Corrigé de l'examen partiel

Exercice

1. (a) Il est immédiat de vérifier que d' est une distance. Comme $d \leq d'$, toute boule de centre a pour la distance d contient une boule de même centre pour la distance d'. Réciproquement, soit $r' > 0$. Comme f est continue, il existe $r'' > 0$ tel que si $x \in B_d(a, r'')$, alors $|f(x) - f(a)| \leq r'/2$. Posons $r = \min(r'', r'/2)$. Alors $B_d(a, r) \subset B_{d'}(a, r')$. Cela achève la démonstration.

   (b) La fonction f est continue sur U. Par conséquent, si $(x_n)_n$ converge vers un point a de U, $d'(x_n, a)$ tend vers 0.

   (c) Une suite de Cauchy est bornée, i.e. il existe une constante C telle que $d'(x_n, x_0) \leq C$. Alors $f(x_n) = d(x_n, X - U)^{-1}$ est aussi borné, d'où la conclusion.

   (d) Soit $(x_n)_n$ suite de Cauchy de U pour la distance d'. Comme $d \leq d'$, c'est aussi une suite de Cauchy de (X, d) qui est complet. La suite converge donc vers une limite a dans X. Compte-tenu de la question (b), il reste à voir que la limite a est dans U. D'après la question précédente, $(x_n)_n$ reste dans le fermé $F = \{x \in X, d(x, X - U) \geq c\} \subset U$. Il en est donc de même pour la limite a.

2. (a) Montrons que G' un fermé pour la topologie produit : en effet, $G' = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n; \forall p, q,\ d(x_p, x_q) = 0\}$. Comme l'application $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to d(x_p, x_q)$ est continue sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (étant donné qu'elle est la composée de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (x_p, x_q)$ qui est continue puisque les projections canoniques le sont, et de d), on voit que G' est une intersection de fermés.

   (b) Le fait que Φ soit continue résulte du fait que sa composée avec toute projection canonique est continue. Notons ι l'injection canonique de G dans U_0. L'application Φ^{-1} : $G' \to G$ est telle que $\iota \circ \Phi^{-1} = \pi_0$ (où π_0 est la projection sur le facteur d'ordre 0). Cette composée étant continue, il résulte de la définition de la topologie induite sur G, que Φ^{-1} est continue.

3. D'après la question 1., il existe une distance d'_n sur U_n, topologiquement équivalente à la distance induite par d, et telle que (U_n, d'_n) soit complet. Posons $\delta'_n = d'_n/(1 + d'_n)$. On sait que cette distance est uniformément équivalente à d'_n, et que $\tilde{d}((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\delta'_n(x_n, y_n)$ est une distance sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$, qui induit la topologie produit, et pour laquelle ce produit est complet. Par conséquent, le fermé G' de $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est complet pour la distance induite par $\tilde{d}$. En transportant cette distance sur G par l'homéomorphisme Φ, on obtient la conclusion voulue.

Problème

I.A.

1. Il est trivial que $\emptyset$, X sont des éléments de $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$, et que $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ est stable par réunion. Pour vérifier que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ est dans $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$, il suffit de vérifier que l'intersection de deux $\mathcal{G}$-voisinages est un $\mathcal{G}$-voisinage. Si U_j, $j = 1, 2$ sont des $\mathcal{G}$-voisinages de a, il existe V_j, $j = 1, 2$, voisinages de a pour la topologie $\mathcal{T}$ tels que tout $G \in \mathcal{G}$ contenant a et inclus

dans V_j soit en fait inclus dans U_j. Alors tout $G \in \mathcal{G}$ tel que $a \in G \subset V_1 \cap V_2$ est inclus dans $U_1 \cap U_2$. Cet ensemble est $\mathcal{G}$-voisinage de a.

Pour vérifier que $\mathcal{T}_\mathcal{G}$ est plus fine que $\mathcal{T}$, il suffit de vérifier que tout voisinage V de a pour $\mathcal{T}$ est voisinage de a pour $\mathcal{T}_\mathcal{G}$: cela résulte de $(*)$ dans laquelle on prend $U = V$.

2. (a) Montrons que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\mathcal{G}$. On sait déjà que la seconde topologie est plus fine que la première. Réciproquement, soit U un $\mathcal{G}$-voisinage de a, et V le voisinage de a donné par la condition $(*)$. Appliquant cette condition à $G = \{a, b\}$, où b est un point quelconque de V, on obtient $b \in U$, donc $V \subset U$. Il en résulte que U est voisinage de a pour la topologie $\mathcal{T}$.

   (b) Montrons que $\mathcal{T}_\mathcal{G}$ est la topologie discrète. Il suffit pour cela de remarquer que la condition $(*)$ est vraie avec $U = \{a\}$.

3. Soient $a \in X$, $b = u(a)$ et U' un $\mathcal{H}$-voisinage de b. Il existe donc V' voisinage de b tel que

$$\forall H \in \mathcal{H}, (b \in H \text{ et } H \subset V' \Rightarrow H \subset U').$$

   Posons $V = u^{-1}(V')$. Comme u est continue, V est voisinage de a. Soit $U = u^{-1}(U')$. Montrons que c'est un $\mathcal{G}$-voisinage de a. Soit $G \in \mathcal{G}$ tel que $a \in G \subset V$. Alors, $u(G) \subset u(V) \subset V'$ et $b \in u(G)$. Soit $y \in u(G)$. Il existe $H \in \mathcal{H}$ avec $H \subset u(G)$ et $b, y \in H$. On a donc $H \in \mathcal{H}$ et $H \subset V'$, d'où $H \subset U'$ et donc $y \in U'$. On a donc prouvé $u(G) \subset U'$, donc $G \subset U = u^{-1}(U')$.

I.B.

1. (a) Il faut voir que W est $\mathcal{G}$-voisinage de chacun de ses points. Soit $a \in W \subset U$. Comme U est $\mathcal{G}$-ouvert, il existe V voisinage de a tel que tout $G \in \mathcal{G}$ vérifiant $a \in G \subset V$ vérifie $G \subset U$. Or par hypothèse, G et W sont $\mathcal{G}$-connexes et $G \cap W \neq \emptyset$ puisque cette intersection contient a. Alors $W \cup G$ est $\mathcal{G}$-connexe, et par maximalité de W, on en déduit $G \subset W$. Donc la condition $(*)$ est vérifiée par W, i.e. W est $\mathcal{G}$-voisinage de a.

   (b) Soit $a \in X$. Soit U un $\mathcal{G}$-voisinage de a, que l'on peut supposer ouvert quitte à le réduire. Soit W la $\mathcal{G}$-composante connexe de U contenant a. Par (a), W est $\mathcal{G}$-voisinage de a et est $\mathcal{G}$-connexe par construction. Tout $\mathcal{G}$-voisinage de a contient donc un $\mathcal{G}$-voisinage connexe.

2. Montrons que W est $\mathcal{G}$-voisinage de chacun de ses points. Soit a un point de $W \subset V$. Alors V est un voisinage de a.

   Supposons d'abord qu'il existe au moins un $G \in \mathcal{G}$ contenant a et inclus dans V. Définissons $U = \bigcup_{\{G \in \mathcal{G}, a \in G \subset V\}} G$. Par construction, si $G \in \mathcal{G}$ contient a et est contenu dans V, on a $G \subset U$. Cela signifie que U est un $\mathcal{G}$-voisinage de a. De plus, comme chaque élément de $\mathcal{G}$ est connexe, U est connexe (comme union de connexes contenant un même point). Or W est la composante connexe de a dans V, donc par maximalité, $U \subset W$. Donc W contient un $\mathcal{G}$-voisinage de chacun de ses points.

   S'il n'existe aucun $G \in \mathcal{G}$ inclus dans V et contenant a, on prend $U = \{a\}$, et $(*)$ montre que U est $\mathcal{G}$-voisinage de a inclus dans W.

II. A.

1. Montrons d'abord que si $a \in \mathbb{C} - D$, et si $r_0 > 0$ est assez petit pour que $B(a, r_0)$ ne rencontre pas D, alors $(B(a,r))_{0<r<r_0}$ est une base de $\mathcal{G}$-voisinages de a. Comme la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{G}$ est plus fine que la topologie usuelle, on sait déjà que chaque $B(a, r)$ est un $\mathcal{G}$-voisinage de a. Réciproquement, soit U un $\mathcal{G}$-voisinage de a. Par $(*)$, il existe $r \in]0, r_0[$ tel que si $a \in G \subset B(a, r)$ et $G \in \mathcal{G}$ alors, $G \subset U$. Par définition de $\mathcal{G}$, on peut prendre G

de la forme $[a,b]$ pour tout élément b de $B(a,r)$. Cela montre que $B(a,r) \subset U$, donc que tout $\mathcal{G}$-voisinage de a contient une boule ouverte de centre a.

Supposons maintenant que a est dans D. Il est clair que $W(a,r)$ est $\mathcal{G}$-voisinage de a : il suffit en effet de constater que $(*)$ s'applique si l'on prend $V = B(a,r)$. Réciproquement, soit U un $\mathcal{G}$-voisinage de a. Il existe alors $r > 0$ tel que si $a \in G \subset B(a,r)$ et $G \in \mathcal{G}$, alors $G \subset U$. En prenant $G = [a,b]$ pour tout $b \in W(a,r)$, on constate que $[a,b]$ est bien dans $\mathcal{G}$, puisque cet intervalle n'est jamais contenu dans D. Il en résulte que $b \in U$ donc que $W(a,r) \subset U$.

2. On peut prendre V de la forme $W(x,r)$, et il faut voir que l'adhérence de cet ensemble pour le $\mathcal{G}$-topologie rencontre D. Or, si on prend x' dans D avec $|x - x'| < r$, on constate immédiatement que pour tout $r' > 0$, $W(x',r') \cap W(x,r) \neq \emptyset$. Cela signifie que x' est dans $\overline{W(x,r)}^{\mathcal{G}}$.

3. (a) On doit voir que $(\mathbb{C} - D) \cup \{0\}$ est $\mathcal{G}$-voisinage de chacun de ses points a. Si $a \neq 0$, cela résulte du fait que $B(a,r)$ ne rencontre pas D pour $r > 0$ assez petit. Si $a = 0$, il suffit d'utiliser que $W(0,r) \cap (D - \{0\}) = \emptyset$ pour tout $r > 0$.

   (b) Dans un espace métrique, tout point admet une base de voisinages fermés (les boules fermées centrées en ce point). Comme $D - \{0\}$ est $\mathcal{G}$-fermé, il existerait, si la $\mathcal{G}$-topologie était métrisable, un $\mathcal{G}$-voisinage $\mathcal{G}$-fermé de 0 ne rencontrant pas $D - \{0\}$. Mais d'après 2., un $\mathcal{G}$-voisinage $\mathcal{G}$-fermé rencontre toujours $D - \{0\}$. On obtient donc une contradiction, qui montre que la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ n'est pas métrisable.

II. B.

1. Remarquons d'abord que si a, b sont dans $\mathcal{C}^*$ pour une chaîne $\mathcal{C}$, alors $d(a,b) \leq \operatorname{diam} \mathcal{C}$. Il en résulte que $d(a,b) \leq \rho(a,b)$, donc que $\rho(a,b) = 0$ entraîne $a = b$. La symétrie étant évidente, il reste à montrer que $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b)$. Si $\rho(a,c)$ ou $\rho(c,b)$ est égal à 1, l'inégalité est triviale. Supposons donc $\rho(a,c)$ et $\rho(c,b)$ strictement plus petits que 1. Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors $\mathcal{C}_1$ $\mathcal{G}$-chaîne de a à c et $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{G}$-chaîne de c à b telles que $\operatorname{diam} \mathcal{C}_1 < \rho(a,c) + \epsilon$ et $\operatorname{diam} \mathcal{C}_2 < \rho(c,b) + \epsilon$. La concaténation $\mathcal{C}$ des chaînes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est une $\mathcal{G}$-chaîne de a à b, de diamètre plus petit que $\rho(a,c) + \rho(c,b) + 2\epsilon$. Il en résulte que $\rho(a,b)$ est plus petit que cette quantité. La conclusion en découle. Comme on a vu que $d \leq \rho$, la topologie associée à ρ est plus fine que celle associée à d.

2. (a) Appliquons la condition $(*)$. Il existe V voisinage de a tel que si $G \in \mathcal{G}$ et $a \in G \subset V$ alors $G \subset U$. Appliquons l'hypothèse à ce V. Il existe un voisinage D de a, que l'on peut supposer de la forme $D = B(a, 2\delta)$, tel que pour toute $\mathcal{G}$-chaîne comme dans l'énoncé, il existe $G_x \in \mathcal{G}$, contenant a et x et contenu dans V, donc contenu dans U par le choix de V.

   (b) On prend le δ déterminé en (a). On peut le supposer strictement plus petit que 1/2. Alors, si $\rho(a,x) < \delta$, il existe une $\mathcal{G}$-chaîne $\mathcal{C}$ joignant a à x de diamètre inférieur à 2δ. Cette chaîne est contenue dans $B_d(a, 2\delta)$. On peut donc, d'après la question précédente, trouver un G_x contenu dans U et contenant x. En particulier, x est dans U, donc $\{x, \rho(a,x) < \delta\} \subset U$.

3. On vient de montrer que tout $\mathcal{G}$-voisinage de a est un voisinage de a pour la topologie associée à la distance ρ. Réciproquement, il suffit de voir que pour tout $r > 0$, la boule $\{x, \rho(a,x) < r\}$ est un $\mathcal{G}$-voisinage de a. Or si on pose $V = B_d(a,r)$, tout G de $\mathcal{G}$ contenant a et contenu dans V est une $\mathcal{G}$-chaîne de a à chacun de ses points x, de diamètre strictement inférieur à r. Il en résulte que $\rho(a,x) < r$ donc que $G \subset \{x, \rho(a,x) < r\}$. La condition $(*)$ est bien satisfaite par $U = \{x, \rho(a,x) < r\}$.