École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Feuille d'exercices n°3

---

1. Sur l'espace des fonctions continues à décroissance rapide.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continue de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_k := \sup_{x\in\mathbb{R}} [(1+|x|)^k |f(x)|] < +\infty.$$

1. On pose

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \min(1, \|f-g\|_k).$$

Vérifier que cela définit bien une distance sur E, et que E muni de cette distance est complet.

Le but de cet exercice est de démontrer que E n'est pas normable. Pour cela, on suppose qu'il existe une norme telle que pour toute suite (f_n) de E,

$$\|f_n - f\| \to 0 \Longleftrightarrow d(f_n, f) \to 0.$$

2. Montrer qu'il existe une constante $C_k > 0$ telle que:

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_k \leq C_k \|f\|.$$

3. Montrer qu'il existe une constante $\eta > 0$ telle que:

$$\forall f \in E, \quad d(f,0) \leq \eta \Longrightarrow \|f\| \leq 1.$$

En déduire qu'il existe une constante $\eta' > 0$ et un indice k_0 tel que:

$$\forall f \in E, \quad \|f\| \leq \frac{1}{\eta'} \|f\|_{k_0}.$$

4. Pour $\lambda(n) \geq 1$, on considère la suite de terme général

$$u_n(x) = \frac{\eta' 2^{-n}}{(1+|x|)^{k_0}} e^{-x^2/\lambda(n)^2}.$$

Commencer par vérifier que $u_n \in E$. Montrer ensuite que $\|u_n\| \leq 2^{-n}$. Trouver $\lambda(n)$ tel que cette suite ne converge pas vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_{k_0+1}$, et conclure.

2. Sur la topologie "boite".

On munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la topologie dont une base est donnée par les ensembles produits de la forme $\prod_{k=0}^{+\infty} U_k$, où U_k est un ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Caractériser les suites convergentes pour cette topologie.

2. On définit la suite δ^n de terme général $\delta^n_k := \begin{cases} 1 & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Considérons l'ensemble:

$$E = \left\{ \frac{1}{n}\delta^0 + x\delta^n,\ n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Montrer que $0 \in \overline{E}$, mais qu'aucune suite de E ne converge vers 0. En déduire que cette topologie n'est pas métrisable.

3. Sur les topologies de Schwartz et de Whitney.

Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et C^∞ à support compact. On peut définir deux topologies sur cet espace en se donnant des éléments d'une base:

- La topologie de Schwartz est définie en prenant pour base les ensembles:

$$B_s(f,\epsilon) = \left\{ g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), |f^{(\alpha)}(x) - g^{(\alpha)}(x)| < \epsilon(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha(x) \in \mathbb{N} \text{ tel que } |\alpha(x)| \leq \frac{1}{\epsilon(x)} \right\},$$

  où $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et ϵ est une fonction continue strictement positive tendant vers 0 à l'infini (noté $\epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ par la suite).

- La topologie de Whitney est définie en prenant pour base les ensembles:

$$B_w(f,\epsilon,m) = \left\{ g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), |f^{(\alpha)}(x) - g^{(\alpha)}(x)| < \epsilon(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{N} \text{ tel que } |\alpha| \leq m \right\}.$$

  où $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\epsilon \in C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et $\in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la topologie de Schwartz est plus fine que celle de Whitney. Qu'en déduire pour la convergence de suites pour ces topologies?

2. On veut à présent démontrer que la topologie de Schwartz est en fait strictement plus fine que celle de Whitney. Considérons la fonction $\epsilon(x) := \frac{1}{2+|x|}$. On souhaite voir que $\forall \epsilon^* \in C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $B_w(0,\epsilon^*,m) \not\subseteq B_s(0,\epsilon)$. Pour cela fixons ϵ^* et m et considérons la fonction ϕ_n définie par:

$$\phi_n(x) := \frac{\sin(n(x-m))\Psi(x)}{n^{m+1/2}},$$

où Ψ est une fonction C^∞ telle que $\Psi \equiv 1$ sur $\overline{B}(m, 1/2)$ et $\Psi \equiv 0$ en dehors de $\overline{B}(m,1)$ (une telle fonction peut être construite à partir de la fonction φ égale à 0 sur $]-\infty, 0]$ et définie par $t \mapsto e^{-1/t}$ sur $[0,+\infty[$, pourquoi ?).

- Vérifier qu'il existe n_0 assez grand tel que pour tout $n \geq n_0$, ϕ_n est dans $B_w(0,\epsilon^*,m)$.
- Montrer qu'en revanche, $\exists n \geq n_0$, tel que ϕ_n n'appartient pas à $B_s(0,\epsilon)$.

3. On souhaite montrer le fait remarquable que ces deux topologies définissent les mêmes suites convergentes. On va démontrer pour commencer que si une suite (f_n) converge vers une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour la topologie de Whitney, alors il existe $R > 0$ tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ supp(f_n) \subset B(0,R), \text{ et } supp(f) \subset B(0,R),$$

où $supp(\cdot)$ désigne le support de la fonction en question.

On raisonne par l'absurde en supposant que les (f_n) n'ont pas de support commun.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe x_n n'appartenant pas $B(0,n)$ et $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ tels que $f_{\varphi(n)}(x_n) \neq 0$ et $(\varphi(n))$ est une suite croissante.
- Montrer qu'il existe une suite croissante $(\psi(n))$ d'entiers telle que $|x_{\Psi(n+1)}| - |x_{\Psi(n)}| > 1$.
- Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f_{\varphi(\Psi(n))}(x_{\Psi(n)}) = 0$. Conclure, en considérant une fonction $\epsilon_1 \in C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\epsilon_1(x_{\Psi(n)}) = \frac{|f_{\varphi(\Psi(n))}(x_{\Psi(n)})|}{2}.$$

4. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(\alpha)})$ converge uniformément sur $\overline{B}(0,R)$ vers $f^{(\alpha)}$.

5. En déduire que (f_n) converge vers f pour la topologie de Schwartz. En déduire qu'au moins une des deux topologies n'est pas métrisable.

6. On va en fait maintenant montrer que les deux topologies ne sont pas métrisables. On introduit les ensembles suivants:

$$E = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ supp(f) \subset \overline{B}(0,1) \text{ et } \forall x \in B(0,1),\ f(x) > 0\},$$

et étant donné $\phi \in E$, on pose:

$$\mathcal{E} = \left\{ x \mapsto f(x) + \lambda\phi\left(x - \frac{1}{f(0)}\right),\ f \in E, \lambda > 0 \right\}.$$

Montrer que $0 \in \overline{\mathcal{E}}$ pour la topologie de Schwartz (et donc pour celle de Whitney).

7. Démontrer qu'en revanche aucune suite de $\mathcal{E}$ ne peut converger vers 0. Conclure.

4. Espaces $C^k(\Omega)$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On munit $C^k(\Omega)$ (ensemble des fonctions k-fois différentiables avec différentielle $k^{\text{iéme}}$ continue), des semi-normes $\|\cdot\|_{m,K}$ pour tout $m \leq k$ (quelconque si $k = \infty$) et pour tout compact $K \subset \Omega$, où

$$\|\phi\|_{m,K} = \sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} \|D^\alpha \phi\|_{C^0(K)}.$$

1. Montrer qu'il existe une suite de compacts (K_n) de Ω telle que $\cup_n K_n = \Omega$ et $K_n \subset Int(K_{n+1})$.

En déduire que la topologie $\mathcal{T}$ ainsi induite sur $C^k(\Omega)$ en fait un espace métrique complet. On note d la distance associée.

2. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $f \in C^k(\Omega)$ non nulle telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda f, 0) < \epsilon$.

3. En déduire que $\mathcal{T}$ n'est pas normable.

4. Montrer à l'aide du lemme de Baire que l'espace des fonctions continues à support compact $C_c^0(\Omega)$, muni de la topologie induite par les normes $\|\cdot\|_{0,K}$ pour K compact de Ω, est un espace métrisable qui n'est pas complet.