École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Feuille d'exercices n°12

---

1. Lemme de Grönwall et variantes

1. Démontrer la forme suivante du lemme de Grönwall : étant donnés α, β et u des fonctions continues sur $[a,b]$ satisfaisant l'inégalité

$$\forall t \in [a,b],\ u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)\,ds,$$

et tels que de plus $\beta \geq 0$ sur $[a,b]$ on a l'inégalité

$$\forall t \in [a,b],\ u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)\exp\Big(\int_s^t \beta(\tau)\,d\tau\Big)\,ds.$$

Indication : on pourra introduire $v(t) := \exp\Big(-\int_a^t \beta(s)\,ds\Big)\int_a^t \beta(s)u(s)\,ds$.

2. *(Une généralisation due à T. Cazenave et A. Haraux).* Soit f une application croissante et localement lipschitzienne $[m,M] \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $p \in [w_0, w_0+\alpha]$ ($\alpha > 0$), il existe une solution $v_p(t)$ définie sur $[a,b]$ de $\dot{v} = f(v)$ et $v(a) = p$. Montrer que si une fonction continue w satisfait

$$\forall t \in [a,b],\ w(t) \leq w_0 + \int_a^t f(w(s))\,ds,$$

alors on a

$$\forall t \in [a,b],\ w(t) \leq v_{w_0}(t).$$

Indication : on pourra introduire le plus grand temps $\bar{t} \in [a,b]$ pour lequel $\forall t \in [a,\bar{t}],\ w(t) \leq v_{w_0+\varepsilon}(t)$.

2. Quelques exemples élémentaires d'utilisation de Cauchy-Lipschitz

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $|f(t) - \cos(t)| < 1$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$). On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

1. Montrer que (S) admet une unique solution globale (c'est à dire définie sur $\mathbb{R}$ entier).
2. Montrer que f admet un zéro t_k sur chaque intervalle $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$).
3. Montrer que, quel que soit x_0, la solution x de (S) est bornée.

2. Soient $f, g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues vérifiant $f(t,x) < g(t,x)$ pour tout $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$. On fixe $t_0 \in [0,1[$ et $a \in \mathbb{R}$ et on considére les systèmes

$$(S_f) \ = \begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = a \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (S_g) \ = \begin{cases} y'(t) = g(t,y(t)) \\ y(t_0) = a. \end{cases}$$

1. Si x, y sont des solutions (de classe C^1) de (S_f) et (S_g), montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $x(t) < y(t)$ pour tout $t \in]t_0, t_0+\delta[$.
2. En déduire que $x(t) \leq y(t)$ pour tout $t \in [t_0, 1]$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$. On lui associe le champ de vecteur $X(x) = -\nabla f$ [1] et on considére le système différentiel associé

$$(S_X) \;=\; \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = X(x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

1. Montrer que le système (S_X) admet une unique solution maximale définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$.
2. En considérant la fonction $f(x) = x^4/4$, montrer que a n'est pas nécessairement égal à $-\infty$.

3. Équations linéaires à coefficients constants

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation $\dot{x} = Ax$. Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur A pour que

(i) toute solution tende vers 0 en $+\infty$,

(ii) toute solution soit bornée sur $\mathbb{R}_+$,

(iii) toute solution soit bornée sur $\mathbb{R}$.

Indication: penser à la décomposition de $\mathbb{C}^n$ en sous-espaces caractéristiques de A, afin de calculer explicitement les solutions.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que, quel que soit le second membre b continu et borné $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^n$, l'équation $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$ ait une unique solution bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Indication: regarder d'abord ce que l'on obtient en faisant $b = 0$; dans le cas $b \neq 0$, calculer la solution par variation des constantes.

4. Une étude de systèmes différentiels

Soit $\lambda > 1$. On considère le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v_1(x,y) \\ \dot{y} = v_2(x,y) \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \lambda x - x\, e^{x^2+y^2} \\ \lambda y - y\, e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

1. Étudier l'existence, l'unicité et la régularité en (t, λ) des solutions maximales pour toute donnée initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. On notera $I_{(x_0,y_0)}$ l'intervalle maximal correspondant. Déterminer les solutions stationnaires (constantes en temps).

2. Montrer (à l'aide des coordonnées polaires (r, θ) par exemple) que les courbes intégrales (image des solutions dans $\mathbb{R}^2$) sont des portions de droite, puis étudier les variations du module des solutions (on distinguera pour cela selon que $x_0^2 + y_0^2$ est inférieur ou supérieur à $\ln \lambda$).

3. Lorsque $x_0^2 + y_0^2 < \ln \lambda$, montrer que la solution est globale, *i.e.* $I_{(x_0,y_0)} = \mathbb{R}$. Lorsque $x_0^2 + y_0^2 > \ln \lambda$, montrer qu'il y a explosion du côté des t négatifs uniquement, *i.e.* $I_{(x_0,y_0)} =]-T^*, +\infty[$.
Indication: vérifier que pour $t \leq 0$, il existe $C > 0$ (dépendant de $x_0^2 + y_0^2$) tel que $\dot{r} \leq -Cr^2$.

4. Quelles sont les valeurs limites possibles pour r lorsque $t \to \pm\infty$? Déterminer ces limites dans les différents cas.

5. Tracer les courbes intégrales dans le plan (x, y).

5. Une étude de systèmes différentiels II

1. On considère le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 2y + 2x^2 \\ \dot{y} = -2x - 4x^3 - 4xy \end{array} \right.$$

[1] autrement dit $X(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$

- Vérifier que $E(x,y) = x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y$ est une intégrale première (c'est-à-dire que $E(x(t), y(t))$ est une constante du temps pour une trajectoire $(x(t), y(t))$ du système).
- Calculer $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} E(x,y)$ et en déduire que les solutions sont globales.
- Montrer que les solutions sont périodiques, puis calculer leur période.
  Indication: on notera A le point le plus à gauche de la courbe de niveau, B le point le plus à droite, et on calculera le temps de parcours de A à B en formant une équation fermée pour $x(t)$; de même pour le temps de parcours de B à A.

2. On perturbe le système précédent ($a > 0$):

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + 2x^2 - ax \\ \dot{y} = -2x - 4x^3 - 4xy + 2ax^2 \end{cases}$$

Montrer à l'aide du lemme de Gronwall que ce système perturbé admet des solutions globales.

3. Montrer que toute solution du système perturbé tend vers $(0,0)$ quand $t \to +\infty$.

6. Equation de transport

Soit $A(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1, et telle que $\|A\|_\infty < +\infty$. On considère l'équation aux dérivées partielles suivante (dite équation de transport):

$$\partial_t f + A(t,x) \cdot \nabla_x f = 0, \quad f_{|t=0} = f_0,$$

d'inconnue $f(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, avec $f_0(x)$ une donnée initiale de classe C^1. Trouver une formule exprimant la solution $f(t,\cdot)$ en fonction de f_0; justifier le nom de l'EDP.

7. Théorème de Hadamard

Ce théorème[2] énonce que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1, alors il y a équivalence entre:

i) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

ii) f est propre[3] et $df_{(x)}$ est de déterminant non nul pour tout x (c'est à dire inversible pour tout x).

On veut démontrer l'équivalence précédente dans le cas où f est de classe C^2.

1. Montrer que $i)$ implique $ii)$, puis que $ii)$ implique que f est surjective (par un argument de connexité).

2. On suppose désormais que f vérifie $ii)$. Soit $z \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = f(z)\}$ est fini.

3. Montrer que les solutions du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -(df_{(x)})^{-1} \cdot \big((f(x) - f(z))\big) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

sont définies sur $[0, +\infty[$, puis que f est injective. Conclure.

[2] ce Théorème admet une démonstration plus topologique via la théorie des revêtements qui sera vu dans le cours d'Introduction à la Topologie Algébrique

[3] c'est à dre que la pré-image par f de tout compact est compact