Partiel de Topologie et Calcul Différentiel

(Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits)

L'exercice et le problèmes sont indépendants.
Le barème de chaque question est indiqué dans la marge.

Exercice

Soit (X, d) un espace métrique complet, U un ouvert de X, différent de X. Pour $x \in U$, on pose $f(x) = \frac{1}{d(x, X-U)}$ et pour x, y dans U, $d'(x,y) = d(x,y) + |f(x) - f(y)|$.

$\boxed{2}$ 1. (a) Montrer que d' est une distance sur U, topologiquement équivalente à la distance induite par d sur U.

$\boxed{1}$ (b) Montrer qu'une suite $(x_n)_n$ de U qui converge dans (X, d) vers une limite a appartenant à U converge vers a dans (U, d').

$\boxed{1}$ (c) Monter que si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de (U, d'), il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, X - U) \geq c$.

$\boxed{1{,}5}$ (d) Montrer que (U, d') est complet.

2. Soit $(U_n)_{n \in n\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de X, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n soit non vide et différent de X. On pose $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

$\boxed{2}$ (a) Soit $G' = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}; \forall p, q \in \mathbb{N}, x_p = x_q\}$. Montrer que G' est un fermé de $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ (muni de la topologie produit).

$\boxed{2}$ (b) Montrer que l'application $\Phi : x \to (x, x, x, \ldots, x, \ldots)$ est un homéomorphisme de G sur G'.

$\boxed{2{,}5}$ 3. Montrer qu'il existe sur G un distance topologiquement équivalente à la distance induite par d sur G, et pour laquelle G soit complet.

Problème

Les parties I. B, II. A. et II. B. sont indépendantes les unes des autres, et ne dépendent de la partie I. A. que par la définition de la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{G}$. La partie I. B. est plus difficile que les autres.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On se donne $\mathcal{G}$ un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X. On dira qu'un sous-ensemble U de X est un $\mathcal{G}$-voisinage d'un point a de X si $a \in U$ et s'il existe V voisinage de a pour la topologie $\mathcal{T}$ tel que

$$(*) \qquad \forall G \in \mathcal{G}, (a \in G \text{ et } G \subset V \Rightarrow G \subset U).$$

$\boxed{2}$ **I. A.** 1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_\mathcal{G}$ des sous-ensembles W de X tels que pour tout a dans W, il existe U $\mathcal{G}$-voisinage de a avec $U \subset W$ est une topologie sur X, plus fine que la topologie $\mathcal{T}$.

$\boxed{1{,}5}$ 2. (a) Déterminer la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{G}$ lorsque $\mathcal{G} = \mathcal{P}(X)$.

$\boxed{1}$ (b) Déterminer la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{G}$ lorsque $\mathcal{G} = \emptyset$.

Désormais, on appellera $\mathcal{G}$-ouvert (resp. $\mathcal{G}$-fermé, resp. $\mathcal{G}$-voisinage,...) tout ouvert (resp. fermé, resp. voisinage,...) pour la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{G}$. On réservera les termes ouvert (fermé, voisinage,...) aux ouverts, fermés, voisinages,...pour la topologie donnée $\mathcal{T}$.

$\boxed{3}$ 3. Soit $(Y, \mathcal{T}')$ un autre espace topologique, $\mathcal{H}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(Y)$, $\mathcal{T}'_{\mathcal{H}}$ la $\mathcal{H}$-topologie associée sur Y. Soit $u : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ une application continue. On suppose

$$\forall G \in \mathcal{G}, \forall y_1, y_2 \in u(G), \exists H \in \mathcal{H} \text{ tel que } H \subset u(G) \text{ et } y_1, y_2 \in H.$$

Montrer que u est continue de $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{G}})$ dans $(Y, \mathcal{T}_{\mathcal{H}})$.

B. 1. On suppose dans cette question que tout G dans $\mathcal{G}$ est connexe pour la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$.

$\boxed{4}$ (a) Montrer que si U est un $\mathcal{G}$-ouvert et si W est une $\mathcal{G}$-composante connexe de U, alors W est $\mathcal{G}$-ouverte.

$\boxed{3}$ (b) Montrer que X est localement $\mathcal{G}$-connexe.

$\boxed{5}$ 2. On suppose dans cette question que tout élément G de $\mathcal{G}$ est connexe pour la topologie $\mathcal{T}$. Montrer que si V est un ouvert pour la topologie $\mathcal{T}$ et si W est une composante connexe de V pour $\mathcal{T}$, alors W est $\mathcal{G}$-ouverte.

II. A. On prend $X = \mathbb{C}$ muni de sa topologie usuelle. On note D l'axe réel et on pose

$$\mathcal{G} = \{[a, b]; a, b \in \mathbb{C}, [a, b] \not\subset D\}.$$

$\boxed{4}$ 1. Montrer que si a est dans $\mathbb{C} - D$ (resp. dans D), il existe $r_0 > 0$ tel que la famille des $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$, (resp. des $W(a, r) = (B(a, r) - D) \cup \{a\}$), $(0 < r < r_0)$ est base de voisinages de a pour la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$.

$\boxed{2}$ 2. Montrer que si x est un point de D et si V est un $\mathcal{G}$-voisinage de x, l'adhérence de V pour la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$, que l'on notera $\overline{V}^{\mathcal{G}}$, rencontre $D - \{x\}$.

$\boxed{2}$ 3. (a) Montrer de $D - \{0\}$ est $\mathcal{G}$-fermé.

$\boxed{3}$ (b) La topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ est-elle métrisable ? (On utilisera les questions précédentes).

B. Soit (X, d) un espace métrique et $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$. On suppose que la distance d vérifie $d \leq 1$. Si D est un sous-ensemble de X, on appelle $\mathcal{G}$-chaîne de D joignant deux points a et b de D toute suite finie $\mathcal{C} = (G_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\mathcal{G}$ vérifiant :

$$a \in G_0, b \in G_n, G_i \cap G_{i+1} \neq \emptyset,\ i = 0, \ldots, n-1.$$

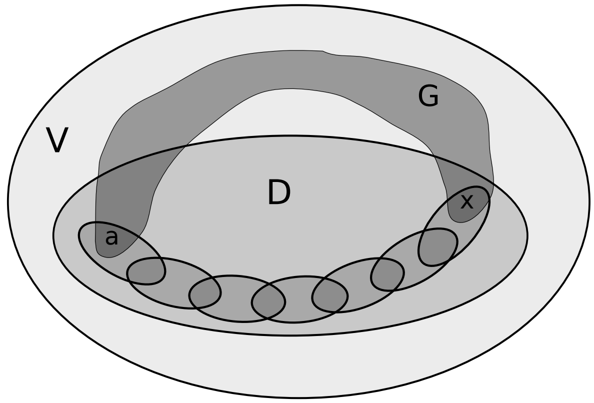
On note $\operatorname{diam} \mathcal{C} = \sum_{i=0}^{n} \operatorname{diam} G_i$ et $\mathcal{C}^* = \bigcup_{i=0}^{n} G_i$. Pour $a, b \in X$, on pose $\rho(a, b) = 0$ si $a = b$ et, si $a \neq b$

$$\rho(a, b) = \min[1, \inf_{\mathcal{C}} (\operatorname{diam} \mathcal{C})],$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les $\mathcal{G}$-chaînes de X joignant a à b. (Lorsqu'il n'existe pas de telle $\mathcal{G}$-chaîne, on pose $\rho(a, b) = 1$).

$\boxed{3,5}$ 1. Montrer que ρ est une distance qui induit sur X une topologie plus fine que celle associée à la distance d.

2. On suppose désormais vérifiée la condition suivante :
Pour tout ouvert V de X, pour tout $a \in V$, il existe D voisinage ouvert de a, $D \subset V$, et pour toute $\mathcal{G}$-chaîne $\mathcal{C}$ de D, telle que $a \in \mathcal{C}^*$, pour tout $x \in \mathcal{C}^*$, il existe $G \in \mathcal{G}$ avec $G \subset V$ et $a, x \in G$ (cf. dessin).



Soit a un point de X et U un $\mathcal{G}$-voisinage de a.

$\boxed{2{,}5}$ (a) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute $\mathcal{G}$-chaîne $\mathcal{C}$ de $B_d(a, 2\delta)$ avec $a \in \mathcal{C}^*$, pour tout $x \in \mathcal{C}^*$, il existe G_x dans $\mathcal{G}$ vérifiant $a \in G_x, x \in G_x$ et $G_x \subset U$.

$\boxed{1{,}5}$ (b) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\{x \in X; \rho(a, x) < \delta\} \subset U$.

$\boxed{2{,}5}$ 3. Montrer que la $\mathcal{G}$-topologie et la topologie associée à la distance ρ coïncident.