$ on obtient l'inégalité souhaitée avec $t = -s + m/2$.

4 Applications

Les outils développés dans les parties précédentes permettent de démontrer des résultats sur le problème initial. Le théorème (3.2) implique :

Théorème 4.1 *Pour chaque t et chaque $\lambda > 0$ assez grand, l'opérateur $\mathbf{L} + \lambda$ est linéaire continu bijectif entre H_t et H_{t-m} et son inverse est aussi continu, la norme de l'inverse étant bornée indépendamment de λ.*

On a déjà $\mathbf{L} + \lambda$ continu de H_t dans H_{t-m} d'après (2.3). On peut choisir λ en utilisant (3.2). On a donc $\mathbf{L}u + \lambda u = 0$ implique $u = 0$ donc l'opérateur est bijectif dans son image. Le résultat de (3.2) nous donne aussi que l'inverse est continu de norme bornée indépendamment de λ pour chaque $\lambda > \Lambda$. Il ne reste qu'à montrer que l'image $R_t = (\mathbf{L} + \lambda)(H_t)$ est bien H_{t-m} tout entier.

Montrons que R_t est fermé. Soit $v_j \in R_t$ et v tels que $\|v_j - v_t\|_{t-m} \to 0$. Si $(\mathbf{L} + \lambda)u_j = v_j$, on a $\|u_j - u_k\|_t \leq c_3(t) \|v_j - v_k\|_{t-m}$ et comme les espaces H_t sont complets, u_j est convergente, disons vers u. Maintenant, (2.3) donne $\|(\mathbf{L} + \lambda)u_j - (\mathbf{L} + \lambda)u\|_{t-m} \to 0$ et donc $v = (\mathbf{L} + \lambda)u \in R_t$.

Il suffit alors de considérer $\omega \in H_{t-m}$ tel que $(w, (\mathbf{L}+\lambda)u)_{t-m} = 0$ pour chaque $u \in H_t$. Soit $\mathbf{L}^*$ l'adjoint de $\mathbf{L}$ pour $(\cdot,\cdot)_0$. En utilisant les propriétés de $\mathbf{K}$ on a $0 = (\mathbf{K}^{t-m}\omega, \mathbf{L}u + \lambda u)_0 = (\mathbf{L}^*\mathbf{K}^{t-m}\omega + \lambda\mathbf{K}^{t-m}\omega, u)_0$ pour chaque $u \in C_\infty \subset H_t$, et donc $\mathbf{L}^*\mathbf{K}^{t-m}\omega + \lambda\mathbf{K}^{t-m}\omega = 0$. On note maintenant que l'on peut choisir λ assez grand pour vérifier le résultat du théorème 3.2 pour $\mathbf{L}$ et $\mathbf{L}^*$, avec t remplacé par $m-t$ pour l'adjoint, car $\mathbf{K}^{t-m}\omega \in H_{m-t}$. On a donc $\mathbf{K}^{t-m}\omega = 0$ et donc $\omega = 0$ ce qui montre $R_t = H_{t-m}$.

Cela implique le résultat essentiel :

Théorème 4.2 *Si u est une distribution périodique et $\boldsymbol{L}u \in H_s$, alors $u \in H_{s+m}$.*

On a $u \in H_{-\infty}$ donc $u \in H_k$ pour un certain k. Alors $\mathbf{L}u + \lambda u \in H_{min(s,k)}$ et pour λ assez grand cela montre $u \in H_{min(s+m,k+m)}$. Dès que $k + jm < s$ on a $min(k + (j+1)m, s+m) = k + (j+1)m = m + min(k + jm, s)$ donc en ré-appliquant le même argument on trouve $u \in H_{s+m}$.

Les solutions de $\mathbf{L}u = f$ sont donc des fonctions plus régulières que f; en particulier si f est C^∞ alors les solutions sont également C^∞.

On peut désormais démontrer le résultat principal :

Théorème 4.3 *Pour chaque $t \in \mathbb{Z}$, l'opérateur $\boldsymbol{L} : H_t \to H_{t-m}$ est un opérateur de Fredholm d'indice* 0.

En effet, le théorème 4.1 montre déjà que $\mathbf{L}+\lambda$ l'est pour λ assez grand. Mais $\mathbf{L} = \mathbf{L}+\lambda-\lambda$ et comme d'après le théorème 2.4, l'inclusion Id de H_t dans H_{t-m} est compacte, λId est également compact. $\mathbf{L}$ est alors la somme d'un opérateur de Fredholm d'indice 0 et d'un opérateur compact, c'est pourquoi $\mathbf{L}$ aussi un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Application : Dans toute variété riemannienne, il existe une généralisation du laplacien, appelée opérateur de Laplace-Beltrami. Ici, on ne s'intéressera pas aux détails de sa définition. Considérons $\mathcal{T}_{r,R}$ le tore dans $\mathbb{R}^3$, de rayons r, R, et prenons directement l'expression de l'opérateur de Laplace-Beltrami dans $\mathcal{T}_{r,R}$ calculée dans l'article de Christopher-Green [2] :

$$\nabla^2_{\mathcal{T}_{r,R}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{(R-r\cos\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\sin\theta}{r(R-r\cos\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Cet opérateur est, pour tout $0 < r < R$ un opérateur elliptique.

Cet opérateur peut être vu comme un opérateur périodique de $\mathbb{R}^2$. On considère alors l'équation $(\lambda - \nabla^2_{\mathcal{T}_{r,R}})u = f$ avec $f \in \mathbf{L}^2$ et on applique les résultats du mémoire. Par théorème 4.2, u est nécessairement dans H_2, et par théorème 4.3, $\lambda - \nabla^2_{\mathcal{T}_{r,R}}$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0 entre H_2 et $\mathbf{L}^2$. Si λ n'est pas valeur propre de $\nabla^2_{\mathcal{T}_{r,R}}$, alors le noyau est trivial. Dans ce cas l'opérateur est bijectif. Par l'injection compacte de H_2 dans $\mathbf{L}^2$, l'inverse peut être vu comme un opérateur compact de $\mathbf{L}^2$ dans $\mathbf{L}^2$.

5 Opérateurs Pseudodifferentiels

Dans cette section on exposera les idées générales de la théorie des opérateurs pseudodifférentiels, telle qu'elle est décrite dans le livre de G. Bolland [3], le but étant de donner une idée de preuve d'un équivalent de l'inégalité de Gårding, valable dans ce cadre plus général. On ne travaille désormais plus sur les opérateurs et fonctions périodiques, et on prendra la convention $D = \frac{1}{2i\pi}(\partial_1, \ldots, \partial_n)$.

On a déjà vu que, dans le cas périodique $P(D)\sum \alpha_l e^{il\cdot x} = \sum P(il)\alpha_l e^{il\cdot x}$ pour tout polynôme P. Cette idée n'est pas exclusive aux opérateurs périodiques - la transformée de Fourier nous permet d'écrire $(D^\alpha u)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha \hat{u}(\xi)$. Alors, avec la formule d'inversion, chaque opérateur différentiel $\mathbf{L}$ peut s'écrire :

$$\mathbf{L}u(x) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

où $p(x,\cdot)$ est un polynôme dont les coefficients dépendent en $x \in \Omega$ de façon C^∞.

L'idée des opérateurs pseudodifférentiels est alors de remplacer p par une fonction qui n'est plus polynomiale. Il faut toutefois ajouter quelques contraintes, puisque sinon ils décriraient une classe d'opérateurs trop grande (en acceptant toute distribution tempérée p, il serait possible de montrer que toute fonction linéaire continue de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur différentiel, ce qui évidemment met en doute l'intérêt de la notion). On ajoute alors la contrainte suivante, à savoir qu'ils se comportent d'une manière similaire aux polynômes : qu'ils croient comme des polynômes et que la dérivation fait décroître l'ordre. Plus précisément, si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{R}$, les symboles d'ordre m sur Ω sont les $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tels que pour tout multiindice α, β et tout compact $K \subset \Omega$ il y a une constante C telle que :

$$\sup_{x\in K} D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi) \leq C(1+|\xi|)^{m-|\beta|}$$

On note S^m l'ensemble des symboles d'ordre m. Un opérateur pseudodifférentiel d'ordre m est alors un opérateur $\mathbf{L}$ qui peut s'écrire sous la forme $p(x,D)$ pour un $p \in S^m$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{L}u(x) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi =: p(x,D)u(x)$$

et leur ensemble est noté Ψ^m. On a, contrairement aux espaces de Hilbert, $S^m \subset S^{m'}$ si $m < m'$. On note alors $S^{-\infty}(\Omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} S^m(\Omega)$ et $S^\infty(\Omega) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} S^m(\Omega)$, et de même pour les espaces $\Psi^\infty(\Omega)$ et $\Psi^{-\infty}(\Omega)$.

Exemples :

1. $p(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}$, $s \in \mathbb{R}$ est un symbole d'ordre s.
2. $p(x,\xi) = e^{-|\xi|^2}$ est dans $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.
3. Si $p \in S^m(\Omega)$ et $\phi \in C^\infty(\Omega)$, alors $(x,\xi) \to \phi(x)p(x,\xi)$ est également dans $S^m(\Omega)$.

Remarque : Un opérateur pseudodifférentiel, contrairement à un opérateur différentiel standard, n'a aucune raison d'être un opérateur local (on rappelle qu'un opérateur T est local s'il vérifie pour tout u, tout x, $Tu(x)$ ne dépend que des valeurs de u au voisinage de x, propriété qui est équivalente à supp $Tu \subset$ supp u pour tout u). On verra cependant plus loin qu'un opérateur pseudodifférentiel vérifie une propriété similaire mais plus faible, nommée pseudo-localité (voir le théorème 5.2).

On peut naturellement associer à un opérateur pseudo-différentiel une distribution, appelée distribution noyau. Une distribution K est dite distribution noyau d'un opérateur T si :

$$\langle Tu, v\rangle = \langle K, v\otimes u\rangle\ , u, v \in C_c^\infty$$

Notons que si un opérateur admet une distribution noyau, cette distribution est unique par densité de l'espace vectoriel engendré par les $v \otimes u$, $u, v \in C_c^\infty$ dans l'espace des fonctions test.

Spécifiquement, si $Tu(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy$, K est la distribution noyau de T. Chaque opérateur pseudodifférentiel admet une distribution noyau - en effet, cette dernière se définit naturellement :

$$\begin{aligned} < p(x,D)u, v > &= \iint e^{2\pi i x\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)v(x)\,d\xi\,dx \\ &= \iiint e^{2\pi i(x-y)\xi} p(x,\xi)v(x)u(y)\,dy\,d\xi\,dx \end{aligned}$$

et le noyau K de $p(x,D)$ est alors

$$K(x,y) = p_2^\vee(x, x-y) \tag{11}$$

où $p_2^\vee$ est la transformée de Fourier de p par rapport à la deuxième variable. Cette distribution est assez régulière : en notant $\triangle_\Omega = \{(x,y) \in \Omega\times\Omega : x = y\}$ il est possible de montrer :

Théorème 5.1 *Soit $p \in S^m(\Omega)$ et K définie par (11). Alors si $|\alpha| \geq m + n + j$ pour un j, $(x-y)^\alpha K(x,y)$ et ses dérivées d'ordre $\leq j$ sont des fonctions continues sur $\Omega \times \Omega$. En particulier, K est une fonction C^∞ sur $(\Omega \times \Omega) \setminus \triangle_\Omega$.*

Cela entraîne des résultats de régularité sur les opérateurs pseudodifférentiels. On définit le support singulier d'une distribution u comme le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel u est une fonction C^∞. On le note sing supp u. On a alors :

Théorème 5.2 *Soit P un opérateur pseudodifférentiel. Alors P est pseudo-local, c'est à dire que pour tout u, sing supp $Pu \subset$ sing supp u.*

Théorème 5.3 *Soit $P \in \Psi^{-\infty}$, alors pour tout $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ on a sing supp $Pu = \varnothing$.*

Cela nous permettra de considérer les opérateurs de $\Psi^{-\infty}$ comme "négligables", et de parler des opérateurs pseudodifférentiels modulo un opérateur de $\Psi^{-\infty}$, d'une manière semblable à L^2 où les fonctions ne sont définies que presque partout. En définissant un opérateur pseudodifférentiel proprement supporté P comme étant un opérateur pseudodifférentiel tel que pour chaque $A \subset \Omega$ compact, on a $\pi_x^{-1}(A) \cap supp(K)$ et $\pi_y^{-1}(A) \cap supp(K)$ compacts où K est le noyau de P et π_x, π_y sont les projections sur les coordonnées, on aura :

Théorème 5.4 *Pour chaque $p \in S^m$ il existe $Q \in \Psi^m$ proprement supporté tel que $p(x,D) - Q \in \Psi^{-\infty}$.*

Il est donc suffisant de ne considérer que des opérateurs pseudodifférentiels proprement supportés, ce qui se montrera utile. En effet, les opérateurs pseudodifférentiels proprement supportés vérifient des propriétés commodes : il est possible de définir le produit de deux opérateurs proprement supportés, produit qui sera lui-même proprement supporté ; et par ailleurs si P est proprement supporté,

$$\sigma_P(x,\xi) := e^{-2\pi i x\cdot\xi} P(e^{2\pi i x\cdot\xi})$$

donne une choix canonique de symbole tel que $P = \sigma_P(x,D)$. On a donc :

Théorème 5.5 *L'application $p \to p(x,D)$ induit une bijection de $S^\infty(\Omega)/S^{-\infty}(\Omega)$ sur $\Psi^\infty(\Omega)/\Psi^{-\infty}(\Omega)$. L'application $P \to \sigma_P$ induit une bijection de $\Psi^\infty(\Omega)/\Psi^{-\infty}(\Omega)$ sur $S^\infty(\Omega)/S^{-\infty}(\Omega)$. Ces bijections forment deux bijections réciproques.*

Cela permet de manipuler plus aisément les adjoints des opérateurs pseudodifférentiels : entre autres, on peut munir $S^\infty(\Omega)$ d'une structure de $*$-algèbre avec le produit ponctuel et l'involution $p \to \bar{p}$. $S^{-\infty}(\Omega)$ est alors un idéal et la structure de $*$-algèbre se préserve sur le quotient $S^\infty(\Omega)/S^{-\infty}(\Omega)$. D'une manière semblable, $\Psi^\infty(\Omega)/\Psi^{-\infty}(\Omega)$ est une $*$-algèbre avec l'involution $P \to P^*$. On a donc :

Théorème 5.6 *Les bijections du théorème (5.5) sont des morphismes de $*$-algèbre modulo les termes d'ordre plus petit. Plus précisément :*

1. *Si $P \in \Psi^m(\Omega)$ et $Q \in \Psi^{m'}(\Omega)$ sont proprement supportés alors*

$$\sigma_{PQ} = \sigma_P \sigma_Q \ (mod\ S^{m+m'-1}(\Omega))$$

$$\sigma_{P^*} = \overline{\sigma_P} \ (mod\ S^{m-1}(\Omega))$$

2. *Si $p \in S^m(\Omega)$ et $q \in S^{m'}(\Omega)$ et $p(x,D)$ et $q(x,D)$ sont proprement supportés alors*

$$p(x,D)q(x,D) = (pq)(x,D) \ (mod\ \Psi^{m+m'-1}(\Omega))$$

$$p(x,D)^* = \bar{p}(x,D) \ (mod\ \Psi^{m-1}(\Omega))$$

On dit qu'un opérateur pseudodifférentiel $p(x, D) \in \Psi^m(\Omega)$ est elliptique d'ordre m si pour chaque $A \subset \Omega$ compact il existe des constantes positives c_A, C_A telles que pour tout $x \in A$ et $|\xi| \geq C_A$ on a $|p(x, \xi)| \geq c_A|\xi|^m$. De plus, on définit une paramétrice de $P \in \Psi^\infty(\Omega)$ comme étant un $Q \in \Psi^\infty(\Omega)$ proprement supporté tel que $PQ - I \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$ et $QP - I \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$. Le théorème (5.6) permettrait alors de montrer, à l'aide de résultats calculatoires que l'on ne mentionnera pas :

Théorème 5.7 *Si $P \in \Psi^m(\Omega)$ est elliptique, alors P admet une paramétrice $Q \in \Psi^{-m}(\Omega)$.*

Cependant, pour avoir l'équivalent de Gårding, il nous faudra une hypothèse plus forte. On dit que $p(x, D)$ est fortement elliptique si pour tout $A \subset \Omega$ compact il existe des constantes c, C telles que pour tout $x \in \Omega$, $|\xi| \geq C$, on a :

$$\Re(p(x, \xi)) \geq c(1 + |\xi|^2)^{m/2} \tag{12}$$

et on peut, d'une manière similaire au théorème (5.7), montrer

Théorème 5.8 *Soit $P \in \Psi^m(\Omega)$ fortement elliptique et notons $P_0 = \frac{1}{2}(P + P^*)$. Il existe alors $Q \in \Psi^{m/2}(\Omega)$ proprement supporté tel que $P_0 - Q^*Q \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$.*

Grâce à ce résultat, on peut démontrer l'inégalité de Gårding :

Théorème 5.9 *Soit $p \in S^m(\Omega)$ tel que $p(x, D)$ est fortement elliptique. Soit $W \subset \Omega$ ouvert relativement compact et c la constante $c_{\bar{W}}$ de(12). Alors pour chaque $\epsilon > 0$ et $s < \frac{1}{2}m$, et V ouvert avec $\bar{V} \subset W$, il existe une constante C tel que pour tout $u \in C_c^\infty(V)$ on a*

$$\Re(\langle p(x, D)u|u\rangle) \geq (c - \epsilon)\|u\|_{m/2}^2 - C\|u\|_s^2$$

La norme $\|.\|_t$ correspond ici à la norme de l'espace de Sobolev. La preuve se fait en appliquant le théorème 5.8 à $\tilde{P} = \tilde{p}(x, D)$, où $\tilde{p}(x, \xi) = p(x, \xi) - (c - \epsilon)(1 + |\xi|^2)^{m/2}$.

Références

[1] L. Bers, Fr. John, M. Schechter *Partial Differential Equations (Lectures in Applied Mathematics, Vol. 3)*, 1964.

[2] Chr. Green, J. Marshall *Green's function for the Laplace-Beltrami operator on a toroidal surface*, Proc. R. Soc. A 2013 469 20120479 ; DOI : 10.1098/rspa.2012.0479. Published 14 November 2012

[3] Gerald B. Folland *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press (1995)