# TD10 : Homologie cellulaire

### Exercice 1. CW-complexes

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\mathbb{S}^n$ admet une décomposition cellulaire avec deux cellules. Munir $\mathbb{S}^n$ également d'une structure de CW-complexe dont le $k$-squelette est homéomorphe à $\mathbb{S}^k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
2. Donner une décomposition cellulaire des espaces topologiques suivants : $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $\mathbb{R}$ et du tore.
3. Soit $X$ un CW-complexe, et soit $k \geq 0$ un entier. Montrer que le $k$-squelette $X_k$ de $X$ est un sous-complexe de $X$.
4. Soit $X$ un CW-complexe. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, l'espace quotient $X_k/X_{k-1}$ est soit réduit à un point, soit homéomorphe à un bouquet de sphères de dimension $k$.
5. Montrer qu'un CW-complexe est compact si et seulement s'il admet un nombre fini de cellules.
6. Montrer qu'un CW-complexe est connexe par arcs si et seulement si son 1-squelette l'est.

N.B : CW=**C**losure-finite **W**eak toplogy.

### Exercice 2. Espaces projectifs

Calculer l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des espaces suivants :

1. L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $n \geq 0$.
2. L'espace $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}) = \cup_{n\geq 0}\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, muni de la topologie telle que $\mathcal{U}$ soit un ouvert de $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ si et seulement si l'intersection $\mathcal{U} \cap \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ pour tout $n \geq 0$ (c'est la topologie de limite inductive).
3. L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, pour $n \geq 0$.

### Exercice 3. Surfaces classiques

En utilisant la décomposition cellulaire, calculer l'homologie de :

1. L'unique (à homéomorphisme près) surface orientable $S_g$ de genre $g$.
2. L'unique (à homéomorphisme près) surface non-orientable $S'_g$ de genre $g \geq 1$ obtenue comme un polygone à $2g$ côtés $a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g$ avec les identifications $a_i = b_i$.

### Exercice 4. Points antipodaux

Calculer l'homologie des espaces suivants :

1. Le quotient de $\mathbb{S}^2$ obtenu en identifiant les points antipodaux de son équateur.
2. Le quotient de $\mathbb{S}^3$ obtenu en identifiant les points antipodaux de son équateur $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$.

### Exercice 5. Espaces de Moore

Étant donnés un groupe abélien $G$ et un entier $n \geq 1$, on appelle *espace de Moore* pour $(G, n)$ un CW-complexe $X$ tel que $H_n(X, \mathbb{Z}) \simeq G$ et $\tilde{H}_i(X) = 0$ pour $i \neq n$.

1. Construire un espace de Moore pour $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $n$ quelconque.
2. Construire un espace de Moore pour $G$ abélien de type fini et $n$ quelconque.
3. Construire un espace de Moore pour $G$ et $n$ quelconques.
4. Soient $(G_i)_{i\geq 1}$ des groupes abéliens. Construire un espace topologique connexe par arcs $X$ tel que $H_i(X, \mathbb{Z}) = G_i$ pour tout $i \geq 1$.

---

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T2.

**Exercice 6. Homologie avec coefficients**

Soit $G$ un groupe abélien.

1. Calculer les groupes d'homologie à coefficients dans $G$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
2. Calculer les groupes d'homologie à coefficients dans $G$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
3. Trouver deux espaces qui ont même homologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$ mais pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
4. Trouver deux espaces qui ont même homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

**Exercice 7. Caractéristique d'Euler**

Soit $X$ un CW-complexe fini. Pour tout $k \geq 0$, on note $c_k$ le nombre de $k$-cellules de $X$. La *caractéristique d'Euler* de $X$ est l'entier

$$\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i.$$

1. Soit $F$ un corps. Montrer que $\chi(X)$ peut également être calculée par la formule
$$\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_F H_i(X, F).$$
2. Calculer la caractéristique d'Euler des surfaces $S_g$ et $S'_g$ pour tout $g \geq 0$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les entiers $g$ et $h$ pour qu'il existe un revêtement de $S_g$ par $S_h$.
4. On suppose que le CW-complexe fini $X$ s'écrit comme l'union de deux sous-complexes $A$ et $B$. Montrer que
$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$
5. Soient $X$ et $Y$ des CW-complexes finis. Expliquer comment $X \times Y$ peut être muni d'une structure de CW-complexe fini, et montrer que $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

**Exercice 8. Homologie cellulaire d'un produit**

Calculer l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ pour $m, n \geq 1$.

**Exercice 9. Complexes simpliciaux**

Soient $n \geq 1$ et $p \geq 0$ des entiers. On dit que les points $x_0, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^n$ sont *affinement indépendants* si $x_1 - x_0, \ldots, x_p - x_0$ sont linéairement indépendants. Un *$p$-simplexe* de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de $p+1$ points $x_0, \ldots, x_p$ affinement indépendants de $\mathbb{R}^n$, appelés *sommets* du simplexe. On appelle *face* du $p$-simplexe l'enveloppe convexe de n'importe quel sous-ensemble non vide de l'ensemble des sommets du simplexe. On appelle *complexe simplicial* (respectivement, complexe simplicial fini) dans $\mathbb{R}^n$ un ensemble (respectivement, ensemble fini) $K$ de simplexes de $\mathbb{R}^n$ tel que

- toute face d'un élément de $K$ soit encore dans $K$ ;
- l'intersection de deux éléments quelconques $\sigma, \sigma' \in K$ soit ou bien vide, ou bien une face commune à $\sigma$ et $\sigma'$.
- (locale finitude) chaque point de $\mathbb{R}^n$ a un voisinage n'intersectant qu'un nombre fini de simplexes de $K$.

On note $|K|$ la réunion de tous les simplexes d'un complexe simplicial $K$.

1. Dessiner un 0-simplexe, un 1-simplexe, un 2-simplexe, un 3-simplexe.
2. Montrer que l'ensemble des faces d'un simplexe de $\mathbb{R}^n$ est un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^n$.
3. Soit $K$ un complexe simplicial fini dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble des intérieurs relatifs des simplexes de $K$ fournit une décomposition cellulaire de $|K|$.