École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Feuille d'exercices n°2

---

1. Droite réelle avec un point double.

On considère l'ensemble E obtenue comme union disjointe de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et de deux points notés 0_A et 0_B. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de E de la forme :

- soit $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $0 < \epsilon < |x|$,
- soit $\{0_A\} \cup (]-\epsilon, \epsilon[\setminus\{0\})$ pour $\epsilon > 0$,
- soit $\{0_B\} \cup (]-\epsilon, \epsilon[\setminus\{0\})$ pour $\epsilon > 0$.

Montrer que $\mathcal{B}$ forme la base d'une topologie. Montrer que cette topologie ne peut être métrisable. Identifier la topologie induite sur $E - \{0_A, 0_B\}$.

2. Topologie des complémentaires de parties finies.

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des parties de X de complémentaire fini (*i.e.* $C \in \mathcal{C}_0$ si et seulement si ${}^cC = X \setminus C$ est fini), et $\mathcal{C}$ la réunion de $\mathcal{C}_0$ et de l'ensemble vide.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une topologie sur X. Cette topologie est-elle séparée ?

2. Déterminer la frontière d'une partie A de X.

3. Sur la topologie produit.

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x, y, y' \in \mathbb{R}$ tels que $y < y'$, on note

$$U_{x,y,y'} = \{f \in E \mid y < f(x) < y'\}.$$

On note $\mathcal{T}$ la topologie engendrée par la famille $\{U_{x,y,y'}\}_{x,y,y' \in \mathbb{R},\, y<y'}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ n'est autre que la topologie de la convergence simple : une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers une fonction f pour la topologie $\mathcal{T}$ si et seulement si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f.

2. Soit F le sous-ensemble de E constitué des fonctions qui sont nulles partout sauf en un nombre fini de points. Déterminer l'adhérence de F pour la topologie $\mathcal{T}$.

3. Exhiber un élément de E qui n'est limite d'aucune suite d'éléments de F.

4. En déduire que $\mathcal{T}$ n'est pas métrisable.

4. Topologie "de la limite supérieure" sur $\mathbb{R}$.

On munit $\mathbb{R}$ de la topologie $\mathcal{T}_{\limsup}$ engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ et $]b, +\infty[$.

1. Cette topologie est-elle moins fine que la topologie usuelle ? Plus fine ?

2. Montrer que les intervalles $]a, b]$ (avec $a < b$) forment une base d'ouverts de cette topologie.

3. Déterminer l'adhérence de $]a, b]$.

4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour cette topologie.

5. Montrer que cette topologie n'est pas métrisable (*indication: montrer qu'il n'existe pas de base dénombrable d'ouverts et penser à la question précédente*).

6. On note $\mathcal{T}_{\liminf}$ la topologie sur $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty,a[$ et $[b,+\infty[$. Montrer que la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est l'intersection de $\mathcal{T}_{\limsup}$ et $\mathcal{T}_{\liminf}$.

5. Topologie quotient.

Soit $(E_i,\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et F un espace. On se donne une famille d'applications:

$$f_i : \quad (E_i,\mathcal{T}_i) \to F.$$

1. Montrer qu'on définit bien une topologie $\mathcal{T}_F$ sur F par $\omega \in \mathcal{T}_F$ est ouvert ssi $f_i^{-1}(\omega)$ est un ouvert de $(E_i,\mathcal{T}_i)$, pour tout $i \in I$. Il s'agit de la *topologie finale.*

Un exemple: Soit (X_i) une famille d'espaces topologiques. On note $\coprod_i X_i := \{(x,i) \in \cup_i X_i \times I,\, x \in X_i\}$. On appelle topologie *somme disjointe* la topologie finale sur $\coprod_i X_i$ associée aux inclusions canoniques de X_i dans X.

2. On se donne maintenant un ensemble topologique E et une relation d'équivalence sur E, notée $\mathcal{R}$. On peut définir un ensemble quotient $F := E/\mathcal{R}$, i.e. l'ensemble des classes d'équivalences pour $\mathcal{R}$) et on peut définir l'application canonique $\pi : E \to F$ qui a un élément de E associe sa classe d'équivalence. On munit alors F de la topologie finale associée à π. Il s'agit de la *topologie quotient.*

• Méditer sur ces deux exemples:

a. Soit X un espace topologique. Le **cône sur** X est l'espace topologique quotient $C(X) := (X\times[0,1])/\big((x,1) \sim (y,1)\big)$.

b. Soit X, Y deux espaces topologiques, A une partie non-vide de X et $f : A \to Y$, une application continue. Le **recollement de X sur Y par f** est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y := (X \coprod Y)/\big(x \sim f(x),\, x \in A\big).$$

• Vérifier qu'une application $f : E/\mathcal{R} \to (G,\mathcal{T}_G)$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : E \to (G,\mathcal{T}_G)$ est continue.

• Montrer qu'il existe un unique (à homéomorphisme près) espace topologique $\widetilde{E}$ et application continue $p : E \to \widetilde{E}$, constante sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{R}$, tels que pour toute application continue $f : E \to Y$ qui est constante sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{R}$, il existe une unique application continue $\tilde{f} : \widetilde{E} \to Y$ qui relève f, c'est à dire telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$. Une telle fonction $\tilde{f}$ est appelée un *relèvement* (ou *relevé*) de f.

• Soit E un espace muni d'une semi-distance δ. On note $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie par $x\mathcal{R}y$ ssi $d(x,y) = 0$. Vérifier que $E/\mathcal{R}$ muni de la topologie quotient est métrisable.

3. Soit A une partie de E, on définie le saturé de A par $\mathcal{R}$ par:

$$\mathcal{R}A := \pi^{-1}\left(\cup_{a\in A}\pi(a)\right).$$

On dit que A est saturé si $A = \mathcal{R}A$. Montrer que l'espace topologique F est séparé si et seulement si pour tout $a, b \in E$ tels que $\pi(a) \neq \pi(b)$, il existe deux ouverts saturés disjoints contenant a et b respectivement.

4. Donner un exemple d'espace séparé X et de relation $\mathcal{R}$ tels que $X/\mathcal{R}$ soit muni de la topologie grossière. Donner un exemple d'espace non-séparé tel que $X/\mathcal{R}$ soit séparé.

6. Feuilletages linéaires sur le tore

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ de la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Z}^2$. On note $\mathbb{T}^2$ l'espace topologique quotient[1] $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$. On note $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ la projection canonique. Pourquoi $\mathbb{T}^2$ est-il séparé?

1. Soit D_α une droite de pente $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, $\pi(D_\alpha)$ est homéomorphe à un espace topologique bien connu. Montrer que dans le cas contraire $\pi(D_\alpha)$ est dense dans $\mathbb{T}^2$ et que $\pi_{|D_\alpha} : D_\alpha \to \pi(D_\alpha)$ est une bijection continue. Est-ce un homéomorphisme ?

2. On fixe maintenant $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et on munit $\mathbb{T}^2$ de la relation $[x]\mathcal{R}'[y]$ si et seulement si il existe une droite de pente α dans $\mathbb{R}^2$ telle que $[x]$ et $[y]$ sont dans $\pi(D)$. Montrer que $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence. L'espace quotient $\mathbb{T}^2/\mathcal{R}'$ est-il séparé ? Identifier la topologie sur $\mathbb{T}^2/\mathcal{R}'$.

7. Ensembles dérivés successifs.

Soit A une partie d'un espace topologique X. Un *point d'accumulation* de A est un point $x \in A$ qui est dans l'adhérence de $A \setminus \{x\}$. L'ensemble des points d'accumulation de A est appelé *ensemble dérivé* de A et noté A'. L'ensemble dérivé de l'ensemble dérivé de A est noté A". Etc.

Combien la suite $A,\ A'\ A'',\ A'''\ \ldots$ peut-elle contenir de termes deux à deux distincts ?

8. Théorème de Cantor-Bendixon

Soit A une partie d'un espace topologique X. On dit qu'un point $x \in X$ est un point de condensation de A si, pour tout voisinage V de x, l'intersection $V \cap A$ est non-dénombrable. On note A^* l'ensemble des points de condensation de A.

1. Si X admet une base dénombrable d'ouverts, montrer que $A \setminus A^*$ est dénombrable. En déduire que $A^* = A^{**}$.

2. En déduire le théorème de Cantor-Bendixon : tout espace topologique à base dénombrable d'ouverts s'écrit comme la réunion disjointe de deux sous-ensembles X_1 et X_2, où X_1 est fermé sans point isolé et X_2 est dénombrable.

9. Quelques questions de continuité.

1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, tel que pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle, f soit continue. Déterminer $\mathcal{T}$.

2. Quels sont les points de continuité d'une fonction caractéristique $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ pour A une partie d'un espace topologique X et $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle ? Donner un exemple où χ_A est continue sur X entier et un exemple où χ_A n'est continue en aucun point.

3. Soient X et Y des espaces topologiques. Montrer que $f : X \to Y$ est continue si et seulement si pour toute partie B de Y, $\partial(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\partial B)$. Que se passe-t-il si on considère l'adhérence à la place de la frontière ?

4. On munit $\mathbb{N}$ de la topologie dont les fermés sont les ensembles finis. A quelle condition une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est-elle continue ?

5. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Expliquer ou rappeler pourquoi une forme linéaire sur E est continue si et seulement s'il existe une boule ouverte sur laquelle elle est bornée. En déduire qu'une forme linéaire sur E est continue si et seulement si son noyau est fermé. On pourra même montrer que le noyau d'une forme linéaire non continue est dense dans E.

[1] c'est en fait le quotient par les classes déquivalence de l'action naturelle du *groupe topologique* $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ que l'on note en général simplement $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

6. Soient f et g deux fonctions continues sur un espace topologique X et à valeurs dans un espace topologique séparé Y.

a) Vérifier que l'ensemble $\{x \in X/\ f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X.

b) Montrer que si $D \subset X$ est une partie dense et $f_{|D} = g_{|D}$, alors $f = g$. Exhiber un contre-exemple élémentaire (avec Y non-séparé bien sur).

c) Montrer que le graphe de f est fermé dans $X \times Y$ (on munit $X \times Y$ de la topologie engendrée par les ensembles $O_1 \times O_2$, avec O_1 ouvert de X et O_2 ouvert de Y). Que pouvez-vous dire de la réciproque ? Que se passe-t-il si on retire l'hypothèse de séparation sur Y ?

d) On suppose que f est en plus injective. Montrer que X est séparé.

10. Problème de Kuratowski.

Soit A un partie d'un espace topologique X. On considère la suite de parties de X :

$$A,\ \overline{A},\ \mathring{A},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}},\ \mathring{\overline{\mathring{A}}},\ \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}},\ \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}},\ \text{etc.}$$

Combien de termes de cette suite peuvent-ils être deux à deux distincts ?

11. Bouquets de cercles

On considère les espaces topologiques suivants :

1. A est l'espace topologique obtenu comme quotient de $\mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle) par le sous-ensemble $\mathbb{Z}$ (attention, il ne s'agit pas du groupe topologique $\mathbb{R}$ par son sous-groupe $\mathbb{Z}$; il s'agit du quotient de l'espace topologique $\mathbb{R}$ par son sous-ensemble $\mathbb{Z}$) ;
2. B est l'espace topologique quotient du cercle unité S^1 par son sous-ensemble $\{1\} \cup \{\exp(2i\pi/n),\ n \in \mathbb{N}^*\})$;
3. R_1 est le sous-espaces du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ donné par la réunion des cercles de rayon $n \in \mathbb{N}$ et tangents en $(0,0)$ à l'axe $y = 0$;
4. R_2 est le sous-espaces du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ donné par la réunion des cercles de rayon $1/n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et tangents en $(0,0)$ à l'axe $x = 0$;
5. $\bigvee_{\mathbb{Z}} S^1$ est l'espace topologique donné par le recollement[2] de $X = \coprod_{\mathbb{Z}} S^1$ sur le point $Y = \{pt\}$ par l'unique application $f : F \to \{pt\}$ où $F = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \{x_n\}$ est une réunion de points (on choisit exactement un point par cercle).

Dire lesquels de ces espaces sont homéomorphes entre eux.

[2] La définition est donnée dans l'exercice **5**.