

Feuille d'exercices n°11

1. Résolution d'une équation différentielle via le théorème d'inversion locale

Soit $F = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme, et E le sous-espace fermé de $C^2([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions qui s'annulent en 0 et 1, muni de la norme $\|y\|_E = \|y''\|_\infty + \|y'\|_\infty + \|y\|_\infty$. On se donne deux fonctions h et k réelles continues sur $[0, 1]$, et on considère l'application $\phi : E \rightarrow F$ définie par $\phi(y) = y'' + hy'^2 + ky^2$.

1. Montrer que l'application $\psi : E \times E \rightarrow F$ définie par $\psi(y, z) = h \cdot y' \cdot z' + k \cdot y \cdot z$ est bilinéaire continue.
2. Montrer que ϕ est de classe C^1 sur E et calculer la différentielle $d\phi_{(0)}$ de ϕ en 0.
3. En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour toute fonction $f \in F$ vérifiant $\|f\|_\infty < \epsilon$, il existe $y \in E$ tel que $\phi(y) = f$, c'est-à-dire une solution de l'équation différentielle $y'' + h(x)y'^2 + k(x)y^2 = f(x)$ qui s'annule en 0 et en 1.

2. Une preuve du théorème de D'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme non constant, et S l'ensemble des zéros de P' . En considérant $\mathbb{C} \setminus P(S)$, montrer que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. On utilisera le théorème d'inversion locale et un argument de connexité.

3. Isométries de \mathbb{R}^n

On munit \mathbb{R}^n de sa norme euclidienne. Rappelons que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une *isométrie* si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$. Soit f une application de classe C^2 de \mathbb{R}^n dans lui-même. On va montrer que f est affine si et seulement si sa différentielle est affine en tout point.

1. Si f est affine, démontrer que sa différentielle l'est également.
2. A partir de maintenant, on suppose que la différentielle de f est affine en tout point. Montrer que pour tout $h, k, l \in \mathbb{R}^n$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left\langle d^{(2)}f(x).(h, l), df(x).k \right\rangle + \left\langle df(x).h, d^{(2)}f(x).(k, l) \right\rangle = 0.$$

3. On note $g(h, k, l) = \langle d^{(2)}f(x).(h, l), df(x).k \rangle$. Déduire de la question précédente que $g(h, k, l) = -g(k, h, l)$ puis montrer que $g(h, k, l) = 0$.
4. Montrer que $df(x)$ est un isomorphisme, puis que $d^{(2)}f(x) = 0$.
5. Conclure que f est affine.

4. Lemme de Morse

1. (*Lemme de réduction régulière des formes quadratiques*) On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées symétriques réelles de taille n . On fixe une matrice $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible, et on considère l'application $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, définie par $\phi(M) = {}^tMA_0M$. Montrer que ϕ est C^∞ ; calculer $d\phi(I)$, vérifier qu'elle est surjective et trouver son noyau. En déduire qu'il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $A \mapsto P(A)$ de classe C^∞ de V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $P(A_0) = I$, telle que $A = {}^tP(A)A_0P(A)$ pour tout $A \in V$.

2. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0 et $f \in C^3(U; \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$, $df(0) = 0$ et que $d^{(2)}f(0)$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, de signature $(p, n - p)$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : x \mapsto u$ de classe C^1 d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n , avec $\varphi(0) = 0$, tel que $f(x) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$ au voisinage de l'origine.

Indication. On commencera par écrire $f(x) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)x_i x_j$ avec des fonctions $a_{i,j}$ de classe C^1 .

3. (*Une application classique*) Montrer que les points critiques non dégénérés d'une fonction $f \in C^3(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ sont isolés.

5. Valeurs régulières d'une fonction localement injective

Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n . Soit $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ une fonction localement injective. Montrer que

$$\left\{ x \in \Omega \mid df(x) \text{ est injective} \right\},$$

est un ouvert dense de Ω .

6. Théorème des extrema liés, dit aussi des multiplicateurs de Lagrange

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , $F, g_1, \dots, g_k \in C^1(U; \mathbb{R})$ (avec $k < n$). On note Z l'ensemble suivant :

$$Z := \left\{ x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0 \right\}.$$

On suppose qu'en tout point $x \in Z$, les formes linéaires $dg_1(x), \dots, dg_k(x)$ sont linéairement indépendantes¹. On note $g := (g_1, \dots, g_k)$.

1. On suppose que le point $a \in Z$ est un extremum local de la restriction de F à Z . On va montrer l'existence de coefficients réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, appelés *multiplicateurs de Lagrange*, tels que la relation suivante soit satisfaite :

$$dF(a) = \sum_{i=1}^k \lambda_i dg_i(a).$$

a. Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^n et un voisinage ouvert V de a inclus dans U dans lesquels Z se représente sous la forme :

$$Z = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, x_k) = \varphi(x_{k+1}, \dots, x_n) \right\},$$

pour une certaine application de classe C^1 définie au voisinage de $\alpha := (a_{k+1}, \dots, a_n)$, où a s'écrit (a_1, \dots, a_n) dans la base.

b. Montrer que $\text{Ker } dg(a) = \left\{ (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \mid (h_1, \dots, h_k) = d\varphi_\alpha(h_{k+1}, \dots, h_n) \right\}$.

c. En déduire que $\text{Ker } dg(a) \subset \text{Ker } dF(a)$. Conclure.

2. L'espace tangent en a à Z est l'espace affine $T_a Z := a + \text{Ker } dg(a)$. On appelle Hessienne de F en a , notée $\text{Hess}_a(F)$, la restriction à $T_a Z$ de la forme bilinéaire $d^{(2)}F(a) - \sum_{i=1}^k \lambda_i d^{(2)}g_i(a)$. Montrer que si $\text{Hess}_a(F)$ est définie positive, alors a est un maximum (local) strict de F restreint à Z . Que peut-on dire de la réciproque?

3. (*Un exemple d'application*) Montrer que, pour tous réels x, y, z on a

$$|xyz| \leq \frac{1}{9\sqrt{3}} (|x| + |y| + |z|)^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

Indication: on pourra introduire la fonction $f : [0, +\infty[^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{(x + y + z)^2} \text{ si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ f(0, 0, 0) = 0$$

¹ ceci établit que Z est une sous-variété de \mathbb{R}^n

et appliquer le théorème des extrema liés à un compact bien choisi.

7. Un résultat dû à Borel : fonction à dérivées successives prescrites

On rappelle que le *support* d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'adhérence de $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Dans cet exercice, on souhaite montrer le résultat suivant :

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, I un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R} . Il existe $f \in C^\infty(I)$, à support dans I , tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = c_n.$$

1. Montrer l'existence d'une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, à support dans $] - 1, 1[$, qui vaut 1 au voisinage de 0.
2. On introduit, pour ε_n suffisamment petit pour que $] - \varepsilon_n, \varepsilon_n[\subset I$, la fonction

$$g_n(x) = c_n \varphi \left(\frac{x}{\varepsilon_n} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Montrer que si ε_n est assez petit, on a $|g_n^{(\alpha)}(x)| \leq 2^{-n}$ sur \mathbb{R} , si $\alpha \in \{0, \dots, n-1\}$.

3. Conclure, en utilisant la fonction $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

8. Un théorème de Whitney

Soit F un fermé de \mathbb{R}^n . Un théorème de Whitney établit que F est le lieu des zéros d'une fonction réelle de classe C^∞ , c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

1. Montrer qu'il existe une famille dénombrable de boules $(B_i)_{i \in I}$ et d'applications $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ telles que $F = \mathbb{R}^n - \bigcup_{i \in I} B_i$, et pour tout $i \in I$, on a

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0 \right\} = \mathbb{R}^n - B_i.$$

2. Construire l'application f recherchée à partir des f_i .