Corrigé de l'examen

Exercice 1

1. (a) Comme f est continue bijective du compact K_n sur son image, qui est un espace séparé, on sait alors que f est un homéomorphisme de K_n sur F_n.
   (b) Comme f est bijective de K_n sur F_n, f réalise donc aussi un homéomorphisme de $K_n - \{c\}$ sur son image $F_n - \{f(c)\}$ pour tout c dans K_n.
2. (a) Il suffit de voir que $B(0,r) - \{0\}$ est connexe par arcs. Il est immédiat de constater que deux points quelconques de cet ensemble peuvent être joints par un chemin continu, composé d'un segment de droite et d'un arc de cercle contenus dans $B(0,r) - \{0\}$.
   (b) Soit $\varphi : F - \{z\} \to \{0,1\}$ une application continue. Comme z est intérieur à F, il existe $r > 0$ tel que $B(z,r)$ soit contenu dans F. Comme $B(z,r) - \{z\}$ est connexe par la question précédente, la restriction de φ à $B(z,r) - \{z\}$ est constante. Alors, φ se prolonge par continuité à $B(z,r)$, donc à F, en une fonction continue. Comme F est connexe, elle est constante. Donc $F - \{z\}$ est connexe.
3. (a) Par continuité de f, il existe un voisinage de c, d'image contenue dans l'intérieur de F_n. On peut donc trouver $c' \in]-n,n[$ tel que $z' = f(c')$ soit intérieur à F_n.
   (b) Supposons que F_n ne soit pas d'intérieur vide. Soit z un point de l'intérieur. Il existe un unique c dans K_n tel que $f(c) = z$. Par la question précédente, il existe c' dans $]-n,n[$ tel que $z' = f(c')$ soit aussi dans l'intérieur de F_n. Alors $F_n - \{z'\}$ est connexe par la question 2. D'après la première question, $K_n - \{c'\}$ est homéomorphe à $F_n - \{z'\}$, donc connexe. C'est la contradiction cherchée.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application continue injective. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, F_n est un compact, donc un fermé de $\mathbb{R}^2$, d'intérieur vide. Par le théorème de Baire, $f(\mathbb{R}) = \bigcup_n F_n$ est d'intérieur vide. Donc f ne peut pas être surjective.

Exercice 2

1. Soit $a = (a_n)_n$ une suite de ℓ^∞ qui est dans l'adhérence de c_0. Soit $\epsilon > 0$. Il existe une suite $b = (b_n)_n$ de c_0 avec $\|a - b\|_{\ell^\infty} < \epsilon/2$. Soit N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, on ait $|b_n| \leq \epsilon/2$. Alors, pour $n \geq N_0$, on a $|a_n| \leq \epsilon$.
2. On a $|L_N(\xi)| \leq (\sum_0^N |\alpha_n|)\|\xi\|_{\ell^\infty}$, d'où la continuité. La linéarité est évidente.
3. On applique Banach-Steinhauss. On a vérifié que chaque L_N est linéaire continue. D'autre part la convergence de la série entraîne que $\sup_N |L_N(\xi)| < +\infty$ pour tout ξ. La conclusion s'en suit.
4. Dans l'inégalité précédente, on prend pour ξ_n le signe de α_n lorsque $n \leq N$ et $\xi_n = 0$ si $n > N$. Alors la conclusion de la question précédente s'écrit $\sum_0^N |\alpha_n| \leq C$. La conclusion en résulte.

Exercice 3

1. Si on décompose tout vecteur x de E sous la forme $x_1 + x_2 \in E_1 + E_2$, on doit résoudre l'équation $QL(x_1+x_2)+\epsilon QN(x_1+x_2) = 0$. Comme E_2 est le noyau de L, on peut réécrire cette équation $QLx_1 + \epsilon QN(x_1 + x_2) = 0$. Comme L est linéaire continue par hypothèse et qu'il en est de même de Q, puisque, dans un espace de Banach, la somme directe de deux sous-espaces fermés est toujours topologique, $F(x_1, x_2, \epsilon) = QLx_1 + \epsilon QN(x_1 + x_2)$ est une fonction de classe C^1 de ses arguments. Sa différentielle par rapport à x_1 au point $(x_1 = 0, x_2 = a, \epsilon = 0)$ vaut $QL|_{E_1}$. Or, par hypothèse, QL est surjective de E, donc de E_1, sur F_1, et injective de E_1 dans F_1, puisque E_1 est un supplémentaire de son noyau. Par le théorème de Banach, c'est un isomorphisme. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites, qui donne l'existence de la fonction φ cherchée, au voisinage de $(0, a)$.
2. On applique le théorème des fonctions implicites à la fonction H par rapport à x_2. On doit vérifier que $D_2H(0, a)$ est inversible. Or, $D_2H(0, a) = (\mathrm{Id} - Q)[D_1N(0, a)D_2\varphi(0, a) + D_2N(0, a)]$. Par construction, $D_2\varphi(0, a) = 0$, donc l'hypothèse entraîne que $D_2H(0, a) = (\mathrm{Id} - Q)D_2N(0, a)$ est inversible.
3. Définissons $\theta(\epsilon) = (\varphi(\epsilon, \psi(\epsilon)), \psi(\epsilon))$. D'après la question 1., on a $QG(\theta(\epsilon), \epsilon) = 0$. D'autre part, puisque $(\mathrm{Id} - Q)L = 0$, la question 2. montre que $(\mathrm{Id} - Q)G(\theta(\epsilon), \epsilon) = 0$. On a donc le résultat voulu.
4. Comme L est linéaire continue, $u \to Lu$ est différentiable et sa dérivée en tout point est L. D'autre part, la dérivée de
$$h \to f(\tau, u(\tau) + h) - f(\tau, u(\tau)) - \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, u(\tau))h$$
vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, u(\tau) + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, u(\tau))$. C'est une fonction continue de (τ, h) sur le compact $[0, 1] \times [-1, 1]$. Elle est donc uniformément continue : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta \in]0, 1[$ tel que pour tout $\tau \in [0, 1]$, tout h avec $|h| < \eta$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, u(\tau) + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, u(\tau))\right| \leq \epsilon$. Par les accroissements finis,
$$\left|f(\tau, u(\tau) + h) - f(\tau, u(\tau)) - \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, u(\tau))h\right| \leq \epsilon|h|$$
pour tout $t \in [0, 1], h \in] - \eta, \eta[$. Si on remplace dans cette inégalité h par $h(\tau)$ pour une fonction h dans la boule ouverte de centre 0, de rayon η de E, et que l'on intègre de 0 à t, on en déduit que N est différentiable, et que sa différentielle est donnée par
$$DN(u) \cdot h : t \to \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, u(\tau))h(\tau)\, d\tau.$$
Pour voir que N est C^1, on écrit pour u_0 fixé dans E et u dans la boule ouverte de centre u_0 de rayon η de E,
$$\|DN(u) - DN(u_0)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \sup_{\tau\in[0,1]}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, u(\tau)) - \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, u_0(\tau))\right|$$
et il suffit d'utiliser la continuité uniforme de $\partial f/\partial x$ sur $[0, 1]\times[-M, M]$ pour tout $M > 0$.

5. Il s'agit de trouver une fonction $\epsilon \to u(\epsilon, \cdot)$, définie sur un intervalle $]-\delta, \delta[$, à valeurs dans E, vérifiant $u(0, t) \equiv a$ et
$$u(\epsilon, t) - u(\epsilon, 0) - \epsilon \int_0^t f(s, u(\epsilon, s))\, ds \equiv 0,$$
soit encore, avec les notations précédentes, $Lu(\epsilon, \cdot) - \epsilon N(u(\epsilon, \cdot)) = 0$. Il suffit donc de vérifier que les hypothèses des questions 1. à 3. sont satisfaites. Le projecteur Q est l'application $v \to v - tv(1)$, donc $(\mathrm{Id} - Q)v$ est la fonction affine $t \to tv(1)$, que l'on identifie à l'élément $v(1)$ de $\mathbb{R}^N$. Il en résulte que $(\mathrm{Id} - Q)L = 0$. En outre, $QL : u \to u - u(0)$ est surjectif de E sur F_1. D'autre part, E_2 étant l'espace des fonctions constantes, la restriction de N à E_2 est l'application qui à $b \in \mathbb{R}^N$ associe $t \to \int_0^t f(s, b)\, ds$. Alors $(\mathrm{Id} - Q)N(b)$ est la fonction affine $t \to t \int_0^1 f(s, b)\, ds$, que l'on identifie à $\int_0^1 f(s, b)\, ds$. Par conséquent, $(\mathrm{Id} - Q)N(a) = 0$ et la différentielle de $b \to (\mathrm{Id} - Q)N(b)$ en $b = a$ s'identifie à la matrice M de l'énoncé. Comme elle est inversible par hypothèse, la question 3. montre qu'il existe une fonction $\epsilon \to \theta(\epsilon)$, à valeurs dans E, telle que $L\theta(\epsilon) - \epsilon N(\theta(\epsilon)) = 0$. C'est la conclusion cherchée.

Exercice 4

I.

1. Soit a un point qui n'est pas dans le sous-espace vectoriel fermé considéré. On sait, comme corollaire de Hahn-Banach, qu'il existe un élément ℓ de E' nul sur le sous-espace et tel que $\ell(a) \neq 0$. Alors l'ensemble $\{x \in E; |\ell(x - a)| < |\ell(a)|\}$ est un voisinage de a pour la topologie faible, contenu dans le complémentaire du sous-espace.
2. Puisque Vect $[(a_n)_n]$ est dense dans F et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, l'espace des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des a_n est une partie dénombrable dense dans F. Elle fournit la suite cherchée.
3. Soit $\epsilon > 0$. Comme la suite $(v_n)_n$ est dense, il existe n entier tel que $\|x - v_n\| < \epsilon$. Alors, $|\ell_n(v_n)| = |\ell_n(v_n - x)| \leq \|x - v_n\| < \epsilon$. Alors $\|v_n\| < \epsilon$, donc $\|x\| < 2\epsilon$. La conclusion en découle.
4. (a) Un élément de E' est continu de E_σ dans $\mathbb{R}$ d'après la définition de la topologie faible. Alors, comme A est un compact de E_σ, $\ell(A)$ est un compact de l'espace métrique $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrasse, on peut donc extraire de la suite $(\ell(a_n))_n$ une sous-suite convergente.
   (b) D'après la question précédente, on peut extraire de $(a_n)_n$ une sous-suite $(a_n^0)_n$ telle que $(\ell_0(a_n^0))_n$ converge. On extrait ensuite de $(a_n^0)_n$ une sous-suite $(a_n^1)_n$ telle que $(\ell_1(a_n^1))_n$ converge. Par récurrence, on obtient pour tout entier j une suite extraite $(a_n^j)_n$ telle que pour tout $i \leq j$, $(\ell_i(a_n^j))_n$ converge. Il reste à prendre la suite diagonale.
5. (a) On a $K = \bigcap_m \overline{\{b_k; k \geq m\}}^\sigma$, où $\overline{\{\cdots\}}^\sigma$ désigne l'adhérence dans E_σ. Comme ℓ_n est continue sur E_σ par définition de la topologie faible, on a $\ell_n(K) = \bigcap_m \ell_n(\overline{\{b_k; k \geq m\}}^\sigma) \subset \bigcap_m \overline{\ell_n(\{b_k; k \geq m\})} = \{z_n\}$ par définition de z_n. Il y a en fait égalité puisque K est non vide, comme ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite d'un compact.
   (b) Par construction la suite $(b_k)_k$ est contenue dans F qui est un sous-espace fermé. D'après la question 1. F est fermé pour la topologie faible, donc contient les valeurs d'adhérence de $(b_k)_k$ pour cette topologie.
   (c) Soient b et b' deux points de K. Alors $b - b'$ est dans F, et d'après (a), $\ell_n(b - b') = z_n - z_n = 0$. Il suffit d'appliquer la question 3. pour conclure que $b = b'$.

6. La suite $(b_k)_k$ est extraite de $(a_n)_n$, suite du compact A de E_σ, et a une seule valeur d'adhérence pour la topologie faible. Elle converge donc vers cette valeur d'adhérence pour cette topologie.

II.

1. Question de cours : toute partie faiblement bornée est bornée.
2. Puisque E est réflexif, on peut identifier E à $(E')'$. Alors, la topologie faible $\sigma(E,E')$ est aussi la topologie $\sigma((E')',E')$, donc est une topologie faible-$*$. Le théorème de Banach-Alaoglu s'applique donc, et entraîne que toute boule est relativement compacte pour la topologie $\sigma((E')',E') = \sigma(E,E')$.
3. D'après la question 2., il suffit de montrer que A est contenu dans une boule. Si c'est faux, il existe une suite $(x_n)_n$ de A telle que $\|x_n\| \to +\infty$. Par hypothèse, on peut en extraire une suite faiblement convergente. Cela contredit la première question.

NOTE : Le résultat démontré dans le dernier exercice, qui affirme que, bien que la topologie faible ne soit pas métrisable en dimension infinie, ses compacts sont caractérisés par la propriété de Bolzano-Weierstrasse, est vrai même sans l'hypothèse "E réflexif". Le résultat est toutefois plus difficile à démontrer dans ce cas là. C'est le théorème d'Eberlein-Šmulian.