Feuille d'exercices n°8

1. Retour sur le cours

1. Se rappeler pourquoi tout Hilbert est réflexif, puis pourquoi tous les l^p pour $p \in]1, +\infty[$ également.

2. Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique. Montrer que si E' est séparable, alors E est séparable. La réciproque est-elle vraie?

2. Les espaces ℓ^1 et ℓ^∞

On note $\ell^1 := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \sum_{i\geq 0} |u_i| < \infty\}$ l'espace de suites de somme absolument convergente, et on note $\ell^\infty := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \sup_{i\geq 0} |u_i| < \infty\}$ l'espace des suites bornées (munis de leurs normes usuelles).

1. Se rappeler que ℓ^1, ℓ^∞ sont des espaces de Banach et que ℓ^1 est séparable. Se rappeler que ℓ^∞ est le dual topologique de ℓ^1.

2. Soit $\ell_0^\infty \subset \ell^\infty$ le sous-espace des suites telles que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que ℓ_0^∞ est un sous-espace fermé isomorphe à ℓ_l^∞, le sous-espace des suites u_n telles que $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe (c'est à dire les suites convergentes).

3. Montrer que ℓ^1 est isométrique au dual topologique de ℓ_0^∞.

4. Montrer que ℓ^1 n'est pas réflexif. (On pourra prolonger une forme linéaire définie sur ℓ_l^∞ à tout ℓ^∞).

3. Somme de deux sous-espaces fermés

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriel fermés de E. On suppose que $F_1 + F_2$ est également fermé. Montrer qu'il existe alors une constante C tel que, pour tout $z \in F_1 + F_1$, il existe $y_1 \in F_1$ et $y_2 \in F_2$ tels que $y_1 + y_2 = z$, $\|y_1\| \leq C\|z\|$ et $\|y_2\| \leq C\|z\|$.

4. Sous-espaces de $C^0([0,1])$, fermés et inclus dans $C^1([0,1])$.

On considère dans l'espace de Banach $E := C^0([0,1], \mathbb{R})$, un sous-espace vectoriel fermé F tel que toute fonction de F soit de classe C^1.

1. Montrer que l'application $T : f \mapsto f'$ de F dans E est continue.

2. Montrer que la boule unité de F est équicontinue.

3. En déduire que F est de dimension finie.

5. Théorème de Banach-Steinhaus (et applications)

1. Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de E dans F. On suppose que:

$$\forall x \in E, \quad \sup_{i\in I} \|T_i x\| < +\infty.$$

Démontrer que $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$. C'est le théorème de Banach-Steinhaus.

2. *“Contraposée”.* Supposons (avec les mêmes notations) que $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} = +\infty$. Montrer alors qu'il existe un G_δ dense noté G, tel que:

$$\forall x \in G, \qquad \sup_{i\in I} \|T_i x\| = +\infty.$$

3. *Application.* Soit E un espace de Banach; on note E' son dual topologique. On dit qu'une suite (x_n) de E converge faiblement vers $x \in E$ si pour toute forme linéaire $\varphi \in E'$,

$$\langle \varphi, x_n \rangle \to \langle \varphi, x \rangle.$$

(Il s'agit de la convergence associée à la topologie faible, i.e. la topologie initiale associée aux formes linéaires continues, i.e. la topologie la moins fine sur E rendant continues les formes linéaires de E'.) Montrer que si une suite converge faiblement, alors elle est bornée.

4. *Application.* Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de E dans F. On suppose que pour tout $x \in E$, $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer alors que:

- $\sup_n \|T_n\| < +\infty$,
- T est une application linéaire continue de E dans F,
- $\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|$.

5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et A une partie de E telle que $\phi(A)$ soit une partie bornée de $\mathbb{R}$ pour toute forme linéaire continue $\phi : E \to \mathbb{R}$. Montrer que A est une partie bornée de E : il existe une constante C telle que $\|x\| \leq C$ pour tout $x \in A$.

6. *Application.* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum a_n b_n < +\infty$ pour toute suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum b_n^2 < +\infty$. Montrer que $\sum a_n^2 < +\infty$.

6. Formes bilinéaires continues sur un produit de deux espaces de Banach

Soient E et F deux espaces dont l'un est de Banach, et $B : E \times F \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire *séparément* continue, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$ fixé, l'application $y \mapsto B(x,y)$ est continue sur F, et que pour tout $y \in F$ fixé, l'application $x \mapsto B(x,y)$ est continue sur E. Montrer que B est continue.

7. Divergence des séries de Fourier des fonctions continues.

On note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodiques. On munit cet espace vectoriel de la norme uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n l'opérateur linéaire de $C_{2\pi}$ dans l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$ qui associe à chaque fonction f sa série de Fourier d'ordre n :

$$S_n(f) : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt}.$$

1. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{f\in C_{2\pi}} \frac{|S_n(f)(t_0)|}{\|f\|_\infty} \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt,$$

où $D_n : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ est le noyau de Dirichlet d'ordre n.

2. En déduire qu'il existe un sous-ensemble dense D de $C_{2\pi}$ tel que, pour tout f dans D, la série de Fourier de f ne converge pas uniformément vers une fonction continue.

8. Applications linéaires continues surjectives

Soit E, F des espaces de Banach. Montrer que l'ensemble des surjections linéaires $Surj(E, F)$ des applications linéaires continues *surjectives* de E sur F est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E, F)$, l'espace des applications linéaires continues.

9. Un ensemble gras, mais négligeable

Dans $\mathbb{R}$, construire un G_δ-dense de mesure nulle.

10. Théorème de Schur.

On notera un élément $x \in \ell^1$ sous la forme $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ c'est à dire comme une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\ell^1)^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ℓ^1. On va montrer qu'il y a équivalence entre

i) $\|x_p\| \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ii) Pour tout $\psi \in \ell^\infty = (\ell^1)'$, $\psi(x_p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Autrement dit, il y a équivalence entre la convergence forte et la convergence faible des suites dans ℓ^1.

1. Montrer que $i) \Rightarrow ii)$.

2. Montrer que $ii)$ implique que pour tout n, $x_p(n) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Conclure (on pourra considérer le sous-ensemble $\Gamma := [-1, 1]^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie *produit*).

11. Il n'existe pas de partition dénombrable non-triviale de $[0, 1]$ en fermés

On considère une collection dénombrables $\{F_n\}_{n\geq 0}$ de fermés deux à deux disjoints de $[0, 1]$, dont l'union est égale à $[0, 1]$ tout entier.

Soit $O := \bigcup_{n\geq 0} \operatorname{int}(F_n)$ et $G := [0, 1] \setminus O = \bigcup_{n\geq 0} \operatorname{fr}(F_n)$. Montrer que G est un fermé d'intérieur vide. Montrer que chaque composante connexe de l'ouvert O est contenue dans l'un des F_n. Si G est non-vide, montrer qu'il existe un intervalle ouvert $]a, b[\subset [0, 1]$ tel que $G \cap]a, b[$ est non-vide et contenu dans l'un des F_n. En déduire que G est vide. Conclure.