École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Feuille d'exercices n°4

---

1. Théorème de Hewitt

Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que (X, d) est compact si et seulement si et seulement il n'existe pas de fonction continue non bornée de X dans $\mathbb{R}$ (*On pourra penser au théorème de Tietze et Urysohn*).

2. Exemples d'espaces complets ou non

Les espaces suivant sont-ils complets ? Si non pouvez-vous en décrire un complété ?

1. L'espace $\mathcal{P}_n$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n sur $[0, 1]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{[0,1]} |P(t)|$.

2. L'espace $\mathcal{P} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{[0,1]} |P(t)|$.

3. L'espace $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

4. L'espace $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$.

5. L'espace $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni la norme $\|f\|_d = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$?

6. L'espace $E = C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact, muni de la norme $\|f\|_\infty$.

3. Espaces de Hölder.

Considérons X un espace métrique compact. Pour $\alpha \in]0, 1]$, on introduit l'espace $C^\alpha(X, \mathbb{R})$ des fonctions hölderiennes d'indice α de X comme l'ensemble des fonctions telles que

$$\|f\|_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{(x,y)\in X^2, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha} < +\infty.$$

(On retrouve en particulier les fonctions lipschitziennes pour $\alpha = 1$.)

Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_\alpha$ munit $C^\alpha(X, \mathbb{R})$ d'une structure d'espace de Banach.

4. Complétude et topologie

Donner deux distances d et d' sur un même ensemble X, qui définissent la même topologie sur X, telles que (X, d) est complet, mais pas (X, d').

5. Espaces complets et applications uniformément continues

Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces métriques.

1. Montrer que, si f est uniformément continue, l'image d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy. Qu'en est-il de la réciproque ?

2. Supposons que f est un homéomorphisme uniformément continue. Si Y est complet, montre que X l'est aussi.

6. Une petite amélioration du théorème du point fixe contractant

Soit f une application continue d'un espace métrique complet dans lui-même telle que f^p soit contractante pour un certain p. Montrer que f possède un unique point fixe.

7. Une équation fonctionnelle

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une application continue non identique à 1 ou α. En considérant l'application $T : C([0,1];\mathbb{R}) \to C([0,1];\mathbb{R})$ donnée par

$$(Tf)(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(y))dy,$$

montrer qu'il existe une unique solution $f \in C^1([0,1];\mathbb{R})$ de l'équation fonctionnelle (et non pas différentielle) suivante :

$$f(0) = \alpha \text{ et } f'(x) = f(\varphi(x)).$$

8. Théorème d'Alexandroff

Soit (X,d) un espace métrique complet et soit Y un G_δ de X. Autrement dit, on peut écrire $X \setminus Y = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, où chaque F_n est fermé. Montrer qu'il existe une distance δ sur Y telle que (Y,δ) est complet et d et δ engendrent la même topologie sur X.

9. Lemme d'Ekeland et applications

Soit (E,d) un espace métrique complet et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$, semi-continue inférieurement et minorée. Soit $\epsilon > 0$ et $a \in E$. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et une suite (E_n) de parties de E de la façon suivante:

- On pose $x_0 = a$ et $E_0 = E$.
- Etant donnés $(x_k)_{k\le n}$ et $(E_k)_{k\le n}$, on pose:

$$E_{n+1} := \{y \in E,\ f(y) \le f(x_n) - \epsilon\, d(x_n, y)\},$$

et on considère $x_{n+1} \in E_{n+1}$ tel que:

$$f(x_{n+1}) - \inf_{E_{n+1}} f \le \frac{1}{2}\left(f(x_n) - \inf_{E_{n+1}} f\right).$$

1. Vérifier que cette définition fait sens, puis que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x \in E$.

2. Montrer que:

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n = \{x\},$$

puis que pour tout $y \in E$,

$$f(y) \ge f(x) - \epsilon\, d(x,y).$$

Interpréter ce résultat, qui constitue le *lemme d'Ekeland.*

3. En conservant les mêmes notations, soit φ une application de E dans E telle que pour tout $x \in E$,

$$d(x, \varphi(x)) \le f(x) - f(\varphi(x)).$$

Montrer que φ admet un point fixe (*Théorème de Caristi*).

4. Supposons à présent que E soit un convexe fermé d'une espace de Banach de norme $\|\cdot\|$. Soit φ une application continue de E dans E telle qu'il existe $k \in]0,1[$, tel que pour tout $x \in E$,

$$\exists t \in]0,1[, \quad \|\varphi(x) - \varphi(x_t)\| \le k\|x - x_t\|,$$

où $x_t = (1-t)x + t\varphi(x)$. Montrer que φ admet un point fixe (*Théorème de Clarke*).

(*Indication: appliquer le lemme d'Ekeland à $g : x \mapsto \|x - \varphi(x)\|$, avec ϵ bien choisi.*)

10. Ensemble de Cantor, courbes de Peano et escalier du diable.

On considère $A = \{0, 2\}$ (muni de la topologie discrète) et l'application

$$\varphi : \begin{cases} A^{\mathbb{N}} \to [0,1], \\ (a_i) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^{i+1}}. \end{cases}$$

On appelle ensemble de Cantor l'image de φ que l'on note C. On munira $A^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit et C de la topologie induite par $\mathbb{R}$.

1. Montrer que φ détermine un homéomorphisme entre $A^{\mathbb{N}}$ et C.

2. Montrer que $A^{\mathbb{N}}$ est homéomorphe à $\underbrace{A^{\mathbb{N}} \times \cdots \times A^{\mathbb{N}}}_{\text{k fois}}$, quel que soit $k \geq 1$.

3. Déterminer une surjection continue de $A^{\mathbb{N}}$ vers $[0,1]$.

4. Conclure qu'il existe une application continue de $[0,1]$ dans $[0,1]^k$, surjective. Autrement dit, il existe des courbes (dites *de Peano*), remplissant le cube de dimension k. Une telle application peut-elle être un homéomorphisme ?

On note $E = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$. Soit $T : E \to E$ l'application définie par

$$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(3x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{1}{2}(1 + f(3x-2)) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases}$$

5. Vérifier que T est bien définie et $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.

6. Soit ϕ l'unique point fixe de T. Montrer que ϕ est dérivable, de dérivée nulle, sur le complémentaire de l'ensemble triadique de Cantor.

On a donc "construit" une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, telle que $\phi(1) - \phi(0) = 1$, mais telle que ϕ' est définie et nulle presque partout !

11. Quelques applications du théorème de Baire

1. Soit X un espace métrique complet et Y un espace métrique. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de X dans Y convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que f est continue sur un G_δ dense de X.

Indication: on pourra considérer les ensembles:

$$F_{n,p,q} = \left\{ x \in X,\ d(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{n+1} \right\}, \quad F_{n,p} = \cap_{q \geq p} F_{n,p,q},$$

puis étudier $F_n = \cup_p F_{n,p}$, puis montrer que $G_n = \cup_n Int(F_{n,p})$ est dense dans X, puis considérer $\cap_n G_n$...

2. En déduire que si f est une fonction continue dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, alors f' est continue sur un G_δ dense de $[0,1]$.

3. Démontrer l'existence de fonctions continues et nulle part dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Indication: on pourra considérer les ensembles:

$$F_n = \left\{ f \in C([0,1],\mathbb{R}),\ \exists x \in [0, 1 - \frac{1}{n+1}],\ \forall h \in]0, 1/(n+1)],\ \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq n \right\},$$

et montrer que F_n est un fermé d'intérieur vide...

12. Espace des suites périodiques

Soit ℓ^∞ l'espace des suites bornées, munies de la norme sup. Soit E le sous-espace de ℓ^∞ composé des suites périodiques. On considère l'endomorphisme T de E défini par:

$$T : (u_0, u_1, u_2, \dots) \mapsto (0, \frac{u_0+1}{2}, 0, \frac{u_1+1}{2}, \dots).$$

Montrer que cet opérateur est strictement contractant et en déduire que E n'est pas fermé.

13. Distance de Hausdorff et complétude.

Soit E un espace métrique. On notera $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des compacts non vides de E. Montrer que si E est complet, alors $\mathcal{K}(E)$, muni de la distance de Hausdorff l'est aussi.

(*Indication: pour une suite* (A_n) *dans* $\mathcal{K}(E)$*, considérer l'ensemble*

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{p>n} A_p}.\Big)$$

La réciproque est-elle vraie ?

14. À propos des valeurs d'adhérence.

1. Montrer que si une suite numérique (u_n) est telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est connexe. Est-ce encore vrai pour une suite complexe ?

2. Soit f une fonction continue de $]0,1]$ dans un espace topologique X. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $f(x)$ quand x tend vers 0 est-il nécessairement connexe ?

15. Complétude des topologies de Schwartz et Whitney.

Montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, muni de la topologie de Schwartz (ou de Whitney)[1] est complet.

[1] Voir la feuille précédente pour les définitions