Théorie de Jauge
Mémoire de Yizhen Zhao et Pierre-Louis Blayac

June 26, 2015

Sommaire

1 Introduction

Le problème de la classification des objets issus de la géométrie différentielle (des variétés topologiques par exemple) a été beaucoup étudié, notamment en petite dimensions. Par exemple les variétés topologiques compactes connexes de dimension 2 ont été complètement classifiées : toute surface compacte est soit homéomorphe à la sphère, soit à la somme connexe de n tores, soit à la somme connexe de n plans projectifs.

Un concept général en mathématiques utile pour répondre aux problèmes de classification est la notion d'invariant : étant donnée une classe d'objets qu'on souhaite classifier (à une classe d'équivalence près, par exemple à difféomorphisme près), un invariant est un algorithme qui à chaque objet associe un objet beaucoup plus simple, un nombre par exemple, et constant sur chaque classe d'équivalence. Ceci permet de dire parfois si deux objets ne sont pas équivalents, mais ne permet a priori pas de dire s'ils sont équivalents. En topologie, deux espaces topologiques qui ont des groupes fondamentaux non isomorphes ne sont pas homéomorphes, mais la réciproque n'est pas vraie.

C'est exactement la méthode qu'ont employée Donaldson, puis Seiberg et Witten, pour par exemple exhiber deux variétés homéomorphes mais non difféomorphes. L'invariant est construit comme suit : on se donne une variété compacte euclidienne orientée de dimension 4, et on définit dessus une équation aux dérivées partielles, puis on souhaite étudier l'espace des solutions de l'équation. Cependant cet espace n'est pas un très bon invariant car il est très gros , donc difficile (voire impossible) à calculer. Pour le simplifier on met en évidence un groupe qui agit sur l'espace des solutions. On peut quotienter, et on se ramène donc à un objet plus simple : il sera compact et très souvent de dimension fini. (Il faut aussi montrer que le quotient ne dépend pas de la variété à difféomorphisme près)

Dans ce mémoire on prendra tout d'abord le temps d'introduire les nombreux outils différentiels et algébriques nécessaires à l'écriture des équations : les notions de fibrés vectoriels, de connexions, de courbure, de laplacien, de structure Spin et Spin^c et enfin l'opérateur de Dirac seront définis. On étudiera quelques isomorphismes de groupes ayant déjà été traités pendant les cours de licence mais utiles. De nombreux théorèmes d'analyse fonctionnelle nous seront aussi utiles mais ceux-là nous ne les démontrerons pas et nous n'introduirons pas les définitions inhérentes (à savoir espaces de Sobolev, les semi-normes associées etc.). De plus il faut bien comprendre que on se restreint rapidement à l'étude de variétés de dimension 4. En effet dans cette dimension, des isomorphismes de groupes exceptionnels permettent de contourner un formalisme très lourd. Après ces préparatifs on met en place les équations et l'action de groupe associée, puis on s'intéresse brièvement à l'étude de l'espace de modules de solutions (le quotient dont il était question au précédent paragraphe) : on montre qu'il est compact.

Notations : On utilise parfois au cours du mémoire la convention d'Einstein, stipulant que chaque fois lors d'un calcul qu'un indice apparaît deux fois, cela signifie que c'est un indice muet de sommation : il faut sommer sur cet indice.

En outre pour le produit scalaire on utilisera $(\cdot \mid \cdot)$ ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2 Outils de géométrie différentielle

2.1 Fibrés vectoriels

Définition 2.1. *Soit M et E des variétés lisses, $p : E \longrightarrow M$ une submersion surjective lisse, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que (E, p) est un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel de base M et de rang r si : Pour tout x dans M, il existe U un voisinage ouvert de x dans M et $\phi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{K}^r$ un difféomorphisme tels que :*

- *$p^{-1}(x)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de rang r.*
- *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & U \times \mathbb{K}^r \arrow[d, "pr_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

- *$\forall y \in U, \phi^{-1} \mid_{\{y\}\times\mathbb{K}^r}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Remarque : Dans la définition, ϕ est une trivialisation locale du fibré vectoriel. On remarque que ces difféomorphismes forment un atlas de E.
Réciproquement si on se donne un ensemble E, une surjection p , un recouvrement de M et des bijections $p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{K}^r$ qui sont compatibles, ie les changements de cartes sont lisses et leur restriction à $\{y\} \times \mathbb{K}^r$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors on peut doter E d'une unique structure de fibré vectoriel de base M.

Exemples :

- $pr_1 : M \times \mathbb{K}^r \longrightarrow M$ est le fibré trivial. Un fibré vectoriel $p : E \longrightarrow M$ est dit trivialisable s'il existe un difféomorphisme global:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & M \times \mathbb{K}^r \arrow[d, "pr_1"] \\ & M \end{tikzcd}$$

- TM le fibré tangent est un fibré vectoriel de même rang que la variété (si la variété est de dimension constante, ce qu'on supposera toujours). Les trivialisations locales sont données par les différentielles des cartes de M.

Remarque : $p : E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel, on dit que $s : M \longrightarrow E$, application lisse, est une section de E si $p \circ s = id_M$.L'espace vectoriel des sections est noté $\Gamma(E)$.
E est trivialisable si et seulement si il existe r sections ponctuellement linéairement indépendantes. En particulier, si E est de rang 1, E est trivialisable si il existe une section qui ne s'annule pas. Ainsi $T\mathbb{S}^1$ ($\mathbb{S}^1$ est le cercle) est trivialisable.

2.1.1 Opérations algébriques de fibrés vectoriels

Un grand intérêt des fibrés vectoriels est la possibilité de faire des opérations algébriques entre plusieurs fibrés vectoriels de même base M.
Par exemple, étant donnés deux fibrés $p : E \longrightarrow M$ et $q : F \longrightarrow M$, on peut définir (on ne montre pas que tout est bien défini):

- Le fibré dual $E^* = \coprod_{x\in M} p^{-1}(x)^*$ sont les cartes sont données par les cartes de E $\phi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{K}^r$:

$$\phi_* : p_*^{-1}(U) \longrightarrow U \times (\mathbb{K}^r)^* \quad ; \quad l \in p^{-1}(x)^* \longmapsto (x, l \circ (\phi\mid_{p^{-1}(x)})^{-1})$$

- Le fibré somme directe $E \oplus F$.
- Le fibré produit cartésien $E \times_M F$, qui en fait est moralement la même chose que $E \oplus F$.
- Le fibré tenseur $E \otimes F$.
- Le fibré extérieur $\bigwedge^k E$.

Les cartes qu'on définit naturellement, comme celui explicité pour le fibré dual, sont compatibles car on effectue des opérations algébriques qui sont toujours lisses.

Par exemple pour le fibré dual la régularité des changements de cartes provient de la régularité de l'application :

$$GL_r(\mathbb{K})^2 \to GL_r(\mathbb{K}); A, B \mapsto A \times B^{-1}$$

Grâce aux descriptions tensorielles des formes linéaires, on obtient ainsi une définition naturelle des k-formes différentielles : ce sont les sections de $\bigwedge^k TM^*$, le produit extérieur k fois itéré du fibré cotangent, encore écrit $\bigwedge^k M$. On peut aussi définir le fibré des endomorphismes de E : $\mathrm{End}(E)$.

Notation : Si E est un fibré vectoriel, on note $A^k(E) = \Gamma(\bigwedge^k M \otimes E)$ les k-formes à valeurs dans E.

Proposition 2.1. *Si E et F sont des fibrés vectoriels, d entier, l'injection canonique de $A^d(E^* \otimes F)$ dans l'espace des fonctions lisses $A^0(E) \to A^d(F)$ $C^\infty(M)$-linéaires est un isomorphisme.*

preuve. En effet soit $\phi : A^0(E) \to A^0(F)$ est $C^\infty(M)$-linéaire (on prouve la proposition pour $d = 0$ car $A^d(F) = A^0(\bigwedge^d \otimes F)$ et $A^d(E^* \otimes F) = A^0(\bigwedge^d \otimes E^* \otimes F) = A^0(E^* \otimes \bigwedge^d \otimes F)$). Soit $x \in M$ et $s \in A^0(E)$.

Les valeurs de $\phi(s)$ au voisinage de x ne dépendent que des valeurs de s au voisinage de x par $C^\infty(M)$-linéarité.

Ainsi si $e_a(y)$ est une base locale de E, $s = \sum s_a e_a$ au voisinage de x, en posant $\psi_x = \sum de_a(x) \otimes \phi(e_a(x))$ (définition qui est indépendante de la base choisie), on a $\phi(s)(x) = \psi_x \cdot s(x)$ avec $\psi \in A^0(E^* \otimes F)$. $\square$

Remarque : On peut définir la notion de morphisme de fibrés de même base, avec le formalisme déjà introduit, l'ensemble des morphismes de E dans F est en fait $A^0(\mathrm{End}(E, F))$.

2.1.2 Ajout de structure euclidienne, hermitienne, ou orientation

Définition 2.2. *Un $\mathbb{R}$(resp $\mathbb{C}$)-fibré vectoriel est dit* euclidien *(resp* hermitien*) s'il existe une famille "régulière" de produits scalaires (resp hermitiens) sur les fibres, ie $g : E \times_M E \to \mathbb{R}$ lisse bilinéaire symétrique définie positive (resp hermitienne et à valeurs dans $\mathbb{C}$).*

Définition 2.3. *Un fibré vectoriel réel E est dit* orientable *si $\bigwedge^r E$ est trivialisable (où r désigne le rang de E).*

Remarque : Ce rajout de structure (euclidien, hermitien, orientation) peut être généralisé par la notion de *réduction du groupe structural*. En effet si E est un fibré vectoriel, et H un sous groupe fermé de $GL_r(\mathbb{K})$ (donc un sous-groupe de Lie), on appelle une réduction du groupe structural de E à H un atlas de trivialisations locales de E tel que les changements de cartes restreints à la composante vectorielle sont dans H, et on dit alors que E est un H-fibré vectoriel.
On montre que, si E est un fibré vectoriel, :

- E est euclidien ssi E est un $O_r(\mathbb{R})$-fibré.
- E est hermitien ssi E est un $U_r(\mathbb{C})$-fibré.
- E est orientable ssi E est un $SL_r(\mathbb{K})$-fibré.

preuve du premier point. Supposons que E est un $O_r(\mathbb{R})$-fibré. Soit (U_θ, θ) un atlas de cartes adaptées à la structure (on note $\theta_x = \theta \mid_{p^{-1}(x)}$). Soit $x \in U_\theta$,$u, v \in p^{-1}(x)$, on pose $g(u,v) = (\theta_x \cdot u \mid \theta_x \cdot v)$. Cette définition ne dépend pas de θ car les changements de cartes sont orthogonaux, g est lisse bilinéaire symétrique défini positif, donc une implication est montrée.
Réciproquement si E est euclidien, $g : E \times_M E \to \mathbb{R}$. On se donne $\mathcal{T}$ un atlas de trivialisations maximal (il existe par le lemme de Zorn), et on pose :

$$\mathcal{T}' = \{\theta : p^{-1}(U_\theta) \to U_\theta \times \mathbb{R}^r \mid \forall u, v \in p^{-1}(x), (\theta_x \cdot u \mid \theta_x \cdot v) = g(u,v)\}.$$

Montrons que $\mathcal{T}'$ est un atlas de trivialisations locales. Soit $\theta : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}_r$ une carte. On pose :

$$\forall x \in U, \quad u, v \in \mathbb{R}^r, \quad h_x(u,v) = g((\theta_x)^{-1} \cdot u, (\theta_x)^{-1} \cdot v)$$

h_x est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^r$ qui dépend régulièrement de x. Si (∂_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^r$, alors on note $(e_i(x))$ la base obtenue par Gram-Schmidt à partir de (∂_i) pour le produit scalaire h_x, $(e_i(x))$ dépend régulièrement de x. On pose $M_x = (e_1(x), ..., e_r(x))$ la matrice de passage, et :

$$\tau : U \times \mathbb{R}^r \to U \times \mathbb{R}^r; (x,u) \mapsto (x, M_x^{-1} \cdot u)$$

$\tau \circ \theta$ est une carte dans $\mathcal{T}'$, qui est donc un atlas de trivialisations. $\square$

2.2 Connexions

Définition 2.4. *Une connexion ∇ sur un fibré vectoriel $p : E \to M$ est une application $\nabla : A^0(E) \to A^1(E)$ lisse, linéaire et respectant la règle de Leibniz suivante : Si $s \in A^0(E)$ et $f \in C^\infty(M)$ alors :*

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s.$$

Exemple : La différentielle sur le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^k$ est une connexion, appelée la connexion triviale.

Pour un fibré trivial de rang 1, dont l'ensemble des sections est $C^\infty(M)$ aussi appelée l'ensemble des formes différentielles de degré 0, on retrouve la différentielle qui on le rappelle se prolonge aux formes différentielles de degré quelconque k, pour donner une forme de degré k+1.

Proposition 2.2 (Existence de connexion)**.** *Soit $p : E \to M$ un fibré vectoriel quelconque. Il existe une connexion sur ce fibré.*

preuve. Elle découle de la locale trivialité du fibré E, car localement on peut appliquer la connexion triviale. Il reste ensuite à utiliser une partition de l'unité. Soit (θ, U_θ) un atlas de trivialisations locales, f_θ une partition de l'unité associée au recouvrement U_θ. On pose, où e_a base canonique de $\mathbb{R}^k$ et $\theta_x \cdot s(x) = \sum s_a e_a$,

$$\nabla_\theta(s)(x) = f_\theta(x) d_x s_a (\theta_x)^{-1} \cdot e_a.$$

∇_θ n'est pas une connexion mais $\nabla = \sum \nabla_\theta$ en est une. □

Proposition 2.3. *L'ensemble des connexions sur un fibré vectoriel $p : E \to M$ est un espace affine d'espace directeur $A^1(\operatorname{End} E)$.*

preuve. On remarque que si ∇_1 et ∇_2 sont deux connexions alors leur différence est $C^\infty(M)$-linéaire donc s'identifie à un élément de $A^1(\operatorname{End}(E))$ d'après la proposition 2.1. □

Connexion évaluée sur un champ de vecteur On pose, si X champ de vecteur de M, :

$$\nabla_X s = \nabla s \cdot X.$$

On a :

$$\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + (\mathcal{L}_X f)s.$$

Explicitation locale de ∇ : On remarque tout d'abord que si $s \in A^0(E)$ est nulle au voisinage de $x \in M$ (sur U), il existe $f \in C^\infty(M)$ à support compact nulle en dehors de U et valant 1 sur un voisinage de x $V \subset U$, et $0 = \nabla(0)(x) = \nabla(fs)(x) = f(x)\nabla(s)(x) + d_x f \cdot s(x) = \nabla(s)(x)$. Donc une connexion est un opérateur local, les valeurs de $\nabla(s) \mid_U$ ne dépendent que de $s \mid_U$.

Ainsi, si localement on a $s = \sum s^a e_a$ ou e_a base locale de M et x_i coordonnées locales de M, alors :

$$\nabla(s) = \sum (ds^a \otimes e_a + s^a \nabla(e_a)) = \sum (\partial_i s^b dx^i \otimes e_b + s^a \Gamma^b_{i,a} dx^i \otimes e_b).$$

Par abus de notation on note :

$$\nabla = d + \sum \Gamma_i dx^i.$$

On remarque que cette explicitation est également possible si au lieu de prendre une carte de M et des coordonnées, on prend juste une base locale du fibré tangent (ne provenant pas nécessairement d'une carte donc) qui ∂_i et dx^i sa base duale.

Changement de base Si e_a et f_b sont deux bases locales reliées par u : $f_a = u_a^b e_b$ et $f_a^* = ({}^t u^{-1})_a^b e_b^*$, et si dans ces deux bases ∇ s'écrit respectivement $d + \sum \Gamma_i dx^i$ et $d + \sum \Gamma'_i dx^i$ alors on a :

$$\begin{aligned}(\Gamma'_i)_b^a &= f_b^*(\nabla_{\partial_i} f_a) \\ &= (u^{-1})_c^a \partial_i u_b^c + (u^{-1})_c^a (\Gamma_i)_d^c u_b^d \\ \Gamma'_i &= u^{-1}\partial_i u + u^{-1}\Gamma_i u\end{aligned}$$

De même que précédemment on peut se contenter d'une base locale de TM au lieu de coordonnées.

2.2.1 Connexion euclidienne et hermitienne

Définition 2.5. *Si (E,g) est un fibré euclidien (resp hermitien) muni de son produit scalaire (resp hermitien), et ∇ une connexion sur E, on dit que ∇ est euclidienne (resp hermitienne) si pour toutes sections s_1, s_2 et pour tout champ de vecteur X,*

$$d(g(s_1,s_2)) \cdot X = g(\nabla_X s_1, s_2) + g(s_1, \nabla_X s_2)$$

Remarque : D'après la remarque sur la réduction du groupe structural d'un fibré vectoriel, on voit qu'on en a quelque sorte défini les connexions compatibles avec une $SO_n(\mathbb{R})$-fibré (resp $SU_n(\mathbb{C})$-fibré). Cette notion est en fait généralisable :

Définition 2.6. *Si H est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$ et $\mathfrak{h}$ est son algèbre de Lie, on dit qu'une connection ∇ sur un H-fibré E est compatible avec la H-structure de E si dans toute trivialisation compatible avec la H-structure, ou $\nabla = d + \sum \Gamma_i dx^i$, on a $\Gamma_i \in A^0(U \times \mathfrak{h})$.*

preuve de l'équivalence des définitions dans le cas euclidien. (E,g) fibré euclidien, on se donne une base locale euclidienne e_a en regardant une carte orthogonale, $s = \sum s^a e_a$, $t = \sum t^a e_a$, $X = \sum X^i \partial_i$,$\nabla = d + \sum \Gamma_i dx^i$.

$$g(s,t) = \sum s^a t_a \quad ; \quad dg(s,t) = \sum (ds^a)t_a + s^a(dt_a)$$

$$g(\nabla_X s, t) = g(\sum (ds^a \cdot X)e_a + s^a \Gamma_{i,b}^b X^i e_b, \sum t^a e_a) = (ds^a \cdot X)t_a + X^i s^a \Gamma_{i,a}^b t_b$$

enfin :

$$g(\nabla_X s, t) + g(s, \nabla_X t) - dg(s,t) \cdot X = X^i s^a (\Gamma_{i,a}^b - ({}^t\Gamma_i)_a^b) t_b$$

Donc ∇ est euclidienne ssi Γ_i est antisymétrique, ie $\Gamma_i \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$. On peut se contenter ici aussi d'une base locale de TM au lieu de coordonnées. □

2.2.2 Torsion d'une connexion

On va s'intéresser maintenant à des connexions définies sur un fibré particulier : le fibré tangent TM.

Définition 2.7. *Soit ∇ une connexion sur TM, on définit, pour tous champs de vecteurs X, Y :*

$$T_{X,Y} = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

On remarque que pour toutes fonctions $f, g \in C^\infty(M)$on $T_{fX,gY} = fgT_{X,Y}$.En appliquant deux fois la proposition de la section précédente, à $Y \mapsto T_{X,Y}$ (qui alors appartient à $A^0(TM^* \otimes TM) = A^1(TM)$) puis à $X \mapsto (Y \mapsto T_{X,Y})$ on obtient que $T \in A^1(TM^* \otimes TM)$ et comme T est alternée, on a $T \in A^2(TM)$.

On écrit localement $T = \sum T_{ij}^k dx^i \otimes dx^j \otimes \partial_k$ en prenant bien garde que dans le calcul suivant, on suppose que la base locale provient d'une carte de M, ou de manière équivalente que $[\partial_i, \partial_j] = 0 \quad \forall i, j$.

$$T_{ij}^k = dx^k(T_{\partial_i,\partial_j}) = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

Définition 2.8. *La connexion ∇ sur TM est dite sans torsion si pour tous champs de vecteurs X, Y, on a $T_{X,Y} = 0$ ou de manière équivalente $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$(valable seulement si la connexion est calculée dans une base provenant de coordonnées !).*

Connexion de Levi-Civita Soit M, g une variété *Riemannienne*, ie dont le fibré tangent est euclidien.

Proposition 2.4. *Le fibré tangent TM admet une unique connexion euclidienne sans torsion, notée souvent ∇^{LC} ou ∇_g.*

preuve. Unicité : Si ∇_1 et ∇_2 sont des connexions qui conviennent, on note $A = \nabla_1 - \nabla_2 \in A^1(\mathrm{End}(TM))$. Regardons A dans des coordonnées de M (qui donne une base locale de TM) : $A = \sum a_i dx^i$. D'après le paragraphe précédent, comme A est différence de deux connexions sans torsion, on a $a_{ij}^k = a_{ji}^k$, ou $a_{ij}^k = dx^k(a_i \cdot \partial_i) = dx^k(A_{\partial_i} \cdot \partial_j)$.$A$ est $C^\infty(M)$-linéaire donc on en déduit que pour tous champs de vecteurs, $A_X \cdot Y = A_Y \cdot X$.
Si maintenant on regarde A dans une base locale *orthogonale*, on note $A = \sum b_i e^{i,*}$ et comme A est la différence de connexions euclidiennes, on a $b_{ij}^k = -b_{ik}^j$ de plus $b_{ij}^k = e^{k,*}(A_{e_i} \cdot e_j) = e^{k,*}(A_{e_j} \cdot e_i) = b_{ji}^k$. donc on a :

$$b_{ij}^k = b_{ji}^k \quad ; \quad b_{ij}^k = -b_{ik}^j.$$

D'où :

$$b_{ij}^k = -b_{ik}^j = -b_{ki}^j = b_{kj}^i = b_{jk}^i = -b_{ij}^k = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Existence : Raisonnons par conditions nécessaires, si ∇ est la connexion voulue, on a $\mathcal{L}_X(Y \mid Z) = (\nabla_X Y \mid Z) + (\nabla_X Z \mid Y)$ et $([X, Y] \mid Z) = (\nabla_X Y \mid Z) - (\nabla_Y X \mid Z)$, et on trouve par le calcul :

$$\begin{aligned} 2(\nabla_X Y \mid Z) =& \mathcal{L}_X(Y \mid Z) + \mathcal{L}_Y(Z \mid X) - \mathcal{L}_Z(X \mid Y) \\ &+ ([X, Y] \mid Z) - ([X, Z] \mid Y) - ([Y, Z] \mid X) \end{aligned}$$

Expression qui ne dépend pas de ∇.

On souhaite définir ∇ en définissant pour tous champs de vecteurs X, Y, Z :

$$\begin{aligned} 2(\nabla_X Y \mid Z) =& \mathcal{L}_X(Y \mid Z) + \mathcal{L}_Y(Z \mid X) - \mathcal{L}_Z(X \mid Y) \\ &+ ([X, Y] \mid Z) - ([X, Z] \mid Y) - ([Y, Z] \mid X) \end{aligned}$$

puis dire que localement, avec une base euclidienne :

$$\nabla X = \sum (\nabla_{e_i} X \mid e_j) e^{i,*} \otimes e^j.$$

Pour vérifier que c'est bien défini, il faut vérifier que l'expression ne dépend pas de la base euclidienne choisie, en montrant (par le calcul) que $(\nabla_X Y \mid Z)$ est $C^\infty(M)$-linéaire en X et en Z, et dans ce cas $\nabla : A^0(TM) \to A^1(TM)$ est bien définie globalement. Restent à vérifier par le calcul la règle de Leibniz, que la connexion est euclidienne et que la torsion est nulle. $\square$

Remarque Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, on peut définir plus simplement et plus intuitivement la connexion de Lévi-Civita. En effet Si X et Y sont des champs de vecteurs on peut poser :

$$\nabla_X Y(x) = p_x(d_X Y(x))$$

Où p_x est le projecteur orthogonale sur $T_x M$, car l'expression est $C^\infty(M)$-linéaire en X et on vérifie que c'est une connexion en vérifiant la règle de Leibniz.

La connexion est euclidienne car si X, Y, Z sont des champs de vecteurs sur M étendus localement à $\mathbb{R}^n$, on a

$$d_X(Y \mid Z) = (d_X Y \mid Z) + (Y \mid d_X Z) = (\nabla_X Y \mid Z) + (Y \mid \nabla_X Z)$$

La connexion est sans torsion car si X, Y sont des champs de vecteurs sur M étendus localement à $\mathbb{R}^n$, on a

$$[X, Y] = d_X Y - d_Y X = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

Car sur M $[X, Y](x) \in T_x M$.

2.2.3 Opérations algébriques sur les connexions

Lorsqu'on effectue une opération algébrique entre deux fibrés vectoriels de même base qui sont chacun dotés d'une connexion, on peut également agir sur les connexions (sans montrer qu'elles sont bien définies) :
Si $p_1 : E_1 \to M$ et $p_2 : E_2 \to M$ deux fibrés vectoriels dotés des connexions ∇_1 et ∇_2. On définit les connexions :

- ∇_1^* sur E^* par :

  $$\nabla_1^* f = d \circ f - f \circ \nabla_1$$

  c'est-à-dire, si X champ de vecteur et s section de E_1,

  $$((\nabla_1^*)_X f) \cdot s = d(f \cdot s) \cdot X - f((\nabla_1)_X s)$$

- $\nabla_1 \oplus \nabla_2$ sur $E_1 \oplus E_2$ par :

  $$\nabla_1 \oplus \nabla_2(s_1 + s_2) = \nabla_1 s_1 + \nabla_2 s_2$$

- $\nabla_1 \otimes \nabla_2$ sur $E_1 \otimes E_2$ par :

  $$\nabla_1 \otimes \nabla_2(s_1 \otimes s_2) = \nabla_1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla_2 s_2$$

c'est-à-dire que pour tout champ de vecteurs X,

$$(\nabla_1 \otimes \nabla_2)_X (s_1 \otimes s_2) = (\nabla_1)_X s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes (\nabla_2)_X s_2$$

cela n'induit qu'une définition locale a priori car toute section de $E_1 \otimes E_2$ n'est que localement somme d'éléments décomposables. Mais la définition est indépendante de la base donc on peut passer au global.

- $\bigwedge^k \nabla_1$ sur $\bigwedge^k E_1$ par :

$$\bigwedge^k \nabla_1 (s_1 \wedge \cdots \wedge s_k) = \nabla_1 s_1 \wedge \cdots \wedge s_k + s_1 \wedge \cdots \wedge \nabla_1 s_k$$

Remarque On peut réécrire simplement la connexion induite sur $\mathrm{Hom}(E_2, E_1) = E_2^* \otimes E_1$:

$$\begin{aligned}(\nabla_2^* \otimes \nabla_1)_X (f \otimes s) \cdot t &= (d(f \cdot t) \cdot X)s - f((\nabla_2)_X t)s + (f \cdot t)(\nabla_1)_X s \\ &= (\nabla_1)_X ((f \cdot t)s) - f \cdot ((\nabla_2)_X t)s\end{aligned}$$

Qu'on peut encore écrire, si f est une section de $\mathrm{Hom}(E_2, E_1)$:

$$\nabla^{\mathrm{Hom}(E_2,E_1)} f = \nabla_1 \circ f - f \circ \nabla_2$$

Remarque Si E est un fibré de rang n muni d'une connexion ∇, on peut expliciter localement simplement la connexion induite sur $\bigwedge^n E = \det(E)$.
On peut en passant remarquer que l'espace directeur de l'espace des connexions sur $\bigwedge^n E$ est $A^1(\mathrm{End}(\bigwedge^n E))$ mais comme $\bigwedge^n E$ est de rang 1, $\mathrm{End}(\bigwedge^n E)$ est trivialisable (l'identité est une section jamais nulle) et l'espace directeur est l'ensemble des 1-formes sur M.
Soit e_a une base locale de E,on prend $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ comme base locale de $\bigwedge^n E$. On écrit $\nabla = d + \Gamma_i dx^i$ et $\nabla^{\det} = d + \Gamma_i^{\det} dx^i$ où $\Gamma_i^{\det}$ est donc juste dans $C^\infty(M)$. On a :

$$\begin{aligned}\Gamma_i^{\det} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n &= \nabla_{\partial_i}^{\det}(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) \\ &= \nabla_{\partial_i} e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n + \cdots + e_1 \wedge \ldots \wedge e_{n-1} \wedge \nabla_{\partial_i} e_n \\ &= \Gamma_{i1}^a e_a \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n + \ldots + e_1 \wedge \ldots \wedge e_{n-1} \wedge \Gamma_{in}^a e_a \\ &= \mathrm{tr}(\Gamma_i) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n\end{aligned}$$

D'où :

$$\Gamma_i^{det} = \mathrm{tr}(\Gamma_i)$$

2.3 Courbure

2.3.1 Prolongement de ∇

En géométrie différentielle on a prolongé la différentielle $d : A^0(\mathbb{R}) \to A^1(\mathbb{R})$ à toutes les k-formes différentielles. Ce fait est généralisable dans le cas d'un fibré vectoriel muni d'une connexion :

Proposition 2.5. *On peut étendre* $\nabla : A^0(E) \to A^1(E)$ *à toutes les k-formes à valeurs dans* E *:* $d^\nabla : A^k(E) \to A^{k+1}(E)$*, de façon à respecter la règle de Leibniz suivante :*

$$d^\nabla(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^{\deg(\alpha)}\alpha \wedge \nabla s.$$

où bien sûr d *est la différentielle étendue évoquée au paragraphe précédent. Cette règle de Leibniz impose l'unicité d'un tel prolongement.*

preuve. Dans une trivialisation locale de E et une carte de M, sur $U \subset E$, $(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \otimes e_a)_{a,i_1<\cdots<i_k}$ forme une base de $A^k(U)$. On définit d^∇ sur la base grâce à la règle de Leibniz, et on l'étend par $\mathbb{K}$-linéarité, et en posant $d^\nabla(f\alpha) = df \wedge \alpha + fd^\nabla\alpha$. Alors, si $\alpha \otimes s$ est un membre de la base, on a :

$$\begin{aligned} d^\nabla(f\alpha \otimes gs) &= (gdf + fdg) \wedge \alpha \otimes s + fg(d\alpha \otimes s + (-1)^{\deg(\alpha)}\alpha \wedge \nabla s) \\ &= d(f\alpha) \otimes gs + (-1)^{\deg(f\alpha)} f\alpha \wedge \nabla(gs). \end{aligned}$$

On a bien étendu ∇ de façon à respecter la règle de Leibniz, mais seulement sur U. Cependant on voit que la définition ne dépend pas de la trivialisation et de la carte choisies précisément car la règle de Leibniz est respectée. Ainsi on peut passer du local au global (et d'ailleurs on obtient du coup un opérateur local). □

2.3.2 Courbure

Il y a toutefois une différence notable de cette généralisation avec le cas particulier de la différentielle sur les k-formes : on n'a pas nécessairement $d^\nabla \circ d^\nabla = 0$. On remarque que $d^\nabla \circ d^\nabla$ est $C^\infty(M)$-linéaire :

$$\forall \alpha \in A^k(\mathbb{K}), \beta \in A^l(E) : d^\nabla(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d^\nabla \beta$$

En regardant les éléments de la base, et :

$$d^\nabla \circ d^\nabla(f\alpha) = d^\nabla(df \wedge \alpha) + d^\nabla(fd^\nabla\alpha) = fd^\nabla \circ d^\nabla \alpha$$

Définition 2.9. *On définit alors la courbure* $F_\nabla = d^\nabla \circ d^\nabla (: A^0(E) \to A^2(E)) \in A^2(\mathrm{End}(E))$.

Explicitation locale sous forme matricielle : Localement, en posant $\nabla = d + \Gamma_i dx^i$, on calcule :

$$\begin{aligned} F_\nabla e_a &= d^\nabla(\Gamma^b_{ia} dx^i \otimes e_b) \\ &= d\Gamma^b_{ia} \wedge dx^i \otimes e_b - \Gamma^b_{ia} dx^i \wedge \nabla e_b \\ &= \partial_j \Gamma^b_{ia} dx^j \wedge dx^i \otimes e_b - \Gamma^b_{ia}\Gamma^c_{jb} dx^i \wedge dx^j \otimes e_b \end{aligned}$$

D'où, si $F_\nabla = F_{ij} dx^i \otimes dx^j$,

$$F_{ij} = [\Gamma_i, \Gamma_j] + (\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i)$$

On peut ici aussi se contenter d'une base locale du fibré tangent ne provenant pas d'une carte.

Explicitation sur des champs de vecteurs : Si on note localement $F = \sum_{ij} F_{ij} dx^i \otimes dx^j$, il vient :

$$[\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}] - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]} = [\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}] = [(\partial_i + \Gamma_i), (\partial_j + \Gamma_j)] = F_{ij}$$

Car $(\partial_i \circ \Gamma_j - \Gamma_j \circ \partial_i)s = \partial_i(\Gamma_{ja}^b s^a)e_b - \Gamma_{ja}^b(\partial_i s^a)e_b = (\partial_i \Gamma_j)s$.
Par C^∞-linéarité des deux termes extrémaux, on en déduit pour tous champs de vecteurs :

$$F_{X,Y} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$$

Et

$$F_{ij} = [\nabla_{e_i}, \nabla_{e_j}] - \nabla_{[e_i,e_j]}$$

Réduction du groupe structural Soit E un H-fibré vectoriel muni de ∇ une connexion compatible avec la H-structure. Alors dans toute trivialisation locale compatible avec la H-structure, si $\nabla = d + \Gamma_i dx^i$, alors $F_{ij} = [\Gamma_i, \Gamma_j] + (\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i) \in \mathfrak{h}$ car tout algèbre de Lie d'une sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{K})$ est stable par crochet ($[X,Y] = \frac{d}{dt}(e^{tX} Y e^{-tX})(0)$).

Courbure d'une connexion de Lévi-Civita

Proposition 2.6. *Soit M une variété Riemannienne qu'on muni de la connexion de Lévi-Civita ∇, on note R la courbure induite, et on a :*

$$R_{X,Y} = -R_{Y,X}$$

$$(R_{X,Y}Z \mid T) = -(R_{X,Y}T \mid Z)$$

$$R_{X,Y}Z + R_{Z,X}Y + R_{Y,Z}X = 0$$

$$(R_{X,Y}Z \mid T) = (R_{Z,T}X \mid Y)$$

preuve. La première équation a déjà été vue, la seconde découle directement du paragraphe précédent. La troisième découle de l'absence de torsion :

$$\begin{aligned} R_{X,Y}Z + R_{Z,X}Y + R_{Y,Z}X =& \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &+ \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \\ &+ \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y \end{aligned}$$

Or :

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Y,Z]} X = \nabla_X [Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]} X = [X,[Y,Z]]$$

En réarrangeant les termes de cette manière, on obtient :

$$R_{X,Y}Z + R_{Z,X}Y + R_{Y,Z}X = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

La dernière équation découle des trois précédentes, en effet si :

$$\forall a,b,c,d, \quad abcd + bacd = 0 \quad ; \quad abcd + abdc = 0 \quad ; \quad abcd + bcad + cabd = 0$$

(On note pour plus de concision $abcd = (R_{a,b} \cdot c \mid d)$.)
Alors :

$$abcd + bdca + dacb = -abdc - bdac - dabc = 0$$

Et

$$abcd = -bcad - cabd = dbac + cdab - cabd = adbc - acdb - badc - dacb - cabd$$

D'où

$$abcd + acdb + adbc = -abcd - acdb - adbc = 0$$

Et finalement :

$$abcd = -acdb - adbc = -acdb + cabd + dcab = cdab$$

□

2.4 Opérateur de Hodge

Définition 2.10. *Soit M une variété compacte Riemannienne orientée de dimension n, on souhaite définir l'opérateur de Hodge, pour $0 \leq k \leq n$, : $* : \bigwedge^k M \to \bigwedge^{n-k} M \in A^0(\mathrm{End}(\bigwedge^k M, \bigwedge^{n-k} M))$ un morphisme de fibré vectoriels de base M.*

Pour ce faire on le définit dans une trivialisation locale orthonormale orientée de TM, dont e_i est une base (elle induit une base orthonormale sur $\bigwedge^k M$) : on le définit sur la base :

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = sign \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix} e_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$$

Où $i_{k+1} < \cdots < i_n \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$.

Puis on étend par linéarité.

Il faut ensuite vérifier que cette définition ne dépend pas de la base, ce qui permet d'étendre la définition à tout M. Or on a, $\forall \alpha, \beta \in \bigwedge^k M$ dans un voisinage de $x \in M$:

$$\alpha \wedge *\beta = (\alpha \mid \beta) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

(Il suffit de le vérifier sur la base, ce qui est évident.)

Alors si $f_1, \dots, f_n$ est une autre base locale, si $i_1 < \cdots < i_k \in \{1, \dots, n\}$ et $j_{k+1} < \cdots < j_n \in \{1, \dots, n\}$ et $j_1 < \cdots < j_k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_{k+1}, \dots, j_n\}$, on a :

$$\begin{aligned}(f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k}) \wedge (f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k}) =& sign \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \\ & (*(f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k}) \mid f_{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge f_{j_n}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\end{aligned}$$

Donc la définition est indépendante de la base.

On remarque que :

$$* \circ * = (-1)^{k(n-k)} id_{\bigwedge^k M}$$

car c'est vrai sur la base. Soit E un fibré euclidien (ou hermitien) muni d'une connexion euclidienne (ou hermitienne), on prolonge l'opérateur de Hodge à $* : \Lambda^k M \otimes E \to \Lambda^{n-k} M \otimes E$ en faisant le produit tensoriel avec l'identité.

Définition 2.11. *On définit:*

$$(d^\nabla)^* = (-1)^{1+nk} * \circ d^\nabla \circ * : A^{k+1}(E) \to A^k(E)$$

Ceci permet de définir :

2.5 Le laplacien

Définition 2.12. *On définit:* $\Delta_\nabla = (d^\nabla)^* \circ d^\nabla : A^0(E) \to A^0(E)$.

On note ∇_g la connexion de Lévi-Civita sur TM, et la proposition qui suit permet de calculer plus aisément le laplacien :

Proposition 2.7.

$$\forall \alpha \in A^1(E), (d^\nabla)^*\alpha = -C_g((\nabla_g \otimes \nabla)\alpha)$$

Où $C_g : \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \otimes E \to E; \alpha \otimes \beta \otimes s \mapsto (\alpha \mid \beta)s$.

preuve. Montrons l'assertion localement, d'abord on fait un calcul préliminaire :

$$C_g(\nabla_g \otimes \nabla(f\alpha \otimes s)) = C_g(df \otimes \alpha \otimes s + f\nabla_g \otimes \nabla(\alpha \otimes s)) = (df \mid \alpha) + fC_g(\nabla_g \otimes \nabla(\alpha \otimes s))$$

Et :

$$*d^\nabla * (f\alpha \otimes s) = *(df \wedge *\alpha \otimes s + fd^\nabla * (\alpha \otimes s)) = *(df \wedge *\alpha) \otimes s + f * d^\nabla * (\alpha \otimes s)$$

Or

$$*(\alpha \wedge *\beta) = (\alpha \mid \beta)$$

Ainsi, il suffit de prouver que la formule est vraie sur une base bien choisie. Pour choisir cette base, on introduit un lemme qui sera utile par la suite : □

Lemme 2.1. *Soit E un H-fibré vectoriel de base M muni d'une connexion ∇ compatible avec la H-structure, soit $x_0 \in M$, alors il existe une trivialisation locale au voisinage de x_0 et compatible avec la H-structure telle que si e_a est la base locale associée, on a $\nabla e_a(x_0) = 0$, autrement dit la connexion est, dans cette base, triviale en x_0* uniquement *(c'est une propriété ponctuelle).*

preuve du lemme. En effet soit x_i un système local de coordonnées de M, soit e_a une base locale compatible avec la H-structure, on note dans cette base $\nabla = d + \Gamma_i dx^i$ et d'après la formule de changement de base pour les connexions explicitée page 5, on cherche $u \in A^0(M \times H)$ tel que $\forall i$:

$$\partial_i u(x_0) + \Gamma_i(x_0)u(x_0) = 0$$

Pour ce faire il suffit de prendre :

$$u(x_1, \dots, x_n) = exp(x_1\Gamma_1(x_0)) \times \cdots \times exp(x_n\Gamma_n(x_0)$$

□

suite de la preuve de la proposition. On se donne donc e_i et ϵ_a des bases de TM et de E qui satisfont les hypothèses du lemme. Tous les calculs qui suivent sont faits uniquement en x_0.

$$\begin{aligned} C_g(\nabla_g \otimes \nabla(e_i^* \otimes \epsilon_a)) &= C_g(\nabla_g e_i^* \otimes \epsilon_a + e_i^* \otimes \nabla\epsilon_a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et d'un autre côté :

$$\begin{aligned} *d^\nabla * (e_i^* \otimes \epsilon_a) &= *(d * e_i^* \otimes \epsilon_a + (-1)^{n-1} * e_i^* \wedge \nabla \epsilon_a) \\ &= (*d * e_i^*) \otimes \epsilon_a \end{aligned}$$

Reste à montrer que $*d * e_i^* = 0$.

$$*e_i^* = (-1)^{i+1} e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_i^*} \wedge \cdots \wedge e_n^*$$

Puis

$$\begin{aligned} d * e_i^* = &\sum_{j<i} (-1)^{i+j} e_1 \wedge \cdots \wedge de_j^* \wedge \cdots \wedge \widehat{e_i^*} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &+ \sum_{j>i} (-1)^{i+j+1} e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_i^*} \wedge \cdots \wedge de_j^* \wedge \cdots \wedge e_n \end{aligned}$$

On se donne un système de coordonnées locales tel que $e_i = \sum_j m_{ji} \partial_j$ et $e_i^* = \sum_j (m^{-1})_{ij} dx_j$ et $m(x_0) = id$. On calcule la connexion de Lévi-Civita dans cette base : $\nabla_g = d + \Gamma_i dx^i$. Alors d'après la formule de changement de base on a $0 = \partial_i m + \Gamma_i$.

$$\begin{aligned} de_i^*(x_0) &= \sum_{k,j} \partial_k (m^{-1})_{ij} dx_k \wedge dx_j \\ &= \sum_{j,k,l,m} \partial_k (m^{-1})_{ij} m_{kl} m_{jm} e_l^* \wedge e_m^* \\ &= \sum_{j,k} (-\partial_k m_{ij} e_k^* \wedge e_j^*) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} (de_i^* \mid e_j^* \wedge e_i^*)(x_0) &= (-\partial_j m_{ii} + \partial_i m_{ij}) \\ &= (\Gamma_{ji}^i - \Gamma_{ij}^i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car la connexion est sans torsion.
Donc $*d * e_i^* = 0$. □

Remarque : Grâce à la proposition, on peut calculer le laplacien ponctuellement dans une base qui vérifie les hypothèses du lemme :

$$\begin{aligned} \Delta_\nabla s &= \sum_i -C_g(\nabla_g \otimes \nabla (e_i^* \otimes \nabla_{e_i} s) \\ &= \sum_{i,j} -C_g(e_i^* \otimes e_j^* \otimes \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} s) \\ &= -\sum_i \nabla_{e_i}^2 s \end{aligned}$$

Comme d est une connexion euclidienne sur le fibré trivial de rang 1, on peut appliquer ce calcul à :

$$\begin{aligned}
\Delta|s|^2 &= -\sum_i d_{e_i}^2(s \mid s) \\
&= -\sum_i d_{e_i}((\nabla_{e_i} s \mid s) + (s \mid \nabla_{e_i} s)) \\
&= -\sum_i (\nabla_{e_i}^2 s \mid s) + 2(\nabla_{e_i} s \mid \nabla_{e_i} s) + (s \mid \nabla_{e_i}^2 s) \\
\Delta|s|^2 &= -2|\nabla s|^2 + 2\Re(\Delta_\nabla s \mid s)
\end{aligned}$$

Le laplacien sur le fibré trivial de rang 1

Définition 2.13. *Sur le fibré trivial de rang 1 on peut faire une définition plus générale du laplacien, pour que $\Delta : A^k(M) \to A^k(M)$. Pour ce la on pose, si $k > 0$, :*

$$\Delta = dd^* + d^*d$$

Si $k = 0$ on garde bien sûr la définition précédente $\Delta = d^*d$.

3 Outils algébriques

3.1 Identification de $\mathbb{H}$ et $\mathbb{R}SU(2)$

On pose $\mathbb{R}SU(2) = \{\lambda M, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad M \in SU(2)\}$.
On introduit les matrices de Pauli :

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Et on a :

$$\mathbb{R}SU(2) = Vect(p_i)_{i=1,2,3,4}$$

Où $Vect$ désigne l'espace vectoriel *réel* engendré.

On identifie $\mathbb{R}SU(2)$ et le corps des quaternions en identifiant les matrices de Pauli avec 1, i, j, k. L'isomorphisme $I : \mathbb{H} \to \mathbb{R}SU(2)$ qui en résulte multiplie les normes par $\sqrt{2}$, si on prend comme norme $\mathrm{tr}(AA^*)$ pour $\mathbb{R}SU(2)$. En fait I est un morphisme d'algèbres qui vérifie : $I(x^*) = I(x)^*$.
On note $\mathbb{H}_0$ le sous-espace de $\mathbb{H}$ des quaternions imaginaire purs, et $\mathfrak{su}(2) = I(\mathbb{H}_0)$ l'ensemble des matrices anti-hermitiennes.

3.2 Action de $SU(2)$ sur $\mathfrak{su}(2)$

Soit $a \in SU(2)$, on lui associe

$$\phi(a) : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2) \quad ; \quad h \mapsto aha^{-1}$$

Comme $a^{-1} = a^*$, $\phi(a)$ est une isométrie ($\mathrm{tr}(aha^*(aka^*)^*) = \mathrm{tr}(ahk^*a^*) = \mathrm{tr}(hk^*)$), et on a bien une action de groupe, ϕ est un morphisme de groupes de Lie :

$$\phi : SU(2) \to O(3)$$

Puis par connexité de l'image,

$$\phi : SU(2) \to SO(3)$$

Soit $a \in \ker \phi$. Alors a commute avec toutes les matrices de Pauli, or si $k \neq l \in \{2,3,4\}$, on a $p_k p_l = -p_l p_k$. Donc $a \in \mathfrak{su}(2)^{\perp}$, autrement dit $a \in \{id, -id\}$.

Comme on a une action de groupes lisse, on sait que ϕ est de rang constant, et on vient de voir qu'elle était injective au voisinage de l'identité, donc par égalité des dimensions, c'est un difféomorphisme local.

L'image de ϕ est ouverte, et de plus comme $SU(2)$ est compact, l'image est un ouvert fermé de $SO(3)$ qui est connexe. Ainsi ϕ est surjective, c'est un revêtement à deux feuillets.

Puisque ϕ est un difféomorphisme local, en considérant sa différentielle, elle induit de plus un isomorphisme entre les matrice complexes antihermitiennes de rang 2 et de trace nulle ($\mathfrak{su}(2)$) et les matrices antisymétriques de rang 3 ($\mathfrak{so}(3)$) :$a \mapsto (h \mapsto ah - ha)$.

On note $G = \{(a^+, a^-) \in U(2)^2 \quad \text{tel que} \quad \det(a^+) = \det(a^-)\}$.

3.3 Action de G sur $\mathbb{R}SU(2)$

G est un sous-groupe de Lie de $U(2)^2$ car
$U(2)^2 \to \mathbb{S}^1 \quad ; \quad (a^+, a^-) \mapsto \det(a^+(a^-)^{-1})$ est une submersion.

Soit $(a^+, a^-) \in G$. On lui associe :

$$\psi_1(a^+, a^-) : \mathbb{R}SU(2) \to \mathbb{R}SU(2) \quad ; \quad h \mapsto a^+ h (a^-)^{-1} = \frac{a^+}{\det(a^+)} h (\frac{a^-}{\det(a^-)})^{-1}$$

$\psi_1(a^+, a^-)$ est une isométrie, on a bien une action de groupe, et ψ_1 est un morphisme :

$$\psi_1 : G \to SO(4)$$

(G est connexe car $U(2)^2$ l'est et si $(a^+, a^-) \in G$, $\gamma : [0,1] \to U(2)^2 \quad ; \quad t \mapsto (\gamma_+(t), \gamma_-(t))$ relie (a^+, a^-) à l'identité, alors $\gamma_1 : t \mapsto (\gamma_+(t), \frac{\det(\gamma_+(t))}{\det(\gamma_-(t))}\gamma_-(t))$ les relient aussi.)

On pose :

$$\psi : G \to SO(4) \times \mathbb{S}^1 \quad ; \quad (a^+, a^-) \mapsto (\psi_1(a^+, a^-), \det(a^+))$$

Soit $(a^+, a^-) \in \ker \psi$, on a $(a^+, a^-) \in SU(2)^2$ et $a^+ id (a^-)^{-1} = id$ donc $a^+ = a^- = a$ et $a \in \ker \phi$ donc $\ker \psi = \{(id, id), (-id, -id)\}$.

ψ est de rang constant et injective au voisinage de l'identité donc c'est un difféomorphisme local. Son image est donc ouverte, elle est de plus fermée par compacité, donc ψ est surjective, c'est un revêtement à deux feuillets.

Explicitation d'un isomorphisme important ψ étant un difféomorphisme, sa différentielle en l'identité est un un isomorphisme entre $\{(a^+, a^-) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)^2 \quad \text{tel que} \quad (a^+)^* = -a^+, \quad (a^-)^* = -a^-, \quad tr(a^+) = tr(a^-)\} = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{so}(4) \times i\mathbb{R}$.

Proposition 3.1. *L'application linéaire*

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{so}(4) \times i\mathbb{R} \ ; \ (a^+, a^-) \mapsto ((h \mapsto a^+h - ha^-), \mathrm{tr}(a^+))$$

Est un isomorphisme, d'inverse :

$$f : \mathfrak{so}(4) \times i\mathbb{R} \to \mathfrak{g} \ ; \ (\beta, \alpha) \mapsto (\frac{1}{2}\alpha Id - \frac{1}{4}\gamma_0^+(\beta^\sharp), \frac{1}{2}\alpha Id - \frac{1}{4}\gamma_0^-(\beta^\sharp))$$

Où $\beta^\sharp$ est la forme bilinéaire antisymétrique induite par β et γ_0^- (resp γ_0^+) est l'application linéaire telle que $\gamma_0^-(p_{i,*} \otimes p_{j,*}) = -p_i p_j^*$ (resp $\gamma_0^+(p_{i,*} \otimes p_{j,*}) = -p_i^* p_j$) (on note $p_{i,*}$ la base duale pour ne pas confondre avec la transposée du conjugué.).

Si b bilinéaire antisymétrique, $b = \sum_{i,j} b_{i,j} p_{i,*} \otimes p_{j,*}$, on a $\mathrm{tr}(\gamma_0^-(b)) = 2\sum_i b_{ii} = 0$ et $\gamma_0^-(b) = -\sum_{i \neq j} b_{ij} p_i p_j^* \in \mathfrak{su}(2)$; Donc f est bien définie.

preuve. Tout d'abord on remarque que $\psi_2(f(\beta, \alpha)) = \alpha$ et $\psi_1(f(\beta, \alpha)) = \psi_1(f(\beta, 0))$. Soit $\beta \in \mathfrak{so}(4)$ tel que $\beta^\sharp = p_{I,*} \wedge p_{J,*}$, $\quad I < J$. On pose $\beta_1 = \psi_1(f(\beta, 0))$,

$$\beta_1(h) = p_I^* p_J h - h p_I p_J^* - p_J^* p_I h + h p_J p_I^*$$

Et

$$\begin{aligned}
(\beta_1 p_i \mid p_j) &= \mathrm{tr}(p_I^* p_J p_i p_j^* - p_i p_I p_J^* p_j^* - p_J^* p_I p_i p_j^* + p_i p_J p_I^* p_j^*) \\
&= (p_J p_i \mid p_I p_j) - (p_i p_I \mid p_j p_J) - (p_I p_i \mid p_J p_j) + (p_j p_I \mid p_i p_J) \\
&= 2(p_J p_i \mid p_I p_j) - 2(p_i p_I \mid p_j p_J) \\
&= 2(-(p_I p_J^* \mid p_i^* p_j) + (p_J^* p_I \mid p_i p_j^*))
\end{aligned}$$

Si $I = 1$, $(\beta_1 p_i \mid p_j) = 2(p_J^* \mid -p_i^* p_j + p_i p_j^*)$ et p_i et p_j ne peuvent être imaginaires purs simultanément (si on veut que l'expression soit non nulle), donc $(\beta_1 p_i \mid p_j) = 4\delta_{i,1}\delta_{j,J} - 4\delta_{j,1}\delta_{i,J}$.

Si $I > 1$, $(\beta_1 p_i \mid p_j) = 2(p_I p_J^* \mid -p_i^* p_j + p_i p_j^*)$ et p_i et p_j sont nécessairement imaginaires purs simultanément (si on veut que l'expression soit non nulle), donc $(\beta_1 p_i \mid p_j) = 4\delta_{i,I}\delta_{j,J} - 4\delta_{i,J}\delta_{j,I}$.

Dans tous les cas, $\beta_1^\sharp = 4 p_{I,*} \wedge p_{J,*}$, et enfin f est bien la réciproque de ψ. □

4 Structures *Spin* et *Spin*^{c}

On va à partir de maintenant se restreindre au cas d'une variété de dimension 4, cas pour lequel les définitions qu'on va donner sont très concrètes. On ne va s'intéresser qu'à ces définitions concrètes, bien que des définitions plus générales existent, utilisant par exemple la notion de fibré principal. Ces définitions concrètes sont en fait des propositions qui découlent des définitions abstraites.

Définition 4.1. *Soit (Λ, h) un fibré vectoriel euclidien de rang 4 et de base M.*

Structure *Spin* **:** *La donnée d'une structure Spin sur (Λ, h) est un triplet $(\Sigma^-, \Sigma^+, \gamma^-)$ (parfois appelé τ), où $\Sigma^{+,-}$ sont des $SU(2)$-fibré vectoriels et $\gamma^- : \Lambda \to \mathbb{R}SU(\Sigma^-, \Sigma^+)$ est un isomorphisme linéaire (de fibrés) qui multiplie les normes par $\sqrt{2}$ et respecte les orientations.*

Structure *Spin*^{c} **:** *La donnée d'une structure Spin^c sur (Λ, h) est un quadruplet $(\Sigma^-, \Sigma^+, \mathcal{I}, \gamma^-)$ (parfois appelé τ), où $\Sigma^{+,-}$ sont des $U(2)$-fibré vectoriels, $\mathcal{I} : \bigwedge^2(\Sigma^-) \to \bigwedge^2(\Sigma^+)$ est un isomorphisme unitaire et $\gamma^- : \Lambda \to \mathbb{R}SU(\Sigma^-, \Sigma^+)$ est un isomorphisme qui préserve les orientations (induites par $\mathcal{I}$) et multiplie les normes par $\sqrt{2}$.*

Remarque : Cette définition n'est pas naturelle, et il convient de se demander quels fibrés vérifiant les hypothèses de la définition admet une *Spin*-structure ou une *Spin*^{c}-structure. On ne va qu'énoncer des théorèmes qui répondent à la question, sans les prouver. Un théorème de Hirzebruch-Hopf affirme que toute variété riemannienne orientée compacte admet une structure *Spin*^{c} (ie son fibré tangent en admet une). Par contre elle n'admet pas nécessairement de structure *Spin*.

Remarque : Dans le cas de la structure *Spin*^{c}, si on se donne des bases locales (v_1^-, v_2^-) et (v_1^+, v_2^+) de Σ^- et Σ^+ telles que $\mathcal{I}(v_1^- \wedge v_2^-) = v_1^+ \wedge v_2^+$, alors $\mathbb{R}SU(\Sigma^-, \Sigma^+)$ est engendré par la base orthogonale orientée $(p_i(x))$ des matrices de Pauli où les bases des espaces de départ et d'arrivée sont (v_1^-, v_2^-) et (v_1^+, v_2^+).

4.1 Prolongement de γ^-

Soit (Λ, h) muni d'une structure *Spin* ou *Spin*^{c}.
On pose $\Sigma = \Sigma^- \oplus \Sigma^+$
On pose $\gamma^+ = -(\gamma^-)^* : \Lambda \to \mathbb{R}SU(\Sigma^+, \Sigma^-)$
On définit :

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^+ \\ \gamma^- & 0 \end{pmatrix} : \Lambda \to \mathfrak{su}(\Sigma)$$

On peut alors étendre γ à tout $\bigotimes \Lambda = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda^{\otimes i}$ par :

$$\gamma : \bigotimes \Lambda \to \mathrm{End}(\Sigma) \quad ; \quad s \otimes t \mapsto \gamma(s) \circ \gamma(t)$$

4.2 Identité de Clifford

Proposition 4.1. *Soient u et v des sections de Σ. On a l'identité suivante :*

$$\gamma(u)\gamma(v) + \gamma(v)\gamma(u) = -2(u \mid v)Id$$

preuve.

$$\begin{aligned}\gamma(u)\gamma(v) + \gamma(v)\gamma(u) &= \begin{pmatrix} -\gamma^-(u)^*\gamma^-(v) & 0 \\ 0 & -\gamma^-(u)\gamma^-(v)^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma^-(v)^*\gamma^-(u) & 0 \\ 0 & -\gamma^-(v)\gamma^-(u)^* \end{pmatrix} \\ &= -(\gamma^-(u) \mid \gamma^-(v))Id \\ &= -2(u \mid v)Id\end{aligned}$$

□

5 Opérateur de Dirac

Proposition 5.1. *Soit M une variété Riemannienne orientée de dimension 4, telle que le fibré tangent TM (ou le fibré cotangent, cela revient au même grâce à la structure euclidienne) est muni d'une structure $Spin^c$: $(\Sigma^-, \Sigma^+, \mathcal{I}, \gamma^-)$. On note ∇_g la connexion de Lévi-Civita sur TM, et on se donne une connexion hermitienne ∇_A sur $\bigwedge^2 \Sigma^-$.*

∇_A induit une connexion sur $\bigwedge^2 \Sigma^+$ par l'intermédiare de $\mathcal{I}$: c'est $\mathcal{I} \circ \nabla_A \circ \mathcal{I}^{-1}$. Mais localement, si on se donne des bases telles que $\mathcal{I}(\epsilon_1^- \wedge \epsilon_2^-) = \epsilon_1^+ \wedge \epsilon_2^+$, alors $\mathcal{I} \circ (d + \alpha_i e_{i,*}) \circ \mathcal{I}^{-1} = d + \alpha_i e_{i,*}$, donc on identifiera par abus de notations les connexions.

Nous clamons qu'il existe alors un unique couple de connexions hermitiennes $\nabla_{\widehat{A}^{-,+}}$ sur $\Sigma^{-,+}$ tel que :

- $\nabla_{\widehat{A}} = \nabla_{\widehat{A}^-} \oplus \nabla_{\widehat{A}^+}$ *vérifie*
$$\nabla_{\widehat{A}}^{\mathrm{End}} \circ \gamma = \gamma \circ \nabla_g$$
- $$\nabla_{\widehat{A}^-}^{\det} = \nabla_A = \nabla_{\widehat{A}^+}^{\det}$$

preuve. Raisonnons par condition nécessaire : si de telles connexions existaient, alors on se place au voisinage d'un point et on se donne (e_i) une base locale de TM, $(\epsilon_a^{-,+}$ = des bases locales de $\Sigma^{-,+}$. telles que $\gamma^-(e_i) = p_i$ et $\mathcal{I}(\epsilon_1^- \wedge \epsilon_2^-) = \epsilon_1^+ \wedge \epsilon_2^+$, et si on pose $P_i = \begin{pmatrix} 0 & -p_i^* \\ p_i & 0 \end{pmatrix}$, alors
$$\gamma(e_i) = P_i$$

On écrit ensuite $\nabla_g = d + \sum_i e_{i,*} \otimes \beta_i,\ \beta_i \in A^0(\mathfrak{so}(TM))$, puis $\nabla_A = d + \sum_i e_{i,*} \otimes \alpha_i$, $\alpha_i \in i\mathbb{R}$, et enfin $\nabla_{\widehat{A}} = d + \sum_i e_{i,*} \otimes a_i$, où $a_i = \begin{pmatrix} a_i^- & 0 \\ 0 & a_i^+ \end{pmatrix}$ et $a_i^{-,+} \in A^0(\mathfrak{su}(\Sigma^{-,+}))$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\widehat{A},e_i}^{\mathrm{End}} \circ \gamma(e_j) &= \nabla_{\widehat{A},e_i}^{\mathrm{End}} P_j \\
&= \nabla_{\widehat{A},e_i} \circ P_j - P_j \circ \nabla_{\widehat{A},e_i} \\
&= d_{e_i} \circ P_j - P_j \circ d_{e_i} + a_i P_j - P_j a_i \\
&= a_i P_j - P_j a_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma \circ \nabla_{g,e_i}(e_j) &= \gamma(\sum_k \beta_{i,kj} e_k) \\
&= \sum_k \beta_{i,kj} P_k
\end{aligned}$$

D'où :
$$a_i P_j - P_j a_i = \sum_k \beta_{i,kj} P_k$$

Puis :

$$a_i^- p_j^* - p_j^* a_i^+ = \sum_k \beta_{i,kj} p_k^*$$
$$a_i^+ p_j - p_j a_i^- = \sum_k \beta_{i,kj} p_k$$

Mais la première équation découle de la deuxième car $a_i^{-,+} \in \mathfrak{su}(\Sigma^{-,+})$ donc $(a_i^{-,+})^* = -a_i^{-,+}*$ et

$$(a_i^+ p_j - p_j a_i^-)^* = a_i^- p_j^* - p_j^* a_i^+$$

Et de plus l'autre condition $\nabla^{\det}_{\widehat{A}^-} = \nabla_A = \nabla^{\det}_{\widehat{A}^+}$ fournit, d'après le calcul de $\nabla^{\det}$ en fonction de ∇ effectué précédemment ($\Gamma_i^{\det} = tr(\Gamma_i)$),

$$\mathrm{tr}(a_i^-) = \mathrm{tr}(a_i^+) = \alpha_i$$

On a deux conditions nécessaires, et ces conditions sont suffisantes localement. En effet dans le cas général, $\nabla^{\mathrm{End}}_{\widehat{A},X} \circ \gamma(Y)$ et $\gamma \circ \nabla_{g,X}(Y)$ sont $C^\infty(M)$-linéaires en X, et :

$$\begin{aligned}
\nabla^{\mathrm{End}}_{\widehat{A},X} \circ \gamma(fY) &= \nabla^{\mathrm{End}}_{\widehat{A},X}(f\gamma(Y)) \\
&= f\nabla^{\mathrm{End}}_{\widehat{A},X} \circ \gamma(Y) + (d_X f)\gamma(Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma \circ \nabla_{g,X}(fY) &= \gamma(d_X f)Y + f\nabla_X Y) \\
&= f\gamma \circ \nabla_{g,X}(Y) + (d_X f)\gamma(Y)
\end{aligned}$$

Donc avoir égalité sur la base est suffisant pour obtenir égalité partout (localement).

L'isomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{so}(4) \times i\mathbb{R}$ étudié précédemment permet de conclure quand à l'existence et unicité locale des connexions.

En effet l'unicité est évidente et on avait une explicitation de la réciproque de l'isomorphisme , qui légèrement remaniée, nous dit :

$$a_i = \frac{1}{2}\alpha_i Id - \frac{1}{4}\gamma(\beta_i^\sharp)$$

Expression qui est lisse.

L'unicité local permet de conclure quand à l'existence global, et la proposition est démontrée. $\square$

Remarque : Si X et Y sont des champs de vecteurs, et $\sigma \in A^0(\Sigma)$, on a

$$\nabla_{\widehat{A},Y} \circ \gamma(X) - \gamma(X) \circ \nabla_{\widehat{A},Y} = \nabla^{\mathrm{End}}_{\widehat{A},Y}\gamma(u) = \gamma(\nabla_{g,Y} X)$$

D'où :

$$\nabla_{\widehat{A},Y}(\gamma(X) \cdot \sigma) = \gamma(\nabla_{g,Y} X) \cdot \sigma + \gamma(X) \cdot \nabla_{\widehat{A},Y}\sigma$$

Définition 5.1. *Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente, on définit l'opérateur de Dirac :*

$$\not{D}_A : A^0(\Sigma) \to A^0(\Sigma)$$

Comme la composée :

$$A^0(\Sigma) \xrightarrow{\nabla_{\widehat{A}}} A^1(\Sigma) \xrightarrow{m_\gamma} A^0(\Sigma)$$

Où :

$$m_\gamma : \Lambda^1 M \otimes \Sigma \to \Sigma \quad ; \quad \lambda \otimes \sigma \mapsto \gamma(\lambda) \cdot \sigma$$

Remarque : Localement on a

$$\not{D}_A \Psi = m_\gamma(\sum_i e_{i,*} \otimes \nabla_{\widehat{A},e_i} \Psi) = \sum_i \gamma(e_i) \cdot \nabla_{\widehat{A},e_i} \Psi$$

6 La formule de Lichnerowicz

Proposition 6.1. *Soit M, g une variété euclidienne orientée munie d'une structure Spin^c, soit ∇_A une connexion sur $\bigwedge^2 \Sigma$. On a alors la formule suivante :*

$$\not{D}_A \not{D}_A = \Delta_{\widehat{A}} + \frac{1}{4}\gamma(F_A) + \frac{s_g}{4} Id_\Sigma$$

preuve. Soit $x \in M$, on se donne une base locale orthonormale au voisinage de x telle que $\forall i,\ \nabla_g e_i(x) = 0$. Alors comme la connexion est sans torsion, $[e_i, e_j] = \nabla_{g,e_i} e_j - \nabla_{g,e_j} e_i = 0$.

Alors $F_{\widehat{A},ij}(x) = [\nabla_{\widehat{A},e_i}, \nabla_{\widehat{A},e_j}]$.
Soit $\Psi \in A^0(\Sigma)$, on calcule en x :

$$\begin{aligned}
\not{D}_A \not{D}_A \Psi(x) &= \sum_{ij} \gamma(e_j) \nabla_{\widehat{A},e_j} (\gamma(e_i) \nabla_{\widehat{A},e_j} \Psi) \\
&= \sum_{ij} \gamma(e_j)\gamma(e_i) \nabla_{\widehat{A},e_j} \nabla_{\widehat{A},e_i} \Psi + \gamma(e_i)\gamma(\nabla_{g,e_j} e_i) \nabla_{\widehat{A},e_i} \Psi \\
&= \sum_{ij} \gamma(e_j \otimes e_i) \nabla_{\widehat{A},e_j} \nabla_{\widehat{A},e_i} \Psi \\
&= -\sum_i \nabla^2_{\widehat{A},e_i} \Psi + \sum_{j<i} \gamma(e_j \otimes e_i)[\nabla_{\widehat{A},e_j}, \nabla_{\widehat{A},e_i}]\Psi \quad \text{Identité de Clifford} \\
&= \Delta_{\widehat{A}} \Psi + \frac{1}{2} \sum_{ij} \gamma(e_j \otimes e_i)[\nabla_{\widehat{A},e_j}, \nabla_{\widehat{A},e_i}]\Psi \\
&= \Delta_{\widehat{A}} \Psi + \frac{1}{2} \gamma(F_{\widehat{A}})(\Psi)
\end{aligned}$$

Où pour la dernière égalité on a étendu γ naturellement : $\gamma(F) = \sum_{ij} F_{ij} \gamma(e_i \otimes e_j)$

On écrit $\nabla_{\widehat{A}} = d + a_i e_{i,*}$, $\nabla_g = d + \sum_i e_{i,*}\beta_i$, $\nabla_A = d + \sum_i e_{i,*}\alpha_i$. On sait que $a_i = \frac{1}{2}\alpha_i Id - \frac{1}{4}\gamma(\beta_i^\sharp)$.
Alors

$$\begin{aligned}
F_{\widehat{A},ij} &= d_{e_i}a_j - d_{e_j}a_i + [a_i, a_j] \\
&= \frac{1}{2}F_{A,ij}Id + \frac{1}{4}(d_{e_i}\gamma(\beta_j^\sharp) - d_{e_j}\gamma(\beta_i^\sharp)) + \frac{1}{16}(\gamma(\beta_i^\sharp)\gamma(\beta_j^\sharp) - \gamma(\beta_j^\sharp)\gamma(\beta_i^\sharp)) \\
&= \frac{1}{2}F_{A,ij}Id + \frac{1}{4}(\gamma(d_{e_i}\beta_j^\sharp) - \gamma(d_{e_j}\beta_i^\sharp)) + \frac{1}{16}(\gamma(\beta_i^\sharp)\gamma(\beta_j^\sharp) - \gamma(\beta_j^\sharp)\gamma(\beta_i^\sharp))
\end{aligned}$$

Car :

$$d_{e_i}\gamma(A^\sharp) = \sum_{jk} d_{e_i}(A_{ji}P_iP_j) = \sum_{jk}(d_{e_i}A_{ji})P_iP_j = \gamma((d_{e_i}A)^\sharp)$$

D'où :

$$\gamma(F_{\widehat{A}}) = \frac{1}{2}\gamma(F_A) + \frac{1}{4}\sum_{ij}\gamma(e_i\otimes e_j)\gamma(d_{e_i}\beta_j^\sharp - d_{e_j}\beta_i^\sharp) + \frac{1}{16}\sum_{ij}\gamma(e_i\otimes e_j)(\gamma(\beta_i^\sharp)\gamma(\beta_j^\sharp) - \gamma(\beta_j^\sharp)\gamma(\beta_i^\sharp))$$

Maintenant on définit $R \in A^0(\bigwedge^2 M \otimes \bigwedge^2 M)$ par :

$$R(x, y, z, u) = g(F_g(x, y)\cdot z, u)$$

et on a :

$$\begin{aligned}
\gamma(R) &= \sum_{ij}\gamma(e_i\otimes e_j)\gamma(F_{g,ij}^\sharp) \\
&= \sum_{ij}\gamma(e_i\otimes e_j)\gamma(d_{e_i}\beta_j^\sharp - d_{e_j}\beta_i^\sharp) + \sum_{ij}\gamma(e_i\otimes e_j)(\gamma((\beta_i\beta_j)^\sharp) - \gamma((\beta_j\beta_i)^\sharp))
\end{aligned}$$

Or si A et B sont antisymétriques :

$$\gamma(A^\sharp)\gamma(B^\sharp) - \gamma(B^\sharp)\gamma(A^\sharp) = \sum_{ijkl} A_{ij}B_{kl}(P_iP_jP_kP_l - P_kP_lP_iP_j)$$

Grâce à l'identité de Clifford et et l'antisymétrie de A et B, on voit qu'un terme de la somme est non nul seulement si parmi les quatre indices, 3 sont distincts et $i \neq j$ et $k \neq l$. On en déduit (en utilisant l'identité de Clifford) :

$$\begin{aligned}
\gamma(A^\sharp)\gamma(B^\sharp) - \gamma(B^\sharp)\gamma(A^\sharp) &= -\sum_{ijl}(A_{ij}B_{jl} - B_{ij}A_{jl})P_iP_l + \sum_{ijk}(A_{ij}B_{kj} - B_{ij}A_{kj})P_iP_k \\
&\quad + \sum_{ijl}(A_{ij}B_{il} - B_{ij}A_{il})P_jP_l - \sum_{ijk}(A_{ij}B_{ki} - B_{ij}A_{ki})P_jP_k \\
&= 4\sum_{ijk}(A_{jk}B_{ki} - B_{jk}A_{ki})P_iP_j \\
&= 4\sum_{ij}(AB - BA)_{ji}P_iP_j \\
&= 4\gamma((AB)^\sharp) - 4\gamma((BA)^\sharp)
\end{aligned}$$

Finalement il vient :

$$\gamma(F_{\widehat{A}}) = \frac{1}{2}\gamma(F_A) - \frac{1}{4}\gamma(R)$$

Reste à montrer que $\gamma(R) = 2s_g Id$. On pose $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$ et on rappelle les propriétés de la courbure provenant d'une connexion de Lévi-Civita :

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -R_{jikl} \\ R_{ijkl} &= -R_{ijlk} \\ R_{ijkl} &= R_{klij} \\ R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} &= 0 \end{aligned}$$

Si on fixe l, il en découle

$$\sum_{ijk \text{distincts et différents de l}} R_{ijkl} P_i P_j P_k P_l = 0$$

(On partitionne la somme par les orbites de l'action "permutation circulaire des indices ijk" et on utilise la quatrième propriété et l'identité de Clifford.)
D'où :

$$\sum_{ijkl \quad \text{distincts}} R_{ijkl} P_i P_j P_k P_l = 0$$

On a aussi

$$\sum_{Card_{ijkl}=3} R_{ijkl} P_i P_j P_k P_l = 0$$

Car un terme de la somme est non nul seulement si sont $i = k$ ou $i = l$ ou $j = k$ ou $j = l$, or

$$R_{ijjl} P_i P_j P_j P_l = -R_{jlij} P_i P_l = R_{ijkl} P_l P_i = -R_{jlij} P_j P_l P_i P_j$$

Et les termes de la somme se compensent deux à deux.
Finalement,

$$\gamma(R) = \sum_{i \neq j} R_{ijij} P_i P_j P_i P_j + \sum_{i \neq j} R_{ijji} P_i P_j P_j P_i = (-\sum_{i \neq j} R_{ijij} + \sum_{i \neq j} R_{ijji}) Id = -2s_g Id$$

Donc la formule de Lichnerowicz est vraie.

□

7 Les équations de Seiberg-Witten

7.1 Les préparatifs

Nous avons besoin de définir quelques notations avant d'écrire les équations de Seiberg-Witten.

7.1.1 La propriété de l'opérateur de Dirac

On désigne par $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des connexions (euclidiennes, hermitiennes) sur le fibré vectoriel (euclidien, hermitien) E. Par abus de notation, on désigne par $A \in \mathcal{Q}(E)$ la connexion $d + A = d + dx_i \otimes A_i$ par rapport à une trivialisation locale.

Théorème 7.1. *Soit $\not{D}_A$ l'opérateur de Dirac associé à une structure Spin^c sur M et la connexion $A \in \mathcal{Q}(\wedge^2(\Sigma^\pm))$. Alors $\not{D}_A$ est la somme de deux opérateurs*

$$\not{D}_A^\pm : A^0(\Sigma^\pm) \to A^0(\Sigma^\mp)$$

et $\not{D}_A, \not{D}_A^\pm$ sont des opérateurs elliptiques du premier ordre.

Proof. Localement,

$$\begin{aligned}\not{D}_A(s) &= m_\gamma(ds + dx_i \otimes \widehat{A}_i s) \\ &= \gamma(dx_i)(\frac{\partial s}{\partial x_i} + \widehat{A}_i s)\end{aligned}$$

Par définition,

$$\gamma(dx_i) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^+(dx_i) \\ \gamma^-(dx_i) & 0 \end{pmatrix}$$

et $\widehat{A}_i$ a la forme

$$\widehat{A}_i = \begin{pmatrix} \widehat{A}_i^- & 0 \\ 0 & \widehat{A}_i^+ \end{pmatrix}$$

où

$$\widehat{A}_i^\pm \in \mathfrak{u}(\Sigma^\pm)$$

donc

$$\not{D}_A(A^0(\Sigma^\pm)) \subset A^0(\Sigma^\mp), \text{ et } \not{D}_A = \not{D}_A^+ \oplus \not{D}_A^-$$

Soit $x \in M, v \in TM_x^*, v \neq 0$, on peut prendre un carte locale telle que

$$x_i(x) = 0, i = 1, \dots, 4, \quad dx_1 = v$$

Le symbole

$$\begin{aligned}\sigma_v(\not{D}_A)(s) &= \gamma(dx_i)(\frac{\partial x_i s}{\partial x_i} + \widehat{A}_i x_i s)|_x \\ &= \gamma(dx_1)s \\ &= \gamma(v)s\end{aligned}$$

puis que $\gamma(v) : \Sigma_x \to \Sigma_x$, et $\gamma(v)|_{\Sigma_x^\pm} : \Sigma_x^\pm \to \Sigma_x^\mp$ sont des isomorphismes pour tout v non-nul , on a $\not{D}_A, \not{D}_A^\pm$ sont des opérateurs elliptiques. □

7.1.2 La propriété de γ

Soit (M, g) une 4-variété Riemannienne, alors l'opérateur de Hodge $*|_{\wedge^2(M)}$ satisfait $*|_{\wedge^2(M)} \circ *|_{\wedge^2(M)} = \mathrm{Id}$, donc induit une décomposition en somme directe orthogonale
$$\wedge^2(M) = \wedge^2_-(M) \oplus \wedge^2_+(M)$$
Soit
$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$
la base de $\mathbb{R}SU(\Sigma^-, \Sigma^+)$, on prend $\{e_i\}$ la base orthonormale de TM^* telle que $\gamma^-(e_i) = p_i$.Alors
$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3$$
est la base de $\wedge^2_+(M)$. On peut calculer

$$\begin{aligned}
\gamma(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) &= \gamma(e_1)\gamma(e_2) - \gamma(e_2)\gamma(e_1) + \gamma(e_3)\gamma(e_4) - \gamma(e_4)\gamma(e_3) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4i \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(\Sigma^+)
\end{aligned}$$

et
$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4i \end{pmatrix} \right\| = 4\sqrt{2} = 4\|e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4\|$$
En faisant le calcul similaire pour
$$\gamma(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4), \gamma(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3)$$
et
$$\gamma(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4), \gamma(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4), \gamma(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3)$$
on a $\gamma|_{\wedge^2(M)}$ de la forme
$$\gamma(\omega) = \begin{pmatrix} \gamma_-(\omega_-) & 0 \\ 0 & \gamma_+(\omega_+) \end{pmatrix}$$
où $\gamma_\pm : \wedge^2_\pm(M) \to \mathfrak{su}(\Sigma^\pm)$ est un isomorphisme qui multiplie les normes par 4 et $\omega_\pm$ désigne la composante (anti-)autoduale de ω.

7.1.3 Algèbre Linéaire

Soit W un espace complexe hermitien de dimension d, pour $(v,w) \in W \times W$, on définit $v \otimes \widehat{w} \in \mathrm{End}(W)$:

$$v \otimes \widehat{w}(u) := \langle u, w \rangle v$$

et on désigne par $(v \otimes \widehat{w})_0$ la composante de trace nulle de $v \otimes \widehat{w}$, c'est-à-dire:

$$(v \otimes \widehat{w})_0 := v \otimes \widehat{w} - \frac{1}{d}\mathrm{Tr}(v \otimes \widehat{w})\mathrm{Id}_W$$

Lemme 7.1. *Soit W un espace complexe hermitien de dimension d, alors pour tout $w \in W$, on a*

$$(w \otimes \widehat{w})(w) = |w|^2 w, \qquad |w \otimes \widehat{w}|^2 = |w|^4,$$

$$(w \otimes \widehat{w})_0(w) = \frac{d-1}{d}|w|^2 w, \qquad |(w \otimes \widehat{w})_0|^2 = \frac{d-1}{d}|w|^4,$$

et pour tout $u, v \in W, \varphi \in End(W)$ on a

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle \varphi, v \otimes \widehat{u} \rangle$$

Proof. Si $w = 0$, alors $w \otimes \widehat{w} = (w \otimes \widehat{w})_0 = 0$. Sinon, on peut prendre une base orthonormale $\{e_i\}$ telle que $w = |w|e_1$. Dans cette base, on a

$$w \otimes \widehat{w} = \mathrm{diag}(|w|^2, 0, \dots, 0) \quad (w \otimes \widehat{w})_0 = \mathrm{diag}(\frac{d-1}{d}|w|^2, \frac{-1}{d}|w|^2, \dots, \frac{-1}{d}|w|^2)$$

donc

$$(w \otimes \widehat{w})(w) = |w|^2 w, \qquad |w \otimes \widehat{w}|^2 = |w|^4,$$

$$(w \otimes \widehat{w})_0(w) = \frac{d-1}{d}|w|^2 w, \qquad |(w \otimes \widehat{w})_0|^2 = \frac{d-1}{d}|w|^4,$$

si dans une base orthonormale,

$$u = (u_1, \dots, u_d), \quad v = (v_1, \dots, v_d), \quad \varphi = (a_{ij})$$

Alors

$$(v \otimes \widehat{u})_{ij} = \overline{u_j} v_i$$

donc

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} u_j \overline{v_i} = \langle \varphi, v \otimes \widehat{u} \rangle$$

□

7.2 Les équations et l'action de groupe

Maintenant, soit τ une structure $Spin^c$ sur une 4-variété Riemannienne compacte connexe orientée (M,g). on peut écrire les équations de Seiberg-Witten (SW_0^τ) associées à τ:

$$\begin{cases} \not{D}_A \Psi = 0 \\ \gamma^+(F_A^+) - (\Psi \otimes \widehat{\Psi})_0 = 0. \end{cases}$$

Ce sont des équations pour une paire

$$(A, \Psi) \in \mathcal{Q} := \mathcal{Q}(\wedge^2(\Sigma^\pm)) \times A^0(\Sigma^+)$$

Soit $\beta \in A^2(M)$ est une 2-forme réelle, les équations de Seiberg-Witten perturbées (SW^τ_β) associées à τ dépendent d'un paramètre β et s'écrivent:

$$\begin{cases} \not{D}_A \Psi = 0 \\ \gamma^+((F_A + 2\pi i \beta)^+) - (\Psi \otimes \widehat{\Psi})_0 = 0. \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{Q}^{SW^\tau_\beta} \subset \mathcal{Q}$ l'espace des solutions de l'équation (SW^τ_β).

Considérons l'action de groupe de jauge

$$\mathcal{G} := C^\infty(M, S^1)$$

sur $A^0(\wedge^2(\Sigma^\pm))$:

$$f.\lambda = f^2 \lambda, \quad \forall f \in \mathcal{G}, \lambda \in A^0(\wedge^2(\Sigma^\pm))$$

elle induit l'action de $\mathcal{G} := C^\infty(M, S^1)$ sur $\mathcal{Q}(\wedge^2(\Sigma^\pm))$:

$$f.A = A + 2f^{-1}df \quad \forall f \in \mathcal{G}, A \in \mathcal{Q}(\wedge^2(\Sigma^\pm))$$

parce que on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^0(\wedge^2(\Sigma^\pm)) & \xrightarrow{f.A} & A^1(\wedge^2(\Sigma^\pm)) \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ A^0(\wedge^2(\Sigma^\pm)) & \xrightarrow{A} & A^1(\wedge^2(\Sigma^\pm)) \end{array}$$

Donc on peut définir l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\wedge^2(\Sigma^\pm)) \times A^0(\Sigma^+)$ par

$$f.(A, \Psi) = (A + 2f^{-1}df, f^{-1}\Psi)$$

$\mathcal{Q}(\wedge^2(\Sigma^\pm))$ est un espace affine, il a une topologie de Fréchet C^∞. Donc $\mathcal{Q}$ a une topologie de Fréchet C^∞, et l'action de $\mathcal{G}$ est continue par rapport à cette topologie.

On désigne par β la connexion de Levi-Civita. Alors

$$\nabla_{\widehat{A}} = d + dx_i \otimes (\frac{1}{2} A_i id_\Sigma + \frac{1}{4}\gamma(\beta_i^\sharp))$$

$$\begin{aligned} f\nabla_{\widehat{f.A}}(f^{-1}\Psi) - \nabla_{\widehat{A}}(\Psi) &= f(d + f^{-1}df + dx_i \otimes (\frac{1}{2} A_i id_\Sigma + \frac{1}{4}\gamma(\beta_i^\sharp)))(f^{-1}\Psi) \\ &\quad - (d + dx_i \otimes (\frac{1}{2} A_i id_\Sigma + \frac{1}{4}\gamma(\beta_i^\sharp)))(\Psi) \\ &= -f df^{-1}\Psi + f^{-1}df\Psi = 0 \end{aligned}$$

En outre,

$$F_{f.A} = d(f.A) = d(A + 2f^{-1}df) = dA = F_A$$

$$f^{-1}\Psi \otimes \widehat{f^{-1}\Psi} = f^{-1}\overline{f^{-1}}\Psi \otimes \widehat{\Psi} = \Psi \otimes \widehat{\Psi}$$

parce $f \in \mathcal{G} = C^{\infty}(M.S^1)$. donc on a

$$(A,\Psi) \in \mathcal{Q}^{SW_\beta^\tau} \Longrightarrow f.(A,\Psi) \in \mathcal{Q}^{SW_\beta^\tau}$$

On peut définir l'espace des modules des monopoles de Seiberg-Witten associé à la structure *Spin*^{c} τ et à la perturbation β : c'est le quotient

$$\mathcal{M}_\beta^\tau := \mathcal{Q}^{SW_\beta^\tau}/\mathcal{G}$$

doté de la topologie quotient.

8 Compacité

On va montrer:

Théorème 8.1. *Soit (M,g) une 4-variété riemannienne compacte, connexe et orientée, soit τ une structure Spin^c sur M et soit $\beta \in A^2(M)$. Alors l'espace des modules $\mathcal{M}_\beta^\tau$ est compact.*

L'idée de la démonstration est de construire un sous-espace compact $S \subset \mathcal{Q}^{SW_\beta^\tau}$ qui intersecte toutes les orbites des solutions de (SW_0^τ). Si

$$\mathcal{B} := \mathcal{Q}/\mathcal{G}$$

est Hausdorff, alors $\mathcal{M}_\beta^\tau$ est l'image de S via la projection canonique $\mathcal{Q} \to \mathcal{B}$ donc est compact.
Pour la construction de S, on a besoin du Théorème de Hodge:

Théorème 8.2 (Théorème de Hodge)**.** *On a la décomposition en somme directe L^2-orthogonal*

$$A^k(M) = \mathbb{H}^k(M) \oplus d(A^{k-1}(M)) \oplus d^*(A^{k+1}(M))$$

où

$$\mathbb{H}^k(M) := \ker \Delta|_{A^k(M)}$$

est l'espace de formes harmoniques de degré k.

On désigne par harm(ω) la composante harmonique de ω, et désigne par $\mathbb{H}^1(M,\mathbb{Z})$ l'image de $H^1(M,\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{H}^1(M,\mathbb{C})$ via les isomorphismes de de Rham et Hodge. Fixons $A_0 \in \mathcal{Q}(\wedge^2(\Sigma^{\pm}))$ et une base $\{e_i\}$ du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{H}^1(M,\mathbb{Z})$, désignons $\Pi \subset i\mathbb{H}^1(M,\mathbb{R})$ l'enveloppe convexe des vecteurs $4\pi i e_i$.
On construit $S \subset \mathcal{Q}^{SW_\beta^\tau}$ par

$$S := \{(A,\Psi) \in \mathcal{Q}^{SW_\beta^\tau} | d^*(A - A_0) = 0, \mathrm{harm}(A - A_0) \in \Pi\}.$$

8.1 $\mathcal{B}$ est Hausdorff

On définit

$$\Gamma := \{((A,\Psi),(B,\Phi)) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} | \exists f \in \mathcal{G}, f.(A,\Psi) = (B,\Phi)\}$$

Si
$$((A,\Psi),(B,\Phi)) \in \bar{\Gamma}^c$$
Alors il existe des voisinages U, V de $(A,\Psi),(B,\Phi)$ dans $\mathcal{Q}$ tels que
$$\mathcal{G}.U \cap V = \emptyset$$
La projection canonique $\pi : \mathcal{Q} \to \mathcal{B}$ est ouverte parce que l'action de $\mathcal{G}$ et continue. Donc $\pi(U), \pi(V)$ sont des voisinages de $\pi((A,\Psi)), \pi((B,\Phi)) \in \mathcal{B}$ et $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$, et donc $\pi((A,\Psi)), \pi((B,\Phi))$ sont en deux ouvert disjoints.

Donc si $\pi((A,\Psi), \pi(B,\Phi)) \in \mathcal{B}$ ne sont pas en deux ouvert disjoints, alors $((A,\Psi),(B,\Phi)) \in \bar{\Gamma}$, il existe $A_n, \Psi_n, B_n, \Phi_n, f_n$ telle que
$$(A_n, \Psi_n) \to (A, \Psi), \quad (B_n, \Phi_n) \to (B, \Phi), \quad f_n.(A_n, \Psi_n) = (B_n, \Phi_n).$$
C'est à dire
$$2df_n = f_n(B_n - A_n), f_n \Phi_n = \Psi_n$$
Parce que $A_n \to A, B_n \to B$ dans la topologie Fréchet C^∞, on a $|\partial_\alpha A_n|, |\partial_\alpha B_n|$ sont bornées uniformément pour touts les indices α tels que $|\alpha| \leq k$ pour k fixé. Alors
$$\begin{aligned} |f_n| = 1 &\Longrightarrow |df_n| \text{ sont bornées uniformément} \\ &\Longrightarrow |\partial_\alpha f_n| \text{ sont bornées uniformément pour tout } |\alpha| = 2 \end{aligned}$$
puisque
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(2df_n) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f_n(B_n - A_n))$$
Par récurrence, on a $|\partial_\alpha f_n|$ sont bornées uniformément pour tout α. Par le procédé diagonal, $\{f_n\}$ admet une sous-suite convergente f_{n_k} telle que
$$f_{n_k} \to f \text{ en } \mathcal{G}$$
donc
$$2df = f(B - A), \quad f\Phi = \Psi,$$
c'est-à-dire
$$\pi((A,\Psi)) = \pi((B,\Phi)),$$
et donc $\mathcal{B}$ est Hausdorff.

8.2 S intersecte toutes les orbites

Pour $(A,\Psi) \in \mathcal{Q}^{SW^\tau_\beta}$, on doit montrer que il existe $h \in \mathcal{G}$ tel que
$$d^*(h.A - A_0) = 0, \quad \mathrm{harm}(h.A - A_0) \in \Pi$$
Par le théorème de Hodge,
$$\Delta(iA^0(M)) = d^*(iA^1(M))$$
donc
$$2d^*du = d^*(A_0 - A)$$
admet une solution $u \in iA^0(M)$
Prenons $f = e^u, A_1 = f.A_0$, alors
$$d^*(A_1 - A_0) = 2d^*(e^{-u}de^u) - d^*(A_0 - A) = 2d^*du - d^*(A_0 - A) = 0$$

Lemme 8.1. *Soit M une variété connexe, le sous-espace $L := \{f^{-1}df | f \in C^\infty(M, S^1)\}/[iB^1_{DR}(M)]$ de $iH^1_{DR}(M)$ coïncide avec l'image de $2\pi i H^1(M, \mathbb{Z})$ dans $iH^1_{DR}(M, \mathbb{R})$ via l'isomorphisme de de Rham.*

Proof. On désigne par $H^1_{DR}(M, \mathbb{Z})$ l'image de $H^1(M, \mathbb{Z})$ dans $H^1_{DR}(M, \mathbb{R})$, alors

$$H^1_{DR}(M, \mathbb{Z}) = \{[\alpha] | \alpha \in Z^1_{DR}(M, \mathbb{R}), \int_{S^1} g^*(\alpha) \in \mathbb{Z}, \forall g : S^1 \xrightarrow{C^\infty} M\}$$

Pour toute application C^∞ $f : M \to S^1$ et $g : S^1 \to M$, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} g^*(f^{-1}df) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} (f \circ g)^{-1} d(f \circ g)$$

Si

$$f \circ g(\alpha) = e^{2\pi i \theta(\alpha)}, \text{ où } \theta : [0, 1] \to \mathbb{R}, \theta(1) - \theta(0) \in \mathbb{Z}$$

alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} (f \circ g)^{-1} d(f \circ g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} 2\pi i d\theta \in \mathbb{Z}$$

donc

$$L \subset 2\pi i H^1_{DR}(M, \mathbb{Z})$$

Soit $[\alpha] \in H^1_{DR}(M, \mathbb{Z})$, fixons $x_0 \in M$.
Si $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to M$ sont deux chemins en M tels que

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0, \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = x$$

alors $\gamma_1 - \gamma_2$ est un chemin fermé en M, donc

$$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha \in \mathbb{Z}$$

donc il existe une application bien définie $f : M \to S^1$:

$$f(x) := e^{2\pi i \varphi(x)}$$

où

$$\varphi(x) := \int_\gamma \alpha, \gamma : [0, 1] \to M, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x.$$

On va montrer $2\pi i \alpha = f^{-1}df$. En effet

$$f^{-1}df = e^{-2\pi i \varphi} de^{2\pi i \varphi} = 2\pi i d\varphi$$

et pour $v \in TM_x$, prenons $\dot{\gamma}(x) = v$,

$$d\varphi|_x(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{[0,t]} \gamma^* \alpha = \alpha(v),$$

donc

$$d\varphi = \alpha \text{ et } 2\pi i \alpha = f^{-1}df,$$

et donc

$$2\pi i H^1_{DR}(M, \mathbb{Z}) \subset L.$$

□

Par définition de Π, il existe $\alpha \in 4\pi i\mathbb{H}^1(M,\mathbb{Z})$ tel que

$$\mathrm{harm}(A_1 - A_0) + \alpha \in \Pi$$

Par le lemme, il existe $g \in C^\infty(M, S^1)$ telle que

$$g^{-1}dg + dv = \alpha, \quad v \in iA^0(M)$$

donc

$$\alpha = (ge^v)^{-1}d(ge^v)$$

Alors

$$(fge^v).A_0 = A_0 + f^{-1}df + (ge^v)^{-1}d(ge^v) = A_1 + \alpha$$

et

$$\mathrm{harm}((fge^v).A_0 - A_0) \in \Pi$$

et

$$d^*((fge^v).A - A_0) = d^*(A_1 - A_0) + d^*\alpha = 0$$

Prenons $h = fge^v$, S intersecte toutes les orbites.

8.3 S est compact

Prenons $\alpha = A - A_0$, alors $\alpha \in iA^1(M)$, et S peut être à l'espace des solutions (α, Ψ) du système

$$\begin{cases} \not{D}_{A_0+\alpha}\Psi = 0 \\ \gamma^+((F_{A_0+\alpha} + 2\pi i\beta)^+) - (\Psi \otimes \widehat{\Psi})_0 = 0 \\ d^*\alpha = 0 \\ \mathrm{harm}(\alpha) \in \Pi \end{cases}$$

qui équivalent à

$$\begin{cases} \not{D}_{A_0}\Psi = -\frac{1}{2}\gamma(\alpha)\Psi \\ \begin{pmatrix} d^+ \\ d^* \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} \gamma_+^{-1}(\Psi \otimes \widehat{\Psi})_0 - F_{A_0}^+ - 2\pi i\beta^+ \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathrm{harm}(\alpha) \in \Pi \end{cases}$$

puisque

$$\not{D}_{A_0+\alpha}\Psi - \not{D}_{A_0}\Psi = m_\gamma(\frac{1}{2}\alpha\Psi) = \frac{1}{2}\gamma(\alpha)\Psi$$
$$F_{A_0+\alpha} = d(A_0+\alpha) = dA_0 + d\alpha = F_{A_0} + d\alpha$$

S est fermé par définition, et il admet une base dénombrable puisque il a la topologie Fréchet C^∞, donc il suffit de montrer que toute suite (α_n, Ψ_n) de S admet une sous-suite convergente. Pour ce faire, on admet quelques résultats de l'espace Sobolev.

Soit E est un fibré vectoriels euclidiens (hermitiens) sur une variété Riemanienne compacte (M, g) Fixons une connexion ∇ sur E, on peut définir la norme Sobolev de section $s \in \Gamma(E)$:

$$\|s\|_{L^p_k} := \sum_{i=0}^{k} \|\nabla^k s\|_{L^p}$$

Pour deux connexions ∇_1 et ∇_2, les normes définies sont équivalentes. On désigne par $L^p_k(E)$ le complété de $\Gamma(E)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_{L^p_k}$.

Théorème 8.3 (Estimations elliptiques)**.** *Soit E, F deux fibrés vectoriels euclidiens (hermitiens) sur une variété riemanienne compacte (M, g) et soit $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ un opérateur elliptique d'ordre d. Alors pour tout $p \in (0, \infty), k \in \mathbb{N}$ il existe une constante positive C^k_p telle que*

$$\|s\|_{L^p_{k+d}} \leq C^k_p(\|s\|_{L^p} + \|Ps\|_{L^p_k})$$

pour toute section $s \in L^p_k(E)$

Théorème 8.4 (Propriété de Fredholm)**.** *Soit (M, g) une variété riemanienne compacte, $(E, h), (F, k)$ deux fibrés vectoriels euclidiens (hermitiens) sur M, et $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ un opérateur elliptique d'ordre d. Alors P admet une extension $P_k : L^p_{k+d}(E) \to L^p_k(F)$, et P_k est un opérateur Fredholm.*

Théorème 8.5 (Théorème de plongement)**.** *Soit E un fibré vectoriel sur une variété compacte M de dimension n. Désignons par $C^r(E)$ l'espace des sections de classe C^r de E. Soit $(p, k) \in (1, \infty) \times \mathbb{N}$. Si $k - \frac{n}{p} > r$, alors l'inclusion $\Gamma(E) \subset C^r(E)$ admet une extension injective continue:*

$$L^p_k(E) \hookrightarrow C^r(E)$$

.

Théorème 8.6 (Multiplication des sections de Sobolev)**.** *Soient E, F, G trois fibrés vectoriels sur une variété compacte M, et soit $B : E \times_M F \to G$ une application différentable et bilinéaire sur les fibres.Alors l'appplication bilinéaire $\Gamma(E) \times \Gamma(F) \to \Gamma(G)$ induite par B admet une extension continue*

$$L^{P_1}_{k_1}(E) \times L^{P_2}_{k_2}(F) \to L^{P_2}_{k_2}(G)$$

si $p_1.p_2 > 1, k_1 - \frac{n}{p_1} > 0, k_1 > k_2$ et $k_1 - \frac{n}{p_1} > k_2 - \frac{n}{p_2}$.

Théorème 8.7 (Le principe de maximum de Hopf)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit*

$$P = \sum h_{ij} \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^i} + \sum g_j \frac{\partial}{\partial u^i}$$

un opérateur différentiel du second ordre sans terme d'ordre 0 sur U tel que $h_{ij}, g_j \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, et $(h_{ij}(u))_{i,j}$ est un matrice symétrique définie positive, pour tout $u \in U$.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 tel que $Pf \geq 0$ sur U et soit $u_0 \in U$ un point de maximum local pour f. Alors f est constante dans un voisinage de u_0.

Localement, soit (g_{ij}) la matrice de la métrique riemannienne g dans la base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$. On désigne par (g^{ij}) la matrice inverse de (g_{ij}), et $\sqrt{g} := \sqrt{det(g_{ij})}$,

$$\widehat{dx_i} := (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \cdots \wedge dx_n.$$

Alors

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

On a

$$*dx_i = g^{ij}\sqrt{g}\widehat{dx_j}$$

puisque

$$dx_j \wedge *dx_i = \langle dx_j, dx_i\rangle\sqrt{g}dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = g^{ij}\sqrt{g}dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Donc

$$*df = g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial f}{\partial x_i}\widehat{dx_j}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta f &= *d*df \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j} \\
&= g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(g^{ij}\sqrt{g})}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Donc $-\Delta|_{A_0(M)}$ satisfait la condition du principe de maximum de Hopf.

Lemme 8.2. *Soit (M, g) une 4-variété riemannienne compacte, connexe et orientée. Alors*

- *l'opérateur* $\begin{pmatrix} d^+ \\ d^* \end{pmatrix} : A^1(M) \to A^0(M) \oplus A^2_+(M)$ *est un opérateur elliptique.*
- ker $\begin{pmatrix} d^+ \\ d^* \end{pmatrix} = \mathbb{H}^1(M, g)$, *coker* $\begin{pmatrix} d^+ \\ d^* \end{pmatrix} = \mathbb{H}^2_+(M, g) \oplus \mathbb{R}$.
  où
  $$\mathbb{H}^2_+(M, g) := \mathbb{H}^2(M, g) \cap A^2_+(M)$$

Proof. On désigne par P l'opérateur $\begin{pmatrix} d^+ \\ d^* \end{pmatrix}$,$P$ est un opérateur différentiel d'ordre d. On peut calculer le symbole $\sigma(P)$ de P.
Soit $x \in M, v \in TM^*_x, \|v\| = 1$, on peut prendre une carte locale telle que

$$x_i(x) = 0, i = 1, \ldots, 4, \quad dx_1 = v, \text{ et } g_{ij} = \delta_{ij},$$

où (g_{ij}) est la matrice de métrique riemannienne g dans le base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$. Alors pour $\alpha = a^i dx_i \in A^1(M)$

$$d(x_1\alpha)|_x = dx_1 \wedge \alpha + x_1 d\alpha = dx_1 \wedge \alpha$$

donc

$$\begin{aligned}
d^+(x_1\alpha)|_x &= pr_+(dx_1 \wedge \alpha) \\
&= pr_+(a^2 dx_1 \wedge dx_2 + a^3 dx_1 \wedge dx_3 + a^4 dx_1 \wedge dx_4) \\
&= \frac{1}{2}a^2(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) + \frac{1}{2}a^3(dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4) + \frac{1}{2}a^4(dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3).
\end{aligned}$$

On désigne par (g^{ij}) la matrice inverse de (g_{ij}), et $\sqrt{g} := \sqrt{det(g_{ij})}$,
$\widehat{dx_i} := (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \cdots \wedge dx_n$. Alors

$$*x_1\alpha = g^{ij}\sqrt{g}a^i x_1\widehat{dx_j}$$

donc

$$\begin{aligned}(d * x_1\alpha)|_x &= \frac{\partial g^{ij}\sqrt{g}a^i x_1}{\partial x_j} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\ &= g^{ij}\sqrt{g}a^i \frac{\partial x_1}{\partial x_j} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\ &= g^{1i}\sqrt{g}a^i dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\ &= \sqrt{g}a^1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d^*(x_1\alpha)|_x &= (- * d * x_1\alpha)|_x \\ &= - * ((d * x_1\alpha)|_x) \\ &= - * (\sqrt{g}a^1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4) \\ &= -a^1\end{aligned}$$

Donc pour tout $v \in TM_x^*, v \neq 0$, on a

$$\sigma_v(P)(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0,$$

puis

$$\dim A^1(M)_x = 4 = 1 + 3 = \dim A^0(M)_x + \dim A^2_+(M)_x$$

$\sigma_v(P)$ est un isomorphisme, et donc P est un opérateur elliptique.
Parce que $\alpha \in \mathbb{H}^1(M, g) \Longrightarrow d\alpha = d^*\alpha = 0 \Longrightarrow P\alpha = 0$, on a

$$\mathbb{H}^1(M, g) \subset \ker(P)$$

Or $pr_+ = \frac{1}{2}(Id + *)$

$$\begin{aligned}&d^+\alpha = 0 \\ \Longrightarrow &d\alpha + *d\alpha = 0 \\ \Longrightarrow &d * d\alpha = 0 \\ \Longrightarrow &d^* d\alpha = 0\end{aligned}$$

donc

$$P(\alpha) = 0 \Longrightarrow d^* d\alpha = dd^*\alpha = 0 \Longrightarrow (dd^* + d^*d)(\alpha) = 0$$

on a

$$\ker(P) \subset \mathbb{H}^1(M, g)$$

Par le théorème de Hodge, $A^0(M) = \mathbb{H}^0(M) \oplus d^*(A^1(M))$, et

$$\mathbb{H}^0(M) = \{\text{fonctions harmoniques sur M}\} = \mathbb{R}$$

puisque M est compacte.
On a

$$\operatorname{Im}(d^+) = \{d\alpha + *d\alpha | \alpha \in A^1(M)\}$$

Si $\beta \in A^2_+(M)$ a la décomposition de Hodge $\beta = \beta_0 + d\beta_1 + d^*\beta_2$, alors

$$\begin{aligned}*\beta &= *\beta_0 + *d\beta_1 + *d^*\beta_2 \\ &= *\beta_0 + d(- * \beta_2) + d^*(- * \beta_1).\end{aligned}$$

Parce que

$$\Delta\beta_0 = 0 \Leftrightarrow d\beta_0 = d^*\beta_0 = 0 \Leftrightarrow d * \beta_0 = d^* * \beta_0 = 0 \Leftrightarrow \Delta * \beta_0 = 0,$$

C'est la décomposition de Hodge de $*\beta = \beta$, et donc

$$d\beta_1 = d(- * \beta_2) \quad d^*\beta_2 = d^*(- * \beta_1),$$

on peut prendre $\beta_2 = - * \beta_1$, donc on a

$$A^2_+(M) = \mathrm{Im}(d^+) \oplus (\mathbb{H}^2(M,g) \cap A^2_+(M)) = \mathrm{Im}(d^+) \oplus \mathbb{H}^2_+(M,g)$$

Pour tout $(\beta, \gamma) \in d(A^1(M)) \times d^*(A^1(M))$, parce que

$$d(A^1(M)) = d(\mathbb{H}^1(M) \oplus d(A^0(M)) \oplus d^*(A^2(M))) = d(d^*(A^2(M))),$$

il existe $\alpha_2 \in A^2(M)$ telle que $dd^*\alpha_2 = \beta$.
Pour la même raison, il existe $\alpha_0 \in A^0(M)$ telle que $d^*d\alpha_0 = \gamma$. Alors

$$P(d\alpha_0 + d^*\alpha_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\beta + *\beta) \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Im}(d^+) \oplus \mathrm{Im}(d) \Longrightarrow \mathrm{coker}(P) = \mathbb{H}^2_+(M,g) \oplus \mathbb{R}.$$

$\square$

Donc l'opérateur $\left(\not{D}_{A_0}, \begin{pmatrix} d^+ \\ d^* \end{pmatrix}\right)$ est un opérateur elliptique d'ordre 1. Par estimations elliptiques on a

$$\|(\alpha_n, \Psi_n)\|_{L^p_{k+1}} \leq C^k_p \left(\|(\alpha_n, \Psi_n)\|_{L^p} + \left\| \left(-\frac{1}{2}\gamma(\alpha_n)\Psi_n, \begin{pmatrix} \gamma_+^{-1}(\Psi_n \otimes \widehat{\Psi_n})_0 - F^+_{A_0} - 2\pi i \beta^+ \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\|_{L^p_k} \right)$$

et par multiplication des sections de Sobolev, on a

$$\left\| \left(-\frac{1}{2}\gamma(\alpha_n)\Psi_n, \begin{pmatrix} \gamma_+^{-1}(\Psi_n \otimes \widehat{\Psi_n})_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\|_{L^p_k} \leq C \|(\alpha_n, \Psi_n)\|_{L^p_k} \|\Psi_n\|_{L^p_k}$$

où l'application bilinéaire est

$$((\alpha, \Psi), \Phi) \mapsto \left(-\frac{1}{2}\gamma(\alpha)\Phi, \begin{pmatrix} \gamma_+^{-1}(\Psi \otimes \widehat{\Phi})_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Parce que A_0, β sont fixés, si $\|(\alpha_n, \Psi_n)\|_{L^p_k}$ sont bornées uniformément, alors $\|(\alpha_n, \Psi_n)\|_{L^p_{k+1}}$ sont bornées uniformément. Donc si $p_0 > 4$, et $\|(\alpha_n, \Psi_n)\|_{L^{p_0}_1}$ sont bornées uniformément , alors $\|(\alpha_n, \Psi_n)\|_{L^{p_0}_k}$ sont bornées uniformément pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\|(\alpha_n, \Psi_n)\|_{C^k}$ sont bornées uniformément pour tout $k \in \mathbb{N}$ par le théorème de plongement, donc (α_n, Ψ_n) admet une sous-suite convergente dans la topologie C^∞ par le procédé diagonal.

Il nous reste à montrer que $\|(\alpha_n,\Psi_n)\|_{L^p_1}$ sont bornées uniformément.

Notons que $(\alpha_n + A_0, \Psi_n) \in \mathcal{Q}^{SW^\tau_\beta}$. Si $(A,\Psi) \in \mathcal{Q}^{SW^\tau_\beta}$, on a

$$\begin{aligned}
-\Delta_{\widehat{A}}\Psi &= \frac{1}{4}\gamma_+(F^+_{\widehat{A}})(\Psi) + \frac{s_g}{4}\Psi \text{ (Lichnerowicz)}\\
&= \frac{1}{4}(\Psi\otimes\widehat{\Psi})_0(\Psi) - \frac{1}{2}\gamma_+(\pi i\beta^+)(\Psi) + \frac{s_g}{4}\Psi (Seiberg-Witten)\\
&= \frac{1}{8}|\Psi|^2\Psi - \frac{1}{2}\gamma_+(\pi i\beta^+)(\Psi) + \frac{s_g}{4}\Psi \text{ (Lemme 7.1)}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
(\Delta_{\widehat{A}}\Psi,\Psi) &= -\frac{1}{8}|\Psi|^4 - \frac{s_g}{4}|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\pi\gamma_+(i\beta^+)(\Psi),\Psi) \text{ (lemme 7.1)}\\
&= -\frac{1}{8}|\Psi|^4 - \frac{s_g}{4}|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\pi\gamma_+(i\beta^+)(\Psi\otimes\ \widehat{\Psi}_0) \text{ (lemme 7.1 encore)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Re(\Delta_{\widehat{A}}\Psi,\Psi) &= -\frac{1}{8}|\Psi|^4 - \frac{s_g}{4}|\Psi|^2 + \Re\left(\frac{1}{2}\pi\gamma_+(i\beta^+)(\Psi\otimes\ \widehat{\Psi}_0)\right)\\
&\leq -\frac{1}{8}|\Psi|^4 - \frac{s_g}{4}|\Psi|^2 + \left|\frac{1}{2}\pi\gamma_+(i\beta^+)(\Psi\otimes\ \widehat{\Psi}_0)\right|\\
&\leq -\frac{1}{8}|\Psi|^4 + \left(\sqrt{2}\pi|\beta^+| - \frac{s_g}{4}\right)|\Psi|^2
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{2}\Delta|\Psi|^2 = \Re(\Delta_{\widehat{A}}\Psi,\Psi) - |\nabla\Psi|^2 \leq -\frac{1}{8}|\Psi|^4 + \left(\sqrt{2}\pi|\beta^+| - \frac{s_g}{4}\right)|\Psi|^2.$$

M est compacte, prenons x_0 telle que $|\Psi|^2$ atteint son maximum à x_0. En utilisant le principe de maximum de Hopf, on a

$$0 \leq \frac{1}{2}\Delta|\Psi|^2(x_0) \leq -\frac{1}{8}|\Psi|^4 + \left(\sqrt{2}\pi|\beta^+| - \frac{s_g}{4}\right)|\Psi|^2(x_0).$$

et donc

$$\sup_M|\Psi|^2 \leq \max\left(0, \sup_M[8\sqrt{2}\pi|\beta^+| - 2s_g]\right)$$

donc

$$\begin{pmatrix}\gamma_+^{-1}(\Psi_n\otimes\widehat{\Psi_n})_0 - F^+_{A_0} - 2\pi i\beta^+\\ 0\end{pmatrix}$$

sont bornées uniformément par rapport à la norme C^0 et donc L^p pour tout $p \geq 1$.

Par lemme, l'opérateur $\begin{pmatrix}d^+\\ d^*\end{pmatrix}\Big|_{d(iA^0(M))\oplus d^*(iA^2(M))}$ est elliptique et injectif, par la propriété de Fredholm, $\mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix}d^+\\ d^*\end{pmatrix}\Big|_{d(iA^0(M))\oplus d^*(iA^2(M))}\right)$ est fermé. Par le théorème de Banach, on a

$$\alpha_n - \mathrm{harm}(\alpha_n) = \begin{pmatrix}d^+\\ d^*\end{pmatrix}\Big|_{d(A^0(M))\oplus d^*(A^2(M))}^{-1}\left(\begin{pmatrix}\gamma_+^{-1}(\Psi_n\otimes\widehat{\Psi_n})_0 - F^+_{A_0} - 2\pi i\beta^+\\ 0\end{pmatrix}\right)$$

$$\Longrightarrow \|\alpha_n - \mathrm{harm}(\alpha_n)\|_{L^p} \leq C \left\| \begin{pmatrix} \gamma_+^{-1}(\Psi_n \otimes \widehat{\Psi_n})_0 - F_{A_0}^+ - 2\pi i \beta^+ \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{L^p}$$

Parce que les $\mathrm{harm}(\alpha_n) \in \Pi$ sont C^0 bornées, les $\|\alpha_n\|_{L^p}$ sont bornées uniformément. En utilisant les estimations elliptiques pour $\begin{pmatrix} d^+ \\ d^* \end{pmatrix}$,

$$\|\alpha_n\|_{L_1^p} \leq C \left(\|\alpha\|_{L^p} + \left\| \begin{pmatrix} \gamma_+^{-1}(\Psi_n \otimes \widehat{\Psi_n})_0 - F_{A_0}^+ - 2\pi i \beta^+ \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{L^p} \right)$$

sont bornées uniformément, pour tout $p > 1$.

Enfin, on utilise les estimations elliptiques pour $\not{D}_{A_0}$, alors

$$\|\Psi_n\|_{L_1^p} \leq C \left(\|\Psi_n\|_{L^p} + \left\| -\frac{1}{2}\gamma(\alpha_n)\Psi_n \right\|_{L^p} \right)$$

sont bornées uniformément, et donc $\|(\alpha_n, \Psi_n)\|_{L_1^p}$ sont bornées uniformément.

References

[1] Olivier Biquard. Introduction to differential geometry, oct 2008. notes de cours.

[2] Andrei Teleman. *Introduction à la théorie de jauge*. SMF, 2012.