Feuille d'exercices n°6

---

1. Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (réel ou complexe) séparable et notons B sa boule unité fermée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B dense dans B. On note E' son dual topologique et B' la boule unité fermée:

$$B' := \{\varphi \in E', \forall x \in E, |\varphi(x)| \leq \|x\|\}.$$

1. Soit $X = [-1,1]^{\mathbb{N}}$ muni de la distance usuelle:

$$d(u,v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \min(1, |u_n - v_n|).$$

Montrer que l'application j de B' dans X, définie par $j(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, est continue, injective et a une image compacte.

2. En posant $\delta(\varphi, \Psi) = d(j(\varphi), j(\Psi))$, vérifier que (B', δ) est un espace métrique, puis en déduire que (B', δ) est compact.

3. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B' et φ un élément de B', montrer l'équivalence entre les propositions:
(i) $\phi_n(x) \to \phi(x), \quad \forall x \in E$,
(ii) $\delta(\phi_n, \phi) \to 0$.
Commenter.

2. Mesure invariante pour une application continue

On considère (K, d) un espace métrique compact muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}$. Soit T une application continue de K dans lui-même. On veut prouver le résultat suivant: il existe une mesure de probabilité sur $(K, \mathcal{B})$ telle que

$$\forall f \in C^0(K), \quad \int_K f\, d\mu = \int_K f \circ T\, d\mu.$$

(Cela s'écrit $T\mu = \mu$.)

On rappelle par ailleurs que d'après le théorème de représentation de Riesz, le dual de $C^0(K)$ est l'espace $\mathcal{M}(K)$ des mesures signées muni de la norme "variation totale". On note B' sa boule unité fermée.

1. Montrer que $C^0(K)$ est séparable.

On "rappelle" le théorème de Stone-Weierstrass: Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre unitaire de $C^0(K)$ séparant les points:

$$\forall x \neq y \in K, \quad \exists \varphi \in \mathcal{A}, \varphi(x) \neq \varphi(y),$$

et stable par conjugaison complexe. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $C^0(K)$.

2. Fixons $x_0 \in K$ et considérons la suite de mesures

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(x_0)},$$

où δ est la mesure de Dirac. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}(K)$ et une extraction $(\varphi(n))$ telles que

$$\forall f \in C^0(K), \quad \int_K f \, d\mu_{\varphi(n)} \to_{n \to +\infty} \int_K f \, d\mu.$$

3. Prouver que μ vérifie les propriétés souhaitées.

3. Théorème de récurrence de Poincaré

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré muni d'une mesure de probabilité μ. Soit T une application mesurable de X dans lui-même, préservant la mesure:

$$\forall A \in \mathcal{B}, \quad \mu(A) = \mu(T^{-1}A).$$

1. Montrer le théorème de récurrence de Poincaré: si A est un ensemble mesurable de X, alors μ-presque tout point x de A est récurrent au sens où

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists k \geq p, \quad T^k(x) \in A.$$

2. A l'aide de l'exercice précédent, en déduire une preuve alternative du théorème de Birkhoff (cf TD 5).