

Équation de Hamilton-Jacobi

Gabriel Faraud et Yanos Zylberberg

22 juin 2004

Table des matières

1	Présentation	1
1.1	Définitions préliminaires	1
1.2	Une application au traitement d'image	1
1.3	Un problème d'évolution	2
1.4	Problèmes de contrôle optimal	3
2	Méthode des caractéristiques et explosion des solutions en temps finis	5
2.1	Présentation et introduction	5
2.2	Une application utile $H = G(\nabla u)$	7
2.3	Durée d'explosion	7
3	Solutions de viscosité	8
3.1	Définition des solutions de viscosité	8
3.2	Les solutions de viscosité évanescence	10
3.3	Unicité des solutions de viscosité	11
3.4	L'estimation de Lipschitz	14
3.5	La forme d'une solution de viscosité	14
3.5.1	La formule de Hopf-Lax	14
3.5.2	Une forme de solution de viscosité	15
	Références	18

Introduction :

Nous allons présenter une classe particulière d'équations aux dérivées partielles qui interviennent régulièrement en physique ou encore en économie. Ces équations n'admettent malheureusement pas toujours de solutions fortes, elles retranscrivent, en effet, des situations physiques qui n'engendrent pas toujours des solutions C^1 . Cependant, nous mettrons en évidence l'existence de solutions faibles, plus aptes à répondre aux problèmes "posés par la nature".

L'explosion des solutions régulières en temps fini nous force à considérer ces solutions faibles, choix justifié par les théorèmes d'existence et surtout d'unicité. Enfin, dans une dernière partie, nous donnerons la forme de ces solutions sous certaines hypothèses.

1 Présentation

1.1 Définitions préliminaires

Définition 1.1 Les équations de Hamilton-Jacobi sont les deux équations définies par

$$1. \begin{cases} H(x, u, Du) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où u est l'inconnue, Du est son gradient, $x \in \mathbb{R}^n$ et H est une fonction $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$2. \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(t, x, u, Du) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Remarque : On peut passer de l'une à l'autre en considérant, dans un sens, t comme une des composantes de x . Ces équations apparaissent naturellement dans de nombreuses situations. Sans vouloir les énumérer, nous donnons ici deux exemples.

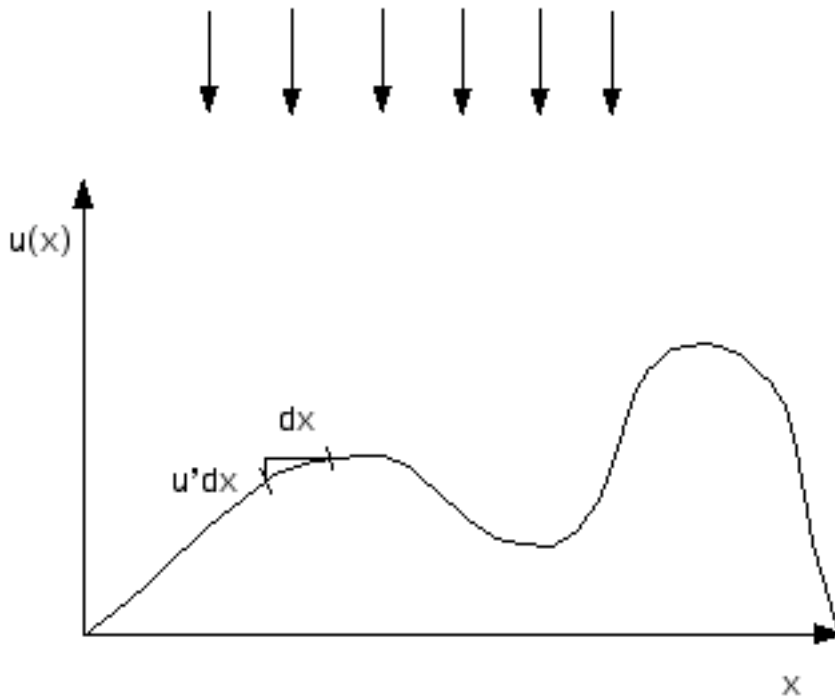
Nous pouvons de plus donner une signification, un sens physique à ces équations.

Ainsi la première de celles-ci évoque un problème de conditions aux limites, φ représente la contrainte imposée au bord de notre ouvert.

La seconde, elle, se rapporte davantage à un problème d'évolution avec la donnée de conditions initiales.

1.2 Une application au traitement d'image

Il s'agit sans doute là de l'application des équations de Hamilton-Jacobi la plus utilisée. C'est lors de l'étude d'une surface qu'apparaît cette sorte de problème : On éclaire la surface en question et mesure la quantité de lumière reçue puis réémise par unité de surface afin d'en déterminer sa forme .



Cette quantité est donnée par la formule :

$$I(x)ds = I_0 dx$$

où ds représente l'abscisse curviligne.

En effet, on considère l'intensité reçue et mesurée après la traversée de l'obstacle définie par $y = u(x)$ sur la longueur ds et donc :

$$I(x)/dx = \frac{I_0}{\sqrt{dx^2 + du^2}}$$

Aussi obtient-on

$$1 + (u')^2 = g(x) = \frac{I_0}{I(x)}$$

On voit donc apparaître une équation de Hamilton-Jacobi. Trouver la solution u à ce problème revient à trouver la "forme" de la surface à utiliser pour obtenir le long de l'axe des abscisses l'intensité $I(x)$.

1.3 Un problème d'évolution

Cette partie a pour but de faire apparaître très naturellement les équations de Hamilton-Jacobi à partir de situations physiques extrêmement fréquentes en écrivant le principe fondamental de la dynamique avec des forces conservatives.

Nous nous proposons de déterminer si l'équation

$$\begin{cases} \dot{X} = V & \text{avec} & X(t=0) = x \\ \dot{V} = \nabla U(X) & & V(t=0) = \nabla \varphi^0(x) \end{cases} \quad (1)$$

(V représente la vitesse, φ^0 un potentiel) admet une solution sous la forme $V = \nabla \varphi(t, X(t, x))$, le gradient étant pris par rapport à la variable d'espace que nous noterons y pour plus de clarté, on a ainsi $\varphi = \varphi(t, y)$.

Proposition 1.1 *Supposons qu'il existe une solution C^2 de l'équation de Hamilton-Jacobi*

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) + |\nabla_y \varphi(t, y)|^2 = U(y, t) \\ \varphi(0) = \varphi^0 \end{cases} \quad (2)$$

alors la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{X} = \nabla_y \varphi(t, X(t, x)) \\ X(0) = x \\ V = \nabla \varphi(t, X(t, x)) \end{cases}$$

est solution de l'équation (1)

Réciproquement s'il existe une solution de (1) sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = \nabla_y \varphi(t, X(t, x)) \\ V = \nabla \varphi(t, X(t, x)) \end{cases}$$

alors φ est solution de (2).

Démonstration : On cherche φ vérifiant

$$\frac{d}{dt} (\nabla_y \varphi(t, X(t, x))) = \dot{V} = \nabla U(X, t)$$

D'après le théorème de Schwartz, on peut inverser les dérivations, pour obtenir

$$\nabla_y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X(t, x)) + D_y \varphi(t, X(t, x))(\dot{X}(t, x)) \right) = \dot{V}$$

Nous en déduisons

$$\nabla_y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X(t, x)) + |\nabla_y \varphi(t, X(t, x))|^2 \right) = \nabla_y U(X(t, x), t)$$

D'après l'unicité du gradient représentant la différentielle de $U(x, t)$, et en considérant que $U(x, t)$, donnée du problème n'est définie qu'à une constante près :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X(t, x)) + |\nabla \varphi(t, X(t, x))|^2 = U(X, t)$$

Ainsi si φ vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi dite *Eikonale*, on aura bien le résultat voulu.

Remarque : Ce type d'équations intervient dans de nombreux problèmes d'évolutions .

Considérons par exemple un champ de particules ou un fluide de vitesse $V(t, x)$, la connaissance du champ de potentiel U et des vitesses initiales du fluide, nous permet après résolution des précédentes équations de déterminer le champ de vitesses à tout instant.

D'autre part, on verra au paragraphe 2 que ce problème n'admet de solutions qu'en temps petit. Les solutions faibles dites de "viscosité" ne permettront pas non plus de fournir une solution après la singularité.

1.4 Problèmes de contrôle optimal

On considère par exemple le problème de la distance au bord d'un ouvert borné (dans ce cas, sa frontière est un fermé borné autrement dit un compact), définie par

$$d(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} (|x - y|).$$

On veut montrer que, dans un sens à préciser,

$$\begin{cases} |\nabla d| = 1 \\ d|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

On va d'abord se placer dans un cadre plus général : Soit la fonction

$$\varphi(x) = \inf_{y \in K} \psi(x, y)$$

avec K compact de \mathbb{R}^n et $\psi \in C^1$ L -lipschitzienne, il existe y_0 tel que $\varphi(x_0) = \psi(x_0, y_0)$.

Théorème 1.1 *On suppose K compact de \mathbb{R}^n , $\psi \in C^1$, L -lipschitzienne alors*

1. φ est L -Lipschitzienne,

2. Si φ est différentiable en (x_0, y_0) alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0, y_0),$$

3. φ est une "sous-solution de viscosité" (dans un sens que nous préciserons plus tard) de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y_0).$$

Démonstration :

1. On a tout d'abord

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \leq \psi(x, y_0) - \psi(x_0, y_0) \leq L\|x - x_0\|.$$

En échangeant les rôles de x et x_0 on a le premier résultat.

2. De même

$$\varphi(x) = \inf \psi(x, y) \leq \psi(x, y_0)$$

d'où

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \leq \psi(x, y_0) - \psi(x_0, y_0)$$

On pose

$$x = x_0 + h\omega$$

avec $h \in (R)$ et $\omega \in S^{n-1}$.

En faisant tendre h vers 0 on obtient

$$D\varphi(x_0, y_0) \cdot \omega \leq D_x \psi(x_0, y_0) \cdot \omega$$

d'où, ceci étant vrai pour tout ω , le résultat.

3. Nous allons maintenant introduire sur cet exemple la notion de solution de viscosité, qui aura un rôle primordial dans la suite. L'idée est d'utiliser des fonctions test. On suppose qu'il existe une solution $\varphi \in C^1$ de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y_0)$$

Alors si l'on considère une fonction v et un point x_0 tels que

$$\text{Inf}(\varphi - v) = (\varphi - v)(x_0)$$

(on peut choisir cet inf comme nul sans perte de généralité), alors en dérivant cette équation on obtient,

$$Dv(x_0) = D\varphi(x_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0) = D_x \psi(x_0, y_0)$$

Revenons maintenant à notre fonction φ et considérons $v \in C^1$ telle que

$$\text{Inf}(\varphi - v) = (\varphi - v)(x_0) = 0$$

Alors on a

$$\forall x, y, v(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x, y)$$

où l'égalité est atteinte pour (x_0, y_0) , d'où

$$\forall x, y, v(x) - v(x_0) \leq \psi(x, y) - \psi(x_0, y_0). \quad (3)$$

On peut appliquer cette inégalité à y_0 pour obtenir

$$\forall x, v(x) - v(x_0) \leq \psi(x, y_0) - \psi(x_0, y_0). \quad (4)$$

On considère maintenant un vecteur $w \in \mathbb{R}^n$, et on pose $x = x_0 + hw$ avec $h > 0$, en faisant tendre h vers 0 on obtient pour tout w la relation :

$$Dv(x_0).w \leq D_x\psi(x_0, y_0).w$$

On a donc l'égalité

$$Dv(x_0) = D_x\psi(x_0, y_0)$$

pour tout point y_0 où $\psi(x_0, y)$ atteint son inf. On voit donc que, confrontée à une fonction de test, φ se comporte comme une solution régulière de l'équation différentielle, alors qu'elle n'est pas nécessairement dérivable.

Remarque : Si l'on revient maintenant à notre problème initial, on ne peut pas appliquer directement le résultat étant donné que ψ n'est pas C^1 . Néanmoins, on peut utiliser (4), pour obtenir

$$v(x) - v(x_0) \leq |x - x_0| \quad (5)$$

ce qui entraîne nécessairement que

$$|\nabla v(x_0)| \leq 1. \quad (6)$$

On a ainsi montré que, en un point x_0 où $\varphi - v$ atteint son inf, v vérifie (6).

Remarque : Notons aussi que si on veut donner des conditions limites plus générales, autrement dit imposer

$$\varphi|_{\partial\Omega} = f,$$

ceci revient seulement à poser $\psi(x, y) = |y - x| + f(y)$ et comme le montre le lemme précédent :

$$\begin{cases} |D\varphi| = 1 \text{ si } x \in \Omega \\ \varphi|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

La fonction f a un rôle primordial, elle donne des conditions aux limites : Ainsi le problème n'est plus seulement la minimisation de la distance à une frontière mais aussi de trouver le plus court chemin quand chaque point de Ω a un certain poids.

2 Méthode des caractéristiques et explosion des solutions en temps finis

2.1 Présentation et introduction

On considère l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(x, t, u, Du) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (7)$$

On suppose u solution de (8). Le but de la méthode des caractéristiques est de trouver des trajectoires $x(t)$ de y à un point du bord sur lesquelles on pourra calculer u . L'intérêt de cette méthode est de transformer l'équation aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires, qui sont, en général, moins difficiles à résoudre.

Pour cela, on pose

$$\begin{aligned} z(t) &= u(t, x(t)) \\ p(t) &= Du(t, x(t)) \end{aligned}$$

(on notera $\frac{d}{dt} = \dot{}$) On a alors

$$\dot{p}_i = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}$$

D'autre part en dérivant (8) par rapport à x_i , on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial u} + \sum_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0$$

Ceci nous incite à choisir x de sorte que les équations suivantes soient vérifiées :

$$\dot{x}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x(t), z(t), p(t))$$

On peut alors simplifier nos équations et obtenir

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(t, x(t), z(t), p(t)) - \frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), z(t), p(t)) p_i(t)$$

On a alors obtenu $2n$ équations (x et p sont des vecteurs), auxquelles se rajoute l'équation sur z , obtenue en dérivant sa définition :

$$\dot{z}(t) = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i}(x(t)) \dot{x}_i(t) + \frac{\partial u}{\partial t}$$

On remplace \dot{x} et on obtient

$$\dot{z} = \sum p_i(t) \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, x(t), z(t), p(t)) - H(t, x(t), z(t), p(t))$$

On a alors le système standard d'équations différentielles, appelé système caractéristique de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= D_p H(t, x(t), z(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) &= -D_u H(t, x(t), z(t), p(t)) p(t) + D_x H(t, x(t), z(t), p(t)) \\ \dot{z}(t) &= D_p H(t, x(t), z(t), p(t)) \cdot p(t) \end{aligned}$$

Remarque : C'est exactement la méthode employée dans le tout premier paragraphe.

2.2 Une application utile $H = G(\nabla u)$

Appliquons maintenant ce résultat à un exemple simple : On veut montrer l'absence de solutions régulières en temps infini : On suppose $H = G(\nabla u)$. On a alors

$$\dot{p}(t) = 0$$

donc p est constante le long des caractéristiques.

D'autre part on a

$$\dot{x}(t) = D_p H(p(t)) = \nabla H(p(0))$$

Or ces droites ne peuvent se croiser et d'après ce qui précède, les caractéristiques sont des droites d'équation

$$x(t) = y + t \nabla H(\nabla u(y))$$

Supposons u_0 non constante, alors les trajectoires se croisent et donc la solution régulière "explose". Ceci justifie en partie la recherche de nouvelles "solutions" dites faibles que nous introduirons dans le chapitre suivant.

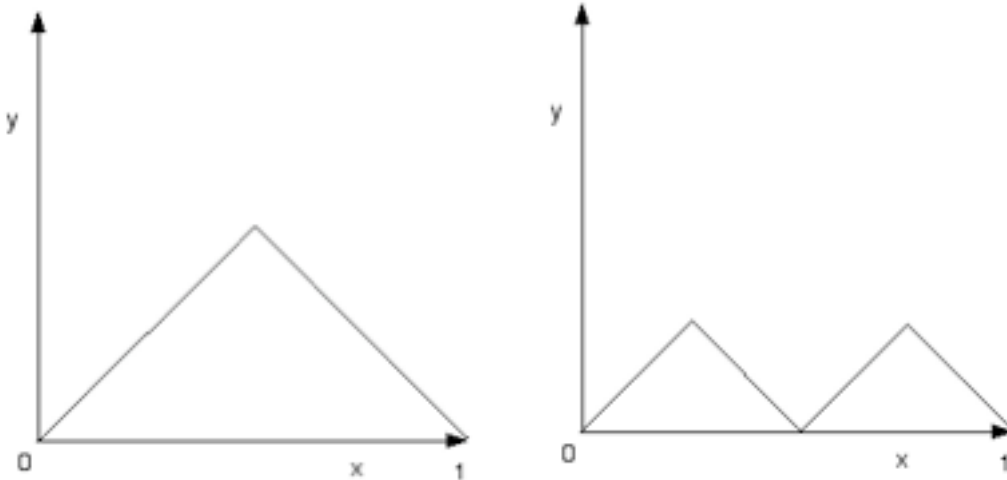
2.3 Durée d'explosion

Nous allons ici nous intéresser à ce qui se produit lors de l'explosion, et en particulier au temps auquel elle a lieu. Pour montrer le caractère chaotique de ce phénomène nous allons étudier une équation très simple, à une dimension.

On considère l'équation de Hamilton-Jacobi :

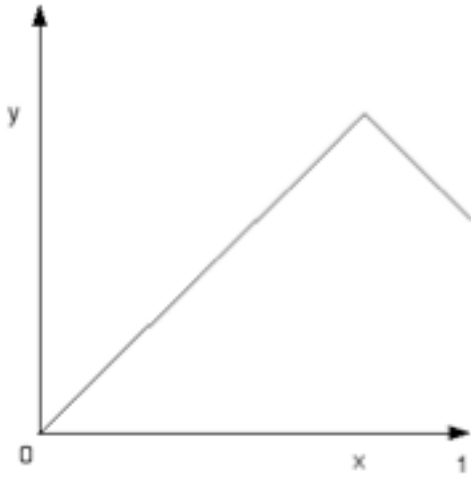
$$\begin{cases} |u'(x)| = 1 & \text{sur } [0, 1] \\ u(0) = 0 & u(1) = b \end{cases} \quad (8)$$

1. $b = 0$: On se rend compte qu'il existe plusieurs possibilités de solutions presque partout :



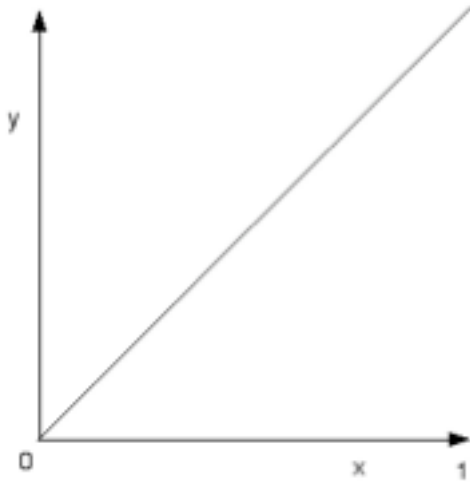
Dans la suite, on prendra la solution maximale.

2. $0 \leq b < 1$:



L'explosion se produit au temps $(b + 1)/2$.

3. $b = 1$: La solution est régulière.



4. $b > 1$ Il n'y a pas de solution continue.

Pour répondre à ce problème d'explosion ainsi qu'à l'existence de plusieurs solutions presque partout, nous allons introduire la notion de solution de viscosité.

3 Solutions de viscosité

3.1 Définition des solutions de viscosité

Considérons l'équation

$$\begin{cases} H(x, u, Du) = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (9)$$

Définition 3.1 Une solution de viscosité u de (3) est une fonction uniformément continue et bornée telle que

1. $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$
2. pour toute fonction de test $v \in C^\infty$, si $u - v$ a un maximum local au point x_0 , alors

$$H(x_0, u(x_0), Dv(x_0)) \leq 0$$

3. pour toute fonction de test $v \in C^\infty$, si $u - v$ a un minimum local au point x_0 , alors

$$H(x_0, u(x_0), Dv(x_0)) \geq 0$$

Une fonction qui vérifie 1 et 2 (respectivement 3) est appelée sous (respectivement sur)-solution de viscosité

Nous allons voir un premier résultat qui justifie cette définition :

Proposition 3.1 Une solution régulière est une solution de viscosité

En effet si $u - v$ admet un extremum local, alors

$$D(u - v)(x_0, y_0) = 0$$

d'où

$$H(x_0, u(x_0), Dv(x_0)) = 0$$

Remarque : Les inégalités dans la définition proviennent en fait du cadre plus général des équations elliptiques du type

$$H(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$$

où D^2u est la matrice Hessienne de u avec H croissante par rapport à D^2u pour la relation d'ordre usuelle sur les matrices symétriques : $M \leq N$ ssi $\forall p, p^T M p \leq p^T N p$. Alors la propriété précédente reste vraie mais on n'a pas égalité.

Exemple : Montrons pour l'exemple précédemment évoqué que $d(x, \partial\Omega)$ est la solution de viscosité du système

$$\begin{cases} |\nabla u| = 1 \\ u_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Nous avons vu précédemment que c'est une situation typique d'explosion des solutions régulières en temps fini. Notons $u = d(x, \partial\Omega)$. Soit $v \in C^\infty$ tel que $u - v$ ait un maximum local en x_0 .

Considérons $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$

Alors, il existe un ouvert sur lequel $u \in C^\infty$ et donc

$$|\nabla v(x_0)| \leq 1$$

Considérons maintenant $x_0 \in \partial\Omega$, nous avons donc pour un certain ouvert U ,

$$\forall x \in U, v(x_0) \leq v(x) - u(x)$$

Par conséquent, v admet un minimum en x_0 . De plus, u est 1-lipschitzienne, donc

$$|\nabla v(x_0)| \leq 1.$$

L'autre condition se fait pareillement.

3.2 Les solutions de viscosité évanescence

Nous présentons ici une construction permettant d'obtenir dans certains cas des solutions de viscosité.

On utilise dans ce paragraphe l'équation de Hamilton-Jacobi sous la forme

$$(H) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(x, Du) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

On introduit tout d'abord un terme linéaire en $\varepsilon \Delta u$ qui permet de "limiter" les fluctuations de u et donc de régulariser l'équation. On veut ensuite faire tendre ε vers 0. Pour ceci, on s'appuie tout d'abord sur le théorème suivant (admis) :

Théorème 3.1 *L'équation*

$$(C) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(x, Du) = \varepsilon \Delta u \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

admet des solutions régulières qui tendent vers 0 à l'infini à condition que H et g soient des fonctions de classe C^1 .

Notons u^ε une solution de l'équation précédente. Malheureusement, si le laplacien tend à "majorer les oscillations" de u^ε , nous ne sommes pas assurés de pouvoir éviter l'explosion des solutions si $\varepsilon \rightarrow 0$

On va supposer que la famille u^ε est localement équicontinue et bornée sur \mathbb{R}^n , ce qui, en pratique, est souvent vérifié. Alors d'après le théorème d'Ascoli, il existe une suite ε_j telle que

$$u^{\varepsilon_j} \rightarrow u \text{ uniformément sur tout compact}$$

Théorème 3.2 *Sous ces conditions, u est une solution de viscosité de (H)*

Pour cela on considère une fonction test $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[)$ et on suppose que $u - v$ admet un maximum local strict en (x_0, y_0) . Il existe alors un voisinage V de (x_0, y_0) tel que

$$\forall (x, t) \in V \setminus (x_0, y_0), (u - v)(x_0, t_0) > (u - v)(x, t)$$

Alors pour tout j , $u^{\varepsilon_j} - v$ admet un maximum local en (x_j, t_j) , avec

$$(x_j, t_j) \rightarrow (x_0, y_0)$$

En effet si l'on considère la boule $B = B((x_0, y_0), r)$ avec r assez petit pour que cette boule soit dans V , et j assez grand pour que

$$\|u - u^{\varepsilon_j}\|_\infty \leq 1/3((u - v)(x_0, t_0) - \sup_{(x,t) \in \partial B} (u - v)(x, t))$$

alors on a immédiatement

$$(u^{\varepsilon_j} - v)(x_0, t_0) > \sup_{(x,t) \in \partial B} (u - v)(x, t)$$

donc $(u^{\varepsilon_j} - v)$ admet un maximum local sur B . On fait tendre r vers 0 et on obtient le résultat.

D'autre part, u^ε étant solution de (C), c'est également une solution de viscosité et on a

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_j, t_j) + H(x_j, Dv(x_j, t_j)) \leq \varepsilon_j \Delta v(x_j, t_j)$$

En faisant tendre j vers $+\infty$ on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) + H(x_0, Dv(x_0, t_0)) \leq 0$$

Cependant on avait supposé au début que $u-v$ admettait un maximum local strict en (x_0, y_0) . Supposons maintenant que ce maximum local n'est pas nécessairement strict.

Alors on se ramène au cas précédent en 'imposant' à ce maximum d'être strict.

Posons dans ce but :

$$v' = v - |x - x_0|^2 - (t - t_0)^2$$

Enfin, dans le cas d'un minimum local on procède exactement de la même façon.

Terminons enfin par un théorème qui finit complètement d'avaliser l'usage des solutions de viscosité comme solutions de secours ou substituts des solutions régulières :

3.3 Unicité des solutions de viscosité

Considérons l'équation de Hamilton-Jacobi aux valeurs initiales : fixons un temps $T > 0$,

$$\begin{cases} H(x, Du) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ u = g & \text{sur } \mathbb{R}^n \times 0 \end{cases}$$

Pour montrer ce théorème, nous aurons besoin de la proposition suivante :

Proposition 3.2 *Si u est une solution de viscosité, v une fonction test alors en un point (x_0, T) où $u - v$ admet un maximum local, on a*

$$u_t(x_0, T) + H(Dv(x_0, T), x_0) \leq 0$$

Remarque : Cette proposition n'est rien d'autre que la vérification de la propriété de viscosité en un temps maximal.

Preuve :

Supposons tout d'abord que le maximum local est strict. Posons pour commencer

$$w(x, t) = v(x, t) + \frac{\varepsilon}{T - t}$$

Comme en T , $u - w$ tend vers $-\infty$, cette fonction admet un maximum local en un certain point $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ avec $t_\varepsilon \leq T$. De plus, par passage à la limite :

$$\forall x, t \in [0, T[, \liminf w(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \geq w(x, t)$$

ce qui impose

$$(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \rightarrow (x_0, T)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} w_t(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(Dw_t(x_\varepsilon, t_\varepsilon), x_\varepsilon) &\leq 0 \\ v_t(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(Dv_t(x_\varepsilon, t_\varepsilon), x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{(T - t_\varepsilon)^2} &\leq 0 \end{aligned}$$

donc à fortiori,

$$v_t(x_0, T) + H(Dv(x_0, T), x_0) \leq 0.$$

Dans le cas plus général où le maximum n'est pas nécessairement strict, il suffit d'appliquer la preuve précédente à

$$v' = v - |x - x_0|^2 - (t - t_0)^2.$$

La preuve est similaire dans le cas où on a un minimum local.

Théorème 3.3 *Unicité des solutions de viscosité :*

Supposons que le hamiltonien satisfait aux conditions dites "de continuité de Lipschitz" c'est à dire que :

$$\begin{cases} |H(p, x) - H(q, x)| \leq C|p - q| \\ |H(p, x) - H(p, y)| \leq C|x - y|(1 + |p|) \end{cases}$$

Alors, il existe, au plus, une seule solution de viscosité.

Preuve : Cette preuve a ceci de particulier qu'elle fait intervenir un doublement du nombre de variables, c'est donc, semble-t-il, une manière de compliquer un problème délicat (nous avons pu le constater précédemment).

1. Prenons u et v solutions de viscosité avec les mêmes conditions initiales. Supposons

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} (u - v) := \sigma > 0$$

Considérons $\varepsilon > 0$ et $\lambda < 1$ puis posons

$$\forall x, y, \forall s, t \in [0, T], \varphi(x, y, t, s) := u(x, t) - v(y, s) - \lambda(t + s) - \frac{1}{\varepsilon^2}(|x - y|^2 + |t - s|^2) - \varepsilon(|x|^2 + |y|^2)$$

φ tend vers $-\infty$ quand $|x| \rightarrow \infty, |y| \rightarrow \infty$.

Ainsi φ atteint son supremum α en un certain point (x_0, y_0, t_0, s_0) .

2. Tentons d'abord d'évaluer les comportements du point en lequel est atteint le maximum quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On peut obtenir un premier résultat en ne dédoublant pas les variables, c'est à dire en posant

$$\begin{cases} x = y \\ t = s \end{cases}.$$

Soient ε et λ tels que

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} \varphi(x, x, t, t) \geq \frac{\sigma}{2}.$$

On en déduit

$$\alpha \geq \frac{\sigma}{2} \quad (0)$$

et

$$\alpha \geq \varphi(0, 0, 0, 0).$$

Ainsi

$$\lambda(t_0 + s_0) + \frac{1}{\varepsilon^2}(|x_0 - y_0|^2 + (t_0 - s_0)^2) + \varepsilon(|x_0|^2 + |y_0|^2) \leq u(x_0, t_0) - v(y_0, s_0) - u(0, 0) + v(0, 0)$$

Or, u et v sont bornées donc $|x_0 - y_0|, |t_0 - s_0| = O(\varepsilon)$ et $\varepsilon(|x_0|^2 + |y_0|^2) = O(1)$

On en déduit ainsi

$$\varepsilon(|x_0| + |y_0|) = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

3. Dans la même optique, en considérant (x_0, x_0, t_0, t_0) et en tenant compte de l'uniforme continuité de v :

$$|x_0 - y_0|, |t_0 - s_0| = o(\varepsilon)$$

4. Cherchons maintenant à affiner encore un peu plus nos informations concernant le comportement de t_0 ou s_0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Considérons w_u et w_v les modules de continuité respectifs de u et v .

En utilisant l'équation (0), et en en "décomposant" les termes un à un (technique souvent utilisée pour démontrer l'équivalence C^1 et "dérivées partielles continues") :

$$u(x_0, t_0) - v(y_0, s_0) = u(x_0, t_0) - u(x_0, 0) + u(x_0, 0) - v(x_0, 0) + v(x_0, 0) - v(x_0, t_0) + v(x_0, t_0) - v(y_0, s_0)$$

$$u(x_0, t_0) - v(y_0, s_0) \leq w_u(t_0) + w_v(t_0) + w_v(o(\varepsilon))$$

Choisissons donc ε de sorte que

$$\frac{\sigma}{4} \leq w_u(t_0) + w_v(t_0)$$

Ceci implique donc qu'il existe une certaine constante $\nu > 0$ telle que $t_0 > \nu$ et $s_0 > \nu$.

5. Nous pouvons désormais conclure en utilisant les préliminaires appliqués à des fonctions bien choisies :

Introduisons maintenant $\zeta : (x, t) \mapsto \varphi(x, y_0, t, s_0)$. Cette fonction admet un maximum en (x_0, t_0) et donc $u - \eta$ admet un maximum en (x_0, t_0) où

$$\eta(x, t) := v(y_0, s_0) + \lambda(t + s_0) + \frac{1}{\varepsilon^2}(|x - y_0|^2 + |t - s_0|^2) + \varepsilon(|x|^2 + |y_0|^2)$$

Appliquons la proposition préliminaire :

$$\eta_t(x_0, t_0) + H(D_x \eta(x_0, t_0), x_0) \leq 0$$

Ainsi,

$$\lambda + \frac{2(t_0 - s_0)}{\varepsilon^2} + H\left(\frac{2}{\varepsilon^2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon x_0, x_0\right) \leq 0$$

Nous pouvons, en nous intéressant à $(y, s) \mapsto -\varphi(x_0, y, t_0, s)$ appliquer la même méthode : Nous en déduisons :

$$-\lambda + \frac{2(t_0 - s_0)}{\varepsilon^2} + H\left(\frac{2}{\varepsilon^2}(x_0 - y_0) - 2\varepsilon x_0, x_0\right) \leq 0$$

Il suffit maintenant de soustraire ces deux inégalités, de se servir de l'hypothèse de continuité de Lipschitz, puis de faire tendre ε vers 0 (en se servant des estimations précédentes) pour arriver à une contradiction :

$$\lambda = 0 \quad !!$$

3.4 L'estimation de Lipschitz

Nous allons présenter ici dans les grandes lignes la méthode permettant de justifier la proposition admise au paragraphe 3.2 : *Les solutions de viscosité évanescentes*. On considère l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(\nabla u) = \varepsilon \Delta u, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (10)$$

On pose d'autre part

$$p_j(t, x) = \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

En dérivant (10), on obtient

$$\partial_t p_j + \frac{\partial}{\partial x_j} H(\nabla u) = \varepsilon \Delta p_j.$$

Et, par le théorème de Schwartz

$$\partial_t p_j + \nabla H(p) \nabla p_j = \varepsilon \Delta p_j. \quad (11)$$

On retrouve une équation du type des équations de transport et on peut appliquer les résultats portant sur ce type d'équations, qui nous garantissent l'existence et le principe du maximum :

$$|p_j(t, x)| \leq \|p_j(0)\|_\infty.$$

3.5 La forme d'une solution de viscosité

Jusqu'ici, nous avons défini les solutions de viscosité puis justifié leur existence comme leur unicité (dans certains cas). Néanmoins, nous n'avons jamais donné une idée de leur forme. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cette dernière partie.

Notons que les considérations qui vont suivre sont des grandes sources de réflexion pour les chercheurs plus spécialisés dans les théories du contrôle ou de la programmation dynamique.

3.5.1 La formule de Hopf-Lax

Considérons le problème aux conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} H(Du) + u_t = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times [0, T], \\ u = g & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

Supposons que le hamiltonien et g vérifient les conditions suivantes :

1. $p \mapsto H(p)$ est convexe,
2. $\lim_{|p| \rightarrow \infty} \frac{H(p)}{|p|} = \infty$
3. g est une fonction lipschitzienne.

Définition 3.2 La transformée de Legendre

Considérons H vérifiant les conditions précédentes. Considérons

$$L(q) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} [p \cdot q - H(p)]$$

L est la transformée de Legendre.

Remarques :

1. Justifions l'existence de L :

$$p.q - H(p) = |p| \left[\frac{p.q}{|p|} - \frac{H(p)}{|p|} \right]$$

Or, pour un certain q fixé, $p \mapsto \frac{p.q}{|p|}$ est bornée et $\lim_{|p| \rightarrow \infty} \frac{H(p)}{|p|} = \infty$, donc il existe un supremum fini.

2. $\frac{L(H)(q)}{|q|} = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} |p| \left[\frac{p.q - H(p)}{|p||q|} \right]$ donc tend vers ∞ quand $|q| \rightarrow \infty$.

3. Notons $L(H)$ la transformée de Legendre de H . Alors

$$L(L(H))(c) = \sup_{b \in \mathbb{R}^n} [b.c - L(H)(b)]$$

$$L(L(H))(c) = \sup_{b \in \mathbb{R}^n} [b.c - \sup_{a \in \mathbb{R}^n} [a.b - H(a)]]$$

$$L(L(H))(c) = \sup_{b \in \mathbb{R}^n} [- \sup_{a \in \mathbb{R}^n} [-b.c + a.b - H(a)]]$$

Ainsi, de façon évidente :

$$L(L(H))(c) = H(c)$$

En effet, c'est la traduction de la convexité de H . Ainsi,

$$L(L(H))(c) = H(c)$$

L est donc une transformation involutive.

3.5.2 Une forme de solution de viscosité

Théorème 3.4 Les solutions de viscosité sous la forme de Hopf-Lax

Supposons qu'en plus des conditions précédentes, g est bornée. Dans ce cas, l'unique solution de viscosité du problème précédent est :

$$u(x, t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left[tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right]$$

Preuve :

1. u est une fonction lipschitzienne égale à g en 0 et bornée. Il suffit de vérifier que $t \min_{y \in \mathbb{R}^n} [L(\frac{x-y}{t})]$ est bornée et lipschitzienne. On peut pour ceci utiliser les résultats du 1 sur les maximums de fonctions lipschitziennes. Il est assez aisé d'en déduire le résultat.

2. Soit $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ telle que $u - v$ ait un maximum local en (x_0, t_0) . Montrons alors que

$$\forall t < t_0, u(x_0, t) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[(t_0 - t)L\left(\frac{x_0 - x}{t_0 - t}\right) + u(x, t) \right]$$

En effet,

$$\forall t < t_0, \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[(t_0 - t)L\left(\frac{x_0 - x}{t_0 - t}\right) + u(x, t) \right] = \min_{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n} \left[(t_0 - t)L\left(\frac{x_0 - x}{t_0 - t}\right) + tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right]$$

$$\leq u(x_0, y_0)$$

en prenant $y = x_0$ D'autre part,

$$(t_0 - t)L\left(\frac{x_0 - x}{t_0 - t}\right) + tL\left(\frac{x - y}{t}\right) + g(y) \geq \sup_{p \in \mathbb{R}^n} [p \cdot (x_0 - y) - t_0 H(p) + g(y)]$$

car

$$\sup_p U(p) + \sup_p V(p) \geq \sup_p [U(p) + V(p)]$$

Ainsi,

$$(t_0 - t)L\left(\frac{x_0 - x}{t_0 - t}\right) + tL\left(\frac{x - y}{t}\right) + g(y) \geq u(x_0, t_0)$$

Or $u - v$ admet un maximum local en (x_0, t_0) , donc suffisamment proche de (x_0, t_0) ,

$$v(x_0, t_0) - v(x, t) \leq (t_0 - t)L\left(\frac{x_0 - x}{t_0 - t}\right)$$

Notons $\begin{cases} h = t_0 - t \\ q = \frac{x_0 - x}{t_0 - t} \end{cases}$. Alors, en divisant par h puis en faisant tendre h vers 0 :

$$v_t(x_0, t_0) + Dv(x_0, t_0) \cdot q \leq L(q)$$

Ceci étant vrai pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\sup_q [v_t(x_0, t_0) + Dv(x_0, t_0) \cdot q - L(q)] \leq 0$$

et donc

$$v_t(x_0, t_0) + H[Dv(x_0, t_0)] \leq 0$$

3. Supposons désormais que $u - v$ admet un minimum local en (x_0, t_0) . Raisonnons par l'absurde :

$$v_t(x, t) + H[Dv(x, t)] \leq -\varepsilon < 0$$

pour (x, t) assez proche de (x_0, t_0) .

En reprenant ce qui précède dans l'autre sens :

$$\sup_q [v_t(x_0, t_0) + Dv(x_0, t_0) \cdot q - L(q)] \leq -\varepsilon$$

Pour h assez petit, et un certain point x_1 ,

$$u(x_0, t_0) = hL\left(\frac{x_0 - x_1}{h}\right) + u(x_1, t_0 - h)$$

Écrivons, en posant $i(s) = sx_0 + (1 - s)x_1, t_0 + (s - 1)h$,

$$v(x_0, t_0) - v(x_1, t_0 - h) = h \int_0^1 Dv(i(s)) \cdot q_1 + v_t(i(s)) ds$$

Ceci se vérifie très simplement "à la main".

Cette méthode revient simplement à remonter astucieusement les calculs précédents (en intégrant au lieu de dériver en passant à la limite)

On en déduit que

$$v(x_0, t_0) - v(x_1, t_0 - h) \leq hL\left(\frac{x_0 - x_1}{h}\right) - \varepsilon h$$

On aboutit à une contradiction immédiate en notant que

$$u(x_0, t_0) = hL\left(\frac{x_0 - x_1}{h}\right) + u(x_1, t_0 - h)$$

Par conséquent, u est une solution de viscosité du problème considéré.

Conclusion :

L'idée des solutions de viscosité, amenée par l'observation d'exemples simples, a permis de résoudre des problèmes beaucoup plus compliqués posés par la physique et l'économie (la théorie de l'équilibre général fait intervenir les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman auxquelles on fait référence dans le dernier paragraphe), mais aussi le traitement de l'image, discipline particulièrement foisonnante actuellement.

Références :

1. Partial Differential Equations
Lawrence C. Evans
1998
2. Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations
P-L Lions
Pitman Advanced Publishing Program
1982
3. Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi
Guy Barles
Springer-Verlag-SMAI
1994