FIMFA ENS — Mardi 24 Janvier 2012 — Durée : 3 heures

Examen de Topologie et Calcul Différentiel

(Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits)

(Les quatre exercices sont indépendants. Le barème de chaque question est indiqué dans la marge. Le question 5. de l'exercice 3 est plus difficile que les autres.)

Exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{R} \to X$ une fonction continue injective à valeurs dans un espace topologique séparé X. On pose pour tout entier n, $K_n = [-n, n]$ et $F_n = f(K_n)$.

$\boxed{1}$ (a) Montrer que la restriction de f à K_n est un homéomorphisme de K_n sur F_n.

$\boxed{1}$ (b) Montrer que pour tout point $c \in K_n$, la restriction de f à $K_n - \{c\}$ est un homéomorphisme de cet ensemble sur $F_n - \{f(c)\}$.

On suppose désormais que $X = \mathbb{R}^2$.

$\boxed{2}$ 2. (a) Montrer que pour tout $r > 0$, $B(0, r) - \{0\}$ est un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{3}$ (b) Soit F un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$ et z un point de $\mathring{F}$. Montrer que $F - \{z\}$ est connexe.

$\boxed{1}$ 3. (a) Supposons qu'il existe c dans K_n tels que $f(c)$ soit dans l'intérieur de F_n. Montrer qu'il existe alors c' dans $]-n, n[$ tel que $f(c')$ soit dans l'intérieur de F_n.

$\boxed{4}$ (b) Montrer que pour tout entier n, F_n est d'intérieur vide.

$\boxed{2}$ 4. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit $c_0 \subset \ell^\infty$ l'espace des suites réelles indexées par $n \in \mathbb{N}$, tendant vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

$\boxed{2}$ 1. Montrer que c_0 est un sous espace fermé de ℓ^∞ (lorsque ℓ^∞ est muni de sa norme naturelle $\|(x_n)_n\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$).

$\boxed{1}$ 2. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de c_0, on pose $L_N(\xi) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \xi_n$. Montrer que $L_N : c_0 \to \mathbb{R}$ est linéaire continue.

$\boxed{2}$ 3. On suppose que pour toute suite $\xi = (\xi_n)_n$ de c_0, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \xi_n$ converge. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que $\forall N \in \mathbb{N}, \forall \xi \in c_0, |L_N(\xi)| \leq C\|\xi\|_{\ell^\infty}$.

$\boxed{2}$ 4. Montrer que sous les hypothèses de 3), $\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| < +\infty$.

Exercice 3

Soient E, F deux espaces de Banach, $L : E \to F$ une application linéaire continue. On suppose que le sous-espace $E_2 \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Ker} L$ admet un supplémentaire fermé E_1 dans E. On suppose de plus que F s'écrit comme somme directe $F_1 \oplus F_2$ de deux sous-espaces fermés, que la projection Q de F sur F_1 parallèlement à F_2 vérifie $(\mathrm{Id} - Q)L = 0$, et que QL est surjectif.

On notera $x = (x_1, x_2)$ le point courant de $E = E_1 \oplus E_2$. Soit N une application de classe C^1, définie au voisinage d'un point $(0, a)$ de $E_1 \oplus E_2$, à valeurs dans F. On suppose que $(\mathrm{Id} - Q)N(0, a) = 0$ et que $(\mathrm{Id} - Q)D_2N(0, a) \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$ est inversible (où $D_2N(0, a)$ désigne la dérivée partielle de $x_2 \to N(0, x_2)$ en $x_2 = a$).

$\boxed{5}$ 1. Pour x dans E et ϵ dans $\mathbb{R}$, on définit $G(x,\epsilon) = Lx - \epsilon N(x)$. Montrer qu'il existe U voisinage ouvert de a dans E_2, $\epsilon_0 > 0$ et une fonction $\varphi :]-\epsilon_0, \epsilon_0[\times U \to E_1$ de classe C^1 telle que, pour tout $(\epsilon, x_2) \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[\times U$, on ait $QG((\varphi(\epsilon, x_2), x_2), \epsilon) = 0$, $\varphi(0,a) = 0$.

$\boxed{3}$ 2. On pose $H(\epsilon, x_2) = (\mathrm{Id} - Q)N(\varphi(\epsilon, x_2), x_2)$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et une fonction $\epsilon \to \psi(\epsilon)$ de classe C^1 sur $]-\delta, \delta[$, à valeurs dans U, telle que $\psi(0) = a$ et $H(\epsilon, \psi(\epsilon)) = 0$ pour tout ϵ dans $]-\delta, \delta[$.

$\boxed{2}$ 3. Montrer qu'il existe une fonction $\theta :]-\delta, \delta[\to E$, de classe C^1, telle que pour tout ϵ dans $]-\delta, \delta[$, $G(\theta(\epsilon), \epsilon) = 0$ et $\theta(0) = a$.

Soient $E = \{u \in C([0,1], \mathbb{R}^N); u(0) = u(1)\}$ et $F = \{v \in C([0,1], \mathbb{R}^N); v(0) = 0\}$, $E_1 = \{u \in E; u(0) = 0\}$, E_2 l'ensemble des fonctions constantes considéré comme sous-espace de E, $F_1 = \{v \in F; v(1) = 0\}$, $F_2 = \{t \to at; a \in \mathbb{R}^N\}$. On identifiera F_2 à $\mathbb{R}^N$ par l'application qui associe à l'élément a de $\mathbb{R}^n$ la fonction $t \to at$. On munit ces espaces de la norme $\sup_{t\in[0,1]}|u(t)|$. Soit $f : (t,y) \to f(t,y)$ une fonction de classe C^1 sur $[0,1]\times\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. On note $L : E \to F$ l'application linéaire $Lu = u - u(0)$ et pour u dans E, on définit $N(u)$ comme étant l'élément de F donné par la fonction $t \to N(u)(t) = \int_0^t f(s, u(s))\, ds$.

$\boxed{6}$ 4. Montrer que L et N sont de classe C^1 et calculer leurs différentielles en tout point.

$\boxed{8}$ 5. Soit a un point de $\mathbb{R}^N$ tel que la matrice $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le N}$ d'élément général

$$m_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t,a)\, dt$$

soit inversible et que $\int_0^1 f(s,a)\, ds = 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et une fonction continue $(\epsilon, t) \to u(\epsilon, t)$, définie sur $]-\delta, \delta[\times[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, de classe C^1 en t, telle que pour tout $\epsilon \in]-\delta, \delta[$ et pour tout $t \in [0,1]$

$$u(0,t) = a,\ \frac{d}{dt}u(\epsilon,t) = \epsilon f(t, u(\epsilon,t)),\ \ u(\epsilon,0) = u(\epsilon,1).$$

Exercice 4

Dans tout l'exercice, on note E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On désigne par E_σ l'espace E muni de la topologie faible $\sigma(E,E')$. On appelle topologie forte sur E la topologie induite par la norme.

$\boxed{3}$ **I.** 1. Montrer qu'un sous-espace vectoriel fermé de E est fermé pour la topologie faible.

$\boxed{2}$ 2. Soit $(a_n)_n$ une suite de E et F le sous-espace $F = \overline{\mathrm{Vect}[(a_n)_n]}$, l'adhérence pour la topologie forte du sous-espace vectoriel engendré par les a_n. Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_n$ de F dense dans F pour la topologie forte.

$\boxed{3}$ 3. Pour tout n, soit ℓ_n un élément de E' vérifiant $\ell_n(v_n) = \|v_n\|$ et $\|\ell_n\|_{E'} = 1$ (On sait que ℓ_n existe grâce au théorème de Hahn-Banach).
Montrer que si un vecteur x de F vérifie $\ell_n(x) = 0$ pour tout n, alors $x = 0$.

4. On se donne désormais A un compact de E_σ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A. On considère les v_n, ℓ_n, F définis dans les questions précédentes.

$\boxed{3}$ (a) Montrer que pour tout ℓ dans E', il existe une suite extraite $(a_{n_j})_j$ de $(a_n)_n$ telle que $(\ell(a_{n_j}))_j$ converge.

$\boxed{3}$ (b) Montrer qu'il existe une suite $(b_k)_k$ extraite de $(a_n)_n$ telle que pour tout n la suite $(\ell_n(b_k))_k$ converge vers une limite que l'on notera z_n.

5. Soit K l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(b_k)_k$ pour la topologie faible.

$\boxed{3}$ (a) Montrer que pour tout n, $\ell_n(K)$ est égal à $\{z_n\}$.

$\boxed{2}$ (b) Montrer que K est inclus dans F.

$\boxed{2}$ (c) Montrer que K est réduit à un point.

$\boxed{2}$ 6. Montrer que si A est un compact de E_σ, toute suite de A admet une suite extraite faiblement convergente (bien que la topologie faible sur un espace vectoriel normé de dimension infinie ne soit pas métrisable).

II. Pour tout x dans E, on note $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$ la forme linéaire donnée par $\varphi_x(\ell) = \ell(x)$ pour tout $\ell \in E'$. On dit que E est réflexif si l'application $\Phi : E \to (E')'$, donnée par $\Phi(x) = \varphi_x$, est un isomorphisme. On suppose désormais E réflexif.

$\boxed{2}$ 1. Montrer que toute suite de E convergente pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ est bornée.

$\boxed{4}$ 2. Montrer que toute partie de E contenue dans une boule de centre 0 est relativement compacte pour la topologie faible sur E.

$\boxed{3}$ 3. Soit A un sous-ensemble de E tel que toute suite de A admette une sous-suite faiblement convergente. Montrer que A est relativement compact dans E_σ.