École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Feuille d'exercices n°5

---

1. Compacité et normalité

1. Montrer qu'un espace compact est normal.

2. Soit A et B des compacts de deux espaces topologiques X et Y, et Ω un ouvert du produit $X \times Y$ contenant $A \times B$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de X et Y tels que $A \times B \subset U \times V \subset \Omega$.

2. Compacité et séparabilité

1. Montrer qu'un espace métrique compact est séparable.

2. En déduire qu'un espace métrique compact est homéomorphe à une partie de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (muni de la topologie produit comme il se doit).

3. Considérer l'espace $X = [0,1] \times \{0\} \cup [0,1] \times \{1\}$, muni de la topologie engendrée par les $\{(x,1)\}$ et les parties de la forme $U \times \{0\} \cup U \times \{1\} \setminus \{(x,1)\}$, où U est un ouvert de $[0,1]$ (muni de la topologie usuelle), contenant x. L'espace topologique X est-il compact ? Séparable ? Qu'en déduire ?

3. Changement de topologie sur un espace compact

Soit X un espace topologique compact. Montrer qu'il n'existe pas de topologie qui soit strictement plus fine ou strictement moins fine que celle de X, et qui rende encore ce dernier compact.

4. Idéaux maximaux de $C(K, \mathbb{R})$

Soit K un espace compact; déterminer les idéaux maximaux de $C(K, \mathbb{R})$.

5. Un théorème de dynamique topologique

Le but de cet exercice est de montrer un théorème dû à Birkhoff: soit (K,d) un espace métrique compact et T une application continue de K dans K. Alors il existe $x \in K$ et une suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers naturels tels que:

$$T^{\varphi(n)}(x) \to_{n\to+\infty} x.$$

1. Montrer l'existence d'un fermé F non vide de K, stable par T et minimal au sens de l'inclusion.

2. Conclure. On pourra penser à regarder l'ensemble $F_k = \overline{\{T^n(x),\, n \geq k\}}$, pour $x \in F$.

6. Exemples de parties compactes d'espaces de suites.

1. (Cube de Hilbert) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que

$$C_a = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que } |u_n| \leq a_n \text{ pour tout } n\}$$

est un sous-ensemble compact de $l^\infty(\mathbb{N})$.

2. Montrer que

$$C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que } u_n \to 0 \text{ quand } n \to \infty\}$$

n'est pas un sous-ensemble compact de $l^\infty(\mathbb{N})$.

3. On considère l'espace $(\ell^2(\mathbb{N}), \|.\|_2)$ des suites réelles $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de carré sommable, muni de la norme $\|a\|_2 = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2)^{1/2}$. On note

$$B := \left\{ a \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} (1+n^2)|a_n|^2 \leq 1 \right\}.$$

Montrer que B est une partie compacte de $\ell^2(\mathbb{N})$.

7. Familles de fonction relativement compactes ou non.

1. Dans $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme du sup, on considère pour $k \geq 0$, l'espace F des fonctions C^1 avec $\|f'\|_\infty \leq k$ et $f(0) = 0$. F est-il relativement compact dans E? compact?

2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(t) = f(nt)$. Montrer que la famille de fonctions $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compacte dans $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme du sup si et seulement si f est constante. Qu'en est-il avec la famille $\{g_n \in E \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ où $g_n(t) = f(t/n)$?

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$. Montrer que la famille de fonctions $F = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue sur $\mathbb{R}$. Est-elle relativement compacte (pour la norme du sup)?

8. Opérateurs à noyaux continus.

On note $E = C([0,1],\mathbb{C})$ que l'on munit de la norme du sup. Pour $k : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ continue et $f \in E$, on pose

$$K(f)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$$

(k s'appelle le noyau de K).

1. Vérifier que K définit une application linéaire continue de E dans E.

2. Montrer que l'image par K de $\overline{B}_E(0,1)$, la boule unité fermée de E, est relativement compacte dans E. (On dit que K est un opérateur compact.)

3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $E_\lambda = \ker(K - \lambda \mathrm{Id})$. Montrer que E_λ est de dimension finie si $\lambda \neq 0$.

9. Complémentaire d'un compact dans un espace vectoriel normé de dimension infinie

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie, et soit K une partie compacte de E. Montrer que $E \setminus K$ a exactement une composante connexe non bornée, puis qu'il est connexe.

10. Distance de Hausdorff : l'espace des compacts est compacts.

Soit (X,d) un espace métrique compact non vide. On note $\mathcal{F} = \{\text{parties fermées non vides de X}\}$. Pour $A \in \mathcal{F}$, on pose $\phi(A) : X \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(A)(x) = d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a).$$

Pour $A, B \in \mathcal{F}$, on note $\delta(A,B) = \|\phi(A) - \phi(B)\|_\infty = \sup_{x\in X} |\phi(A)(x) - \phi(B)(x)|$.

1. Se rappeler (cf TD 1) que δ est une distance sur $\mathcal{F}$ (appelée distance de Hausdorff).

2. On suppose que $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite de $\mathcal{F}$ telle que $\phi(A_n) \to f$ uniformément sur X, quand $n \to +\infty$, pour une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ continue. On note $A = f^{-1}(\{0\})$.

a) Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe $a_n \in A_n$ avec $\phi(A_n)(x) = d(x,a_n)$. En déduire qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) = f(x)$.

b) Montrer que f est 1-lipschitzienne, et en déduire que $f \leq \phi(A)$.

c) Conclure que $f = \phi(A)$.

3. En déduire, à l'aide du théorème d'Ascoli, que $(\mathcal{F}, \delta)$ est compact.

11. Un théorème de point fixe de Kakutani

Le but de cet exercice est de démontrer un résultat dû à Kakutani: soit E un evn, K un compact convexe non vide de E et $(T_i)_{i \in I}$ une famille commutative d'applications affines continues de E, stabilisant K. Alors il existe un point fixe commun à tous les T_i.

1. Montrer le résultat si la famille est réduite à un seul élément.

2. Montrer le résultat pour un nombre fini d'éléments.

3. Conclure.

12. Une suite ayant une valeur d'adhérence mais pas de sous-suite convergente

Soit $E = [0,1]^{[0,1]}$ l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans lui-même, muni de la topologie produit. Pour $n+1$ rationnels distincts $q_0, \ldots, q_n$ dans $[0,1]$, classés dans l'ordre croissant et satisfaisant $q_0 = 0$ et $q_n = 1$, on associe l'application $f_{q_0,\ldots,q_n}$ de $[0,1]$ dans lui-même selon les règles suivantes :

- l'application $f_{q_0,\ldots,q_n}$ est continue sur $[0,1]$,
- l'application $f_{q_0,\ldots,q_n}$ est affine sur chaque $[q_k, \frac{q_k+q_{k+1}}{2}]$ et chaque $[\frac{q_k+q_{k+1}}{2}, q_{k+1}]$,
- pour chaque k, $f_{q_0,\ldots,q_n}(q_k) = 0$ et $f_{q_0,\ldots,q_n}(\frac{q_k+q_{k+1}}{2}) = 1$.

1. Soit A l'ensemble des $f_{q_0,\ldots,q_n}$ pour n dans $\mathbb{N} - \{0\}$ et les q_k comme décrits ci-dessus. Montrer que A est dénombrable ; on le représentera par une suite (x_n) d'élements de E. Montrer que 0 est une valeur d'adhérence de (x_n).

2. La suite (x_n) admet-elle une sous-suite qui converge vers 0 ?

13. Topologie compacte-ouverte

Soient X, Y deux espaces topologiques. On note Y^X l'espace topologique des fonctions *continues* de X dans Y, muni de la topologie engendrée par les ensembles $\widetilde{U^K} = \{f : X \to Y\,,\, f(K) \subset U\}$ pour tous $U \subset Y$ ouvert et $K \subset X$ compact.

1. Vérifier que, si Y est métrique, la topologie compacte-ouverte est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

2. Montrer que Y^X est séparé dès lors que Y l'est.

3. On suppose maintenant X localement compact.

a. (*évaluation*) Montrer que l'application d'évaluation $ev : X \times Y^X \to Y$ définie par $ev(x,f) = f(x)$ est continue.

b. (*adjonction*) A toute application continue $f : X \times Y \to Z$, on associe l'application $\tilde{f} : Y \to Z^X$ définie, pour tout $y \in Y$, par $\tilde{f}_y = f(-,y)$. Vérifier que $\tilde{f}_y$ est bien dans Z^X.

c. (*loi exponentielle et composition*) On suppose que Y est séparé. Montrer que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ induit un homéomorphisme $Z^{X \times Y} \cong (Z^X)^Y$. Montrer que la composition $(f,g) \mapsto g \circ f$ induit une application continue $c : X^Y \times Z^X \to Z^Y$.

d. Montrer que l'appplication qui à $(f,g) \in Y^X \times Z^X$ associe l'application $x \mapsto (f(x), g(x))$ induit un homéomorphisme $Y^X \times Z^X \cong (Y \times Z)^X$.

4. Donner des contre-exemples au propriétés montrées dans la question précédente lorsque X n'est pas localement compact.

14. Trois compactifications du plan euclidien.

Dans cet exercice on va étudier trois compactifications du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Rappelons qu'une compactification d'un espace topologique X est la donnée d'un espace topologique compact Y et d'une application continue $i : X \to Y$ tels que

- $i(X)$ est dense dans Y,
- i est un plongement, c'est-à-dire un homéomorphisme de X sur $i(X)$ où $i(X)$ est muni de la topologie de sous-espace.

1. (*La sphère*) Soit $S^2 = \{(x,y,z)/\ x^2+y^2+z^2=1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ On appelle pôle nord le point N de coordonnées $(0,0,1)$. Soit $i : \mathbb{R}^2 \to S^2$ l'application qui associe au point de coordonnées (x,y) le point P de la sphère tel que la droite reliant P au pôle nord passe par $(x,y,0)$. Montrer que (S^2, i) est une compactification de $\mathbb{R}^2$, qui est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff du plan. A quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers le pôle nord ?

2. (*La demi-sphère*) Soit $S^2_+ = \{(x,y,z)/\ x^2+y^2+z^2=1 \text{ et } z \geqslant 0\}$ l'hémisphère supérieur de la boule unité de $\mathbb{R}^3$. On note $i : \mathbb{R}^2 \to S^2_+$ l'application qui associe au point de coordonnées (x,y) le point de S^2_+ sur la droite reliant $(1,x,y)$ à l'origine de $\mathbb{R}^3$. Vérifier qu'il s'agit d'une compactification de $\mathbb{R}^2$ et dire à quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers le point $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ de S^2_+?

3. (*Le plan projectif*) Le plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$. Expliquer pourquoi $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est le quotient de la sphère S^2 par la relation d'antipodie, c'est-à-dire la relation qui identifie $x \in S^2$ à $-x$ et montrer que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est compact. En déduire que l'application i de $\mathbb{R}^2$ dans le plan projectif qui associe au point de coordonnées (x,y) la droite vectorielle engendrée par $(x,y,1)$ est une compactification du plan. A quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$?

15. Compactification de Stone-Čech.

Soit X un espace métrique. On considère l'ensemble F des fonctions continues de X dans $[0,1]$, puis l'espace $T = \prod_{f\in F} [0,1]$, (muni de la topologie produit). Enfin on introduit l'application $\theta : X \to T$ et l'espace $\hat{X}$ définis par $\theta(x) = (f(x))_{f\in F}$ et $\hat{X} := \overline{\theta(X)}$ muni de la topologie induite.

1. Montrer que θ est continue.

2. Montrer que θ est injective.

3. Montrer que θ est ouverte et conclure que $(\hat{X}, \theta)$ est une compactification de X.

16. Théorème de Riesz (encore).

Montrer qu'un espace vectoriel topologique (i.e. un ev muni d'une topologie où les opérations d'ev sont continues) localement compact est nécessairement de dimension finie.