École Normale Supérieure – Année 2012-2013
T.D. de Topologie, Analyse et Calcul différentiel

Feuille d'exercices n°7

---

1. Le cas le plus facile du théorème de l'invariance du domaine

Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

2. Connexité et connexité par arcs

1. Rappeler un exemple d'espace connexe mais non connexe par arcs.

2. Soit X un espace topologique. Expliquer pourquoi il est possible de considérer des composantes "connexes par arcs". Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

(i) Toute composante connexe par arcs est ouverte.

(ii) Tout point admet un voisinage connexe par arcs.

3. En déduire que X est connexe par arcs si et seulement si il est connexe et tel que tout point de X admet un voisinage connexe par arcs. En déduire qu'un ouvert d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.

3. Connexité du groupe linéaire, du orthogonal, et du groupe spécial orthogonal

On munit $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$ de leurs topologies usuelles (induites par n'importe une norme quelconque). Les groupes linéaires, orthogonaux, et spéciaux orthogonaux $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{C})$ sont munis de la topologie induite.

1. Montrer que le plan complexe privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

2. Les espaces $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont-ils connexes ? Que peut-on dire avec $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}$?

4. Parties connexes de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

On considère que $\mathbb{Q}$ et son complémentaire sont munis de la topologie induite par leur inclusion dans $\mathbb{R}$.

1. Quelles sont les parties connexes de $\mathbb{Q}$ et de son complémentaire ?

2. Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?

5. Complémentaire d'un compact dans un espace vectoriel normé de dimension infinie

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie, et soit K une partie compacte de E. Montrer que $E \setminus K$ a exactement une composante connexe non bornée, puis qu'il est connexe.

6. Union et intersection de parties connexes

Soient A et B deux parties connexes d'un espace topologique X.

1. Montrer que si $A \cap \overline{B}$ n'est pas vide, alors $A \cup B$ est connexe. La conclusion reste-t-elle vraie si l'on suppose seulement que $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$?

2. Montrer que, si B rencontre A et le complémentaire de A, l'intersection de B avec la frontière de A est non vide.

7. Partie dont l'union et l'intersection sont connexes.

Soit X un espace topologique, A et B deux parties **fermées** de X telles que :

- $A \cup B$ est connexe,
- $A \cap B$ est connexe.

Le but de l'exercice est de montrer que A et B sont connexes. On suppose que A s'écrit comme la réunion disjointe de deux fermés F_1 et F_2 (de A).

1. Justifier que $F_1 \cap B$ et $F_2 \cap B$ sont des fermés de l'espace topologique $A \cap B$ pour la topologie induite et en déduire que $F_1 \cap B$ ou $F_2 \cap B$ est vide.

2. En déduire que $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$. Conclure.

3. Montrer que le résultat peut se révéler faux si on ne suppose pas A et B conjointement fermés.

8. Quelques remarques et propriétés de la topologie produit.

1. Montrer qu'un produit d'espaces connexes est connexe pour la topologie produit. Quelle réciproque peut-on énoncer de ce fait ?

2. Montrer qu'un produit d'espaces connexes par arcs est encore connexe par arcs.

3. Un produit d'espaces localement connexes est-il localement connexe ?

4. *La topologie boite (encore).* Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas connexe lorsqu'il est muni de la topologie boite.

9. Peignes

Considérons les peignes de $\mathbb{R}^2$:

$$P_1 = (\mathbb{R} \times \{1\}) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \times [0,1] \right) \quad \text{et}$$

$$P_2 = (R \times \{-1\}) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x + \sqrt{2}\} \times [-1,0] \right).$$

Montrer que $P_1 \cup P_2$ est connexe mais n'est pas connexe par arc.

10. Topologie cofinie.

Considérons un ensemble infini X, que l'on munit de la topologie cofinie, c'est-à-dire la topologie dont les ouverts sont l'ensemble vide et les ensembles de complémentaire fini[1].

1. Montrer que X est connexe, et même localement connexe.

2. Dans le cas où X est dénombrable, montrer que X n'est pas connexe par arcs.

3. Dans le cas X n'est pas dénombrable, et où l'on admet l'hypothèse du continu (tout ensemble non-dénombrable à au moins la puissance de $\mathbb{R}$), montrer que X est connexe par arcs, et même localement connexe par arcs.

11. Ordre lexicographique

On munit l'ensemble $[0,1]^2$ de l'ordre lexicographique : $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ si $x_1 < x_2$ ou si $x_1 = x_2$ et $y_1 < y_2$. Cet ordre définit une topologie sur $[0,1]^2$: celle engendrée par les intervalles du type $](x_1, y_1), (x_2, y_2)[$, du type $[(0,0), (x,y)[$, ou du type $](x,y), (1,1)]$. Montrer que $[0,1]^2$ muni de cette topologie est connexe, localement connexe, mais pas connexe par arcs.

---

[1] Voir l'exercice 2 de la feuille 2.

12. Il n'y a pas de version topologique du théorème de Cantor-Bernstein.

Rappelons que le théorème de Cantor Bernstein affirme qu'étant donnés deux ensembles A et B, si A s'injecte dans B et B s'injecte dans A, alors A et B sont en bijection.

On considère les ensembles

$$A =]0,1[\cup \{2\} \cup]3,4[\cup \{5\} \cup]6,7[\cup \dots$$
$$B =]0,1] \cup]3,4[\cup \{5\} \cup]6,7[\cup \{8\} \cup]9,10[\cup \dots$$

munis de la topologie induite par $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'un homéomorphisme envoie une composante connexe sur une composante connexe. En déduire que A et B ne sont pas homéomorphes.

2. Déterminer des bijections continues de A vers B et de B vers A. Conclure.