TD1 : Langage des catégories et rappels de topologie

Exercice 1. Le foncteur groupe linéaire

Soit k un corps et $n \geq 1$ un entier naturel. On désignera par k-alg la catégorie des k-algèbres associatives, commutatives et unifères. Soit $\mathrm{GL}_n : k-\mathrm{alg} \to \mathrm{Grp}$ le foncteur qui associe à une k-algèbre T, le groupe $\mathrm{GL}_n(T)$ des matrices inversibles de taille n à coefficients dans T.

1. Montrer que le déterminant définit une transformation naturelle de GL_n vers GL_1.
2. Montrer qu'il existe une unique k-algèbre A, à isomorphisme unique près de k-algèbres, et deux transformations naturelles $\psi : h_A \to \mathrm{GL}_n$, $\phi : \mathrm{GL}_n \to h_A$ telles que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{GL}_n}$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{h_A}$. Le foncteur h_A est défini par : $h_A(T) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(A, T)$ pour toute k-algèbre T.
   On $k[\mathrm{GL}_n]$ l'algèbre précédente.
3. Montrer que le déterminant provient d'un morphisme de k-algèbres $f : k[\mathrm{GL}_1] \to k[\mathrm{GL}_n]$.

Exercice 2. Monomorphismes et épimorphismes

Soit C une catégorie et soit $f : X \to Y$ un morphisme entre objets de C. On dit que f est un monomorphisme (resp. épimorphisme) si pour tout objet Z de C, la flèche naturelle $\mathrm{Hom}_C(Z, X) \to \mathrm{Hom}_C(Z, Y)$ est injective (resp. la flèche naturelle $\mathrm{Hom}_C(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_C(X, Z)$ est injective).

1. Montrer qu'un morphisme injectif (resp. surjectif) dans les catégories Ens, Grp, Ann et k-ev (où k est un corps fixé) est un monomorphisme (resp. épimorphisme).
2. Montrer qu'un monomorphisme dans les catégories Ens, Grp, Ann et k-ev est un morphisme injectif.
3. Montrer qu'un épimorphisme dans les catégories Ens, Grp et k-ev est un morphisme surjectif.
4. Donner un exemple d'épimorphisme d'anneaux non surjectif.

Exercice 3. Bijections continues

Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une bijection continue.

1. Montrer que f est un monomorphisme et un épimorphisme dans la catégorie des espaces topologiques. Est ce que f est nécessairement un homéomorphisme ?
2. Montrer que si X est quasi-compact et Y est séparé alors f est un homéomorphisme.

Exercice 4. Compactification d'Alexandrov

Soit X un espace topologique localement compact et $\{\infty\}$ un singleton. On munit $\widetilde{X} = X \sqcup \{\infty\}$ de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de X et les complémentaires dans $\widetilde{X}$ des compacts de X.

1. Vérifier que $\widetilde{X}$ est bien un espace topologique.
2. Montrer que $\widetilde{X}$ est un espace compact. Montrer que le sous-ensemble $\widetilde{X} \setminus \{\infty\}$, muni de la topologie induite, est homéomorphe à l'espace X de départ.
3. Montrer que la topologie définie sur $\widetilde{X}$ est l'unique topologie telle que :
   (a) $\widetilde{X}$ soit compact,
   (b) l'application identité $X \to \widetilde{X} \setminus \{\infty\}$ soit un homéomorphisme.
4. Montrer que $\widetilde{\mathbb{R}^n}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$, la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.fr, ou venir me voir au bureau T2.

Exercice 5. Espaces projectifs

Soit K un corps (on supposera ici que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'espace $\mathbb{P}^n(K)$ est défini comme étant le quotient de $K^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action du groupe multiplicatif K^* agissant par homothéties. Pour tout $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[x_0 : \ldots : x_n]$ son image dans $\mathbb{P}^n(K)$.

1. (a) Le sous-groupe $\{\pm 1\}$ de $\mathbb{R}^*$ agit sur $\mathbb{S}^n$ par multiplication. Montrer que le quotient $\mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$ est homéomorphe à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
   (b) Le sous-groupe $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes de module 1 agit sur $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par multiplication. Montrer que le quotient $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ est homéomorphe à $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ et que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.
3. (a) Pour $n \geq 1$, montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} K^n & \to & \mathbb{P}^n(K) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & [1 : x_1 : \ldots : x_n] \end{array}$$

   définit un homéomorphisme entre K^n et un ouvert U_0 de $\mathbb{P}^n(K)$ que l'on explicitera.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}^n(K)$ admet un recouvrement par $n+1$ ouverts homéomorphes à K^n et que le complémentaire de chacun de ces ouverts est homéomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(K)$.

Exercice 6. Tore

On définit le tore comme l'espace topologique $\mathbb{T}$ quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x,0) \sim (x,1)$ et $(0,y) \sim (1,y)$ pour tous $x, y \in [0,1]$.

Montrer que $\mathbb{T}$ est homéomorphe aux espaces suivants :

(a) le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$,

(b) le quotient de $\mathbb{R}^2$ sous l'action du groupe discret $\mathbb{Z}^2$ agissant par translations (de vecteurs non tous colinéaires),

(c) le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ qui sont image d'un point du cercle du plan $\{y = 0\}$ de centre $(2,0,0)$ et de rayon 1 par une rotation d'axe (Oz)).

Exercice 7. Écrasements et quotients

Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-ensemble. On note X/A l'espace quotient de X par la relation

$$x \sim y \quad \text{si et seulement si} \quad x, y \in A \;\text{ ou }\; x = y.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\bar{D}^n$ le disque unité fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\bar{D}^n/\partial\bar{D}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.
2. On suppose que X est séparé et que A est compact. Montrer que X/A est séparé.
3. Trouver un espace topologique séparé X et un sous-espace A de X tel que X/A soit non séparé.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agit par conjugaison sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, l'espace des matrices de taille n . Montrer que le quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\backslash\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas séparé.
5. Étant donnée une relation d'équivalence $\mathcal{R} \subseteq X \times X$, montrer que le quotient $X/\mathcal{R}$ muni de la topologie quotient, satisfait la propriété universelle suivante : toute application continue $f : X \to Y$ qui est constante sur les classes d'équivalence, se factorise uniquement en une application $X/\mathcal{R} \to Y$.

Exercice 8. Bouquets d'espaces

Pour $(X_i, x_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés, on note $\vee_{i \in I} X_i$ l'espace, appelé bouquet des X_i, obtenu à partir de l'union disjointe des X_i en identifiant tous les points x_i.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut voir $\mathbb{S}^{n-1}$ comme sous-espace de $\mathbb{S}^n$ (son « équateur ») par l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0)$. Montrer que $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ est un bouquet de deux sphères de dimension n.
2. La *boucle d'oreille hawaïenne* est le sous-ensemble $H \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des cercles de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$, pour les entiers $n \geq 1$. Soit $(\mathbb{S}^1_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de copies de $\mathbb{S}^1$ (avec un point distingué). Montrer que $\vee_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{S}^1_i$ n'est pas homéomorphe à H.