Feuille d'exercices n°10

---

1. Formes bilinéaires

1. Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue où E, F, G sont des espaces vectoriels normés. Montrer que B est de classe C^1.

2. Soient $f : \Omega \to E$ et $g : \Omega \to F$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert Ω de E. On définit $\Pi : \Omega \to G$ par

$$\forall x \in \Omega, \ \ \Pi(x) = B(f(x), g(x)).$$

Montrer que Π est Fréchet-différentiable et calculer sa différentielle.

2. Fréchet-Différentiabilité des normes

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que la norme n'est pas différentiable en 0 et que l'ensemble de ses points de différentiabilité est un cône épointé.

2. Soit $(H, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert. En quels points de H la norme est elle différentiable ?

3. Décrire explicitement les points de différentiabilité de $\mathbb{R}^2$ muni des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

4. Soit E un espace vectoriel normé et Ω un ouvert. Soit d une distance sur Ω. Montrer que $d(\cdot,\cdot)$ n'est pas différentiable sur Ω^2.

3. Dérivée directionnelle

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application continue. Si $x \in U$ et $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on dit que f est *dérivable suivant* $\overrightarrow{u}$ *en* x si $h(t) = f(x + t\overrightarrow{u})$ est dérivable en $t = 0$. Dans ce cas, on appelle $h'(0)$ la *dérivée directionnelle* de f en x par rapport à $\overrightarrow{u}$.

1. Se rappeler que si f est différentiable en x, elle admet des dérivées directionnelles en x dans toutes les directions. Les calculer.

2. Pour quelles valeurs de $p, q \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{pq} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_{pq}(x, y) = \frac{x^p y^q}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = 0$$

est elle continue ? C^1 ?

3. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = y^3/x \quad \text{si } x \neq 0, \qquad f(0, y) = 0$$

admet des dérivées en l'origine dans toutes les directions et qu'elle n'est pas bornée au voisinage de l'origine.

4. Une fonctionnelle non linéaire

Soit $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Soit f la fonctionnelle de $C([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, définie par:

$$u \mapsto f(u) := \int_0^1 G(u(t))\, dt.$$

Montrer que f est Fréchet-différentiable et calculer sa différentielle.

2. Supposons que G vérifie les hypothèses suivantes. Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$|G(u)| \leq \alpha + \beta |u|, \quad |G'(u)| \leq \beta.$$

Soit g la fonctionnelle de $L^1([0,1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, définie par:

$$u \mapsto g(u) := \int_0^1 G(u(t))\, dt.$$

Montrer que g est Gatteaux-différentiable.

3. Montrer qu'en revanche, g n'est (en général) pas Fréchet-différentiable. On pourra considérer la suite de fonctions:

$$v_n(t) := 1_{t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]}.$$

4. Considérons à présent $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$, muni de sa norme canonique. Vérifier que la fonctionnelle

$$u \mapsto \int_0^1 (\frac{1}{2}|u'|^2 + G(u(t)))\, dt.$$

est Fréchet-différentiable. Supposons qu'un minimum soit atteint en $u_0 \in C^2([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que u_0 vérifie:

$$-u_0'' + G'(u_0) = 0.$$

5. Fonctions homogènes et relations d'Euler

Soient E et F deux espaces de Banach réels. Une application $f : E \to F$ est *homogène de degré* k si, pour tout $x \in E$ et tout réel t, on a $f(tx) = t^k f(x)$.

1. On suppose en plus que f est différentiable en dehors de l'origine. Montrer que pour tout $x \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} Df(x) \cdot x &= kf(x) \\ Df(tx) &= t^{k-1} Df(x). \end{aligned}$$

2. Montrer qu'une application f homogène de degré k et de classe C^k vérifie :

$$\forall h \in E, f(h) = \frac{1}{k!} D^k f(0) \cdot (h, \ldots, h).$$

(C'est à dire que f est induite par une application k-multilinéaire.)

3. Cela reste-t-il vrai sans supposer $f \in C^k$?

6. Déterminant

Montrer que la fonction déterminant $\det : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et calculer sa différentielle en l'identité. En déduire que, pour tout $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, on a $D\det(M) \cdot (H) = \det(M)\mathrm{trace}(M^{-1}H)$, puis calculer la différentielle de det en tout point en fonction de la matrice $\mathrm{Com}(M)$ des cofacteurs de M.

7. Exponentielle de matrice

Soit $A \in M(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On notera L_A et R_A les applications de produit à gauche et produit à droite (dans $M(n, \mathbb{R})$), i.e. $L_A : X \mapsto AX$ et $R_A : X \mapsto XA$. On notera L_A^k et R_A^k leurs k-ièmes composées.

1. Montrer que l'exponentielle de matrice $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ est différentiable en 0. Quelle est sa différentielle ?

2. Montrer que l'exponentielle de matrice est de classe C^1, et que sa différentielle en A est donnée par

$$D\exp(A)\cdot H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{n-1} L_A^l R_A^{n-1-l} H.$$

3. Montrer que la différentielle $D\exp$ satisfait la relation :

$$e^{-L_A} \circ D\exp(A)\cdot H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (-\mathrm{ad}\, A)^k H,$$

où $\mathrm{ad}\, A$ est l'application $\mathrm{ad}\, A(H) = AH - HA$ (on pourra exprimer $(-\mathrm{ad}\, A)^k H$ en fonctionde L_A et R_A).

4. Montrer que si A est diagonalisable (resp. nilpotente), alors $\mathrm{ad}\, A$ est diagonalisable (resp. nilpotent). Préciser les valeurs propres dans le premier cas. En déduire lorsque le corps est $\mathbb{C}$ la décomposition de Dunford de $\mathrm{ad}\, A$ en fonction de celle de A.

5. A quelle condition sur $\mathrm{ad}\, A$ l'application $D\exp(A)$ est-elle inversible ? A quelle condition sur A ?

8. Distance à un fermé.

Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $U = \mathbb{R}^n - F$ son ouvert complémentaire. On considère le carré de la fonction distance à F (défini sur U), c'est à dire l'application $\delta : U \to \mathbb{R}$ donnée par $\delta(x) = \min\limits_{y \in F} \|x - y\|^2$. On va étudier la différentiabilité de δ.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon \geq 0$. On pose $F_\varepsilon := \left\{ z \in F \;\middle/\; \|z - x\| \leq d(x, F) + \varepsilon \right\}$ et on définit une application $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $\varphi_\varepsilon(y) := \inf\limits_{z \in F_\varepsilon} \langle 2y; x - z \rangle$ où $\langle\ ;\ \rangle$ est le produit scalaire usuel.

Montrer que φ_ε converge vers φ_0 lorsque $\varepsilon \to 0^+$ uniformément sur la sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ tendant vers 0 telle que

$$\varphi_0(y) - c_\epsilon \|y\| \leq \varphi_\varepsilon(y) \leq \varphi_0(y).$$

2. On introduit un fonction $\varphi : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par la formule

$$\varphi(x, y) = \min \left\{ \langle 2y, x - z \rangle \text{ pour } z \in F \text{ tel que } \|x - z\| = d(x, F) \right\}.$$

Montrer que $\delta(x + y) = \delta(x) + \varphi(x, y) + o(\|y\|)$ lorsque $\|y\| \to 0$.

3. Montrer que δ est différentiable en x si et seulement si la distance $d(x, F)$ est atteinte en un unique point de F.