Feuille d'exercices n°1

---

1. Espaces l^p, $1 \leq p < \infty$.

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on note:

$$l^p := \left\{ (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p < +\infty \right\},$$

et pour toute suite $u \in l^p$, on définit $\|u\|_p := \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}$.

1. Vérifier que $(l^1, \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel normé.

2. Le but est maintenant de montrer que, plus généralement, $(l^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour $p \in [1, +\infty[$.

- Montrer que pour tout $a, b > 0$ et tout $p, q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

- En déduire que pour $u \in l^p$ et $v \in l^q$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

- En déduire l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$. Conclure.
  (On pourra penser à écrire la majoration $|u_k + v_k|^p \leq (|u_k| + |v_k|)|u_k + v_k|^{p-1}$.)

2. Distance SNCF

Soit $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Pour toute paire de points $x, y \in \mathbb{R}^2$, on note

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x - y\| & \text{si } x,\ y \text{ et } 0 \text{ sont alignés} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}^2$; on l'appelle parfois la *distance SNCF* pour des raisons que je vous laisse deviner.

2. Décrire géométriquement la boule ouverte de centre x et de rayon r, pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ quelconque.

3. La distance d est-elle plus fine ou moins fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$?

4. Identifier la distance induite par d sur une droite vectorielle ? sur le cercle unité ?

5. Quelles similitudes directes sont continues pour d ?

6. Montrer que $(\mathbb{R}^2, d)$ n'est pas normable.

3. Distance de Hausdorff sur l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^n$

Soit n un entier. On note d la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes non-vides de $\mathbb{R}^n$. Étant donné un compact $K \in \mathcal{K}$, on note $\phi_K : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ la fonction "distance à K" définie par

$$\phi_K(y) = \inf_{x \in K} d(x, y).$$

Étant donnés deux éléments K_1, K_2 de $\mathcal{K}$, on note alors

$$\delta(K_1, K_2) := \|\phi_{K_1} - \phi_{K_2}\|_\infty$$

1. Montrer que δ définit une distance sur $\mathcal{K}$. C'est la *distance de Hausdorff*.

   Est-il vrai que δ définit également une distance sur l'ensemble des parties non-vides de $\mathbb{R}^n$?

2. Pour tout compact $K \in \mathcal{K}$ et tout réel $\epsilon > 0$, on note

$$V_\epsilon(K) := \bigcup_{x \in K} \overline{B}(x, \epsilon)$$

où $B(x, \epsilon)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ dans $(\mathbb{R}^n, d)$. Montrer que, étant donnés deux compacts $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, on a $\delta(K_1, K_2) \leq \epsilon$ si et seulement si $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$ et $K_2 \subset V_\epsilon(K_1)$.

3. Soit $\mathcal{K}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{K}$ constitué des parties finies de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathcal{K}_0$ est dense dans $(\mathcal{K}, \delta)$.

4. Quelques questions sur intérieur, adhérence et frontière

1. Soient A et B deux parties d'un espace topologique X. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en général. Lorsqu'elles décrivent une égalité fausse, indiquez si au moins l'une des inclusions est vraie.

   a. $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$

   b. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   c. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

   d. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

   e. $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

   f. $\partial(A \cap B) = \partial A \cap \partial B$.

2. Montrer que, dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'une boule ouverte est toujours la boule fermée correspondante, et l'intérieur d'une boule fermée est toujours la boule ouverte correspondante. Est-ce encore vrai dans un espace métrique ?

3. Soit X et Y deux espaces topologiques. Montrer qu'une fonction de X dans Y est continue si et seulement si pour tout ensemble A de X, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

4. Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille indexée d'espaces topologiques. On considère $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ muni de la topologie produit. Pour tout $\alpha \in A$, soit Y_α un sous-ensemble de X_α. Montrer que:

$$\overline{\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha} = \prod_{\alpha \in A} \overline{Y_\alpha}.$$

5. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, quels sont les parties de E dont la frontière est vide ?

5. Distance sur la sphère

On note $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^3$, et $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon 1 centrée à l'origine pour cette norme. Si p et q sont deux points de $\mathbb{S}^2$, on note $\mathcal{C}(p,q)$ l'ensemble des chemins $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^2$ qui sont C^1 par morceaux, et tels que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$. On note $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(s)\| ds$ la longueur d'un tel chemin, et on pose

$$d(p,q) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}(p,q)\}.$$

On rappelle qu'un *grand cercle* de $\mathbb{S}^2$ est un cercle obtenu comme intersection de $\mathbb{S}^2$ avec un plan passant par l'origine de $\mathbb{R}^3$. Si p et q sont deux points de $\mathbb{S}^2$ qui ne sont pas antipodaux, on note $\gamma_{p,q}$ le plus court des deux arcs de grand cercles qui joignent p à q. Si p et q sont des points antipodaux, on note $\gamma_{p,q}$ l'un quelconque des demi-grands cercles joignants p à q.

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{S}^2$.

2. Montrer que la topologie définie par d sur $\mathbb{S}^2$ est la même que celle induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^3$.

3. Montrer que, quels que soient p et q sur $\mathbb{S}^2$, la distance $d(p,q)$ est égale à la longueur de l'arc $\gamma_{p,q}$.

6. Distances ultramétriques.

Une distance d sur un ensemble E est dite *ultramétrique* si elle vérifie

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z)) \quad \text{pour tous } x,\ y \text{ et } z.$$

1. Dans un espace munit d'une distance ultramétrique, montrer que :

   a. tout triangle est isocèle ;

   b. n'importe quel point d'une boule est le centre de cette boule ;

   c. étant données deux boules, soit elle sont disjointes, soit l'une est contenue dans l'autre ;

   d. les boules ouvertes sont fermées, et les boules fermées sont ouvertes ;

   e. une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si $d(x_n, x_{n+1})$ tend vers 0.

2. *Un exemple trivial.* Soit X un ensemble. Pour $x, y \in X$, on pose $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$. Montrer que d est une distance ultramétrique sur X.

3. *Un exemple important : la distance p-adique.* Soit p un nombre premier. On considère *valuation p-adique* $v_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty]$ définie de la manière suivante : pour $a \in \mathbb{Z}^*$, $v_p(a)$ est la puissance de p dans la décomposition de a en facteurs premiers ; puis $v_p(a/b) := v_p(a) - v_p(b)$; enfin $v(0) := +\infty$. Pour $x, y \in \mathbb{Q}$, on note alors $d_p(x,y) = p^{-v_p(x-y)}$. Montrer que d_p est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$. Comparer cette distance avec la distance usuelle. Montrer que tout voisinage p-adique de 0 est dense dans $\mathbb{Q}$ pour la distance usuelle.

4. *Un autre exemple important : séries formelles.* Soit $E = K[[X]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans le corps K (les éléments de E sont les séries de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ avec $a_0, a_1, \dots \in K$). On considère la valuation $v : E \to [0, +\infty]$ définie par

$$v(0) := +\infty \text{ et si } S = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \neq 0, v(S) := \min\{n \in \mathbb{N} \ / \ a_n \neq 0\}.$$

Pour $S, T \in E$, on note alors $d(S,T) = 2^{-v(S-T)}$. Vérifier que d est une distance ultramétrique sur E.

7. Théorème de plongement d'Arens-Fells.

Soit (X,d) un espace métrique. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies non vides de X, et $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. On fixe un point $a \in X$, et, pour chaque $x \in X$, on définit :

$$f_x : A \in \mathcal{F} \ \mapsto d(x,A) - d(a,A).$$

Montrer que l'application $x \mapsto f_x$ est une isométrie, puis démontrer que tout espace métrique est isométrique à un fermé d'un espace vectoriel normé.