TD11 : Cohomologie

Exercice 1. Vers le théorème des coefficients universels

Soit X un espace topologique. Étant donné un groupe abélien G, les groupes de cohomologie $H^*(X,G)$ sont définis à partir du complexe de cochaînes $C^*(X,G) = \mathrm{Hom}(C_*(X,\mathbb{Z}),G)$. Il est naturel de se demander à quel point les groupes $H^*(X,G)$ diffèrent des groupes $\mathrm{Hom}(H_*(X,\mathbb{Z}),G)$. Montrer les résultats suivants :

1. Pour tout G et tout $n \geq 0$, on a un morphisme surjectif $H^n(X,G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X,\mathbb{Z}),G)$.
2. Ce morphisme est un isomorphisme pour $n = 0$ et $n = 1$.
3. Ce morphisme est un isomorphisme dans le cas où G est un corps de caractéristique nulle.

Exercice 2. Cup-produit sur les complexes de chaînes

Soit X un espace topologique, R un anneau commutatif et $p,q \geq 0$ des entiers naturels. On note $(C^*(X,R),\delta)$ le complexe de cochaînes singulières à coefficients dans R. Soient $a \in C^p(X,R)$, $b \in C^q(X,R)$ et σ un $(p+q)$-simplexe singulier de X. On pose

$$(a \smile b)(\sigma) = a(\sigma \circ \Delta_{(e_0,\cdots,e_p)})b(\sigma \circ \Delta_{(e_p,\cdots,e_{p+q})}).$$

Montrer que l'opération $\smile$ est bilinéaire et satisfait les propriétés suivantes :

1. (Compatibilité avec le cobord) Pour tout $p \geq 0$ et $(a,b) \in C^p(X) \times C^q(X)$,
$$\delta(a \smile b) = \delta a \smile b + (-1)^p a \smile \delta b.$$
2. (Associativité) Pour tout $p,q,r \geq 0$ et $(a,b,c) \in C^p(X) \times C^q(X) \times C^r(X)$,
$$a \smile (b \smile c) = (a \smile b) \smile c.$$
3. (Fonctorialité)
   (a) Soit Y un espace topologique, $g : X \to Y$ une application continue, et $g^\sharp : C^*(Y) \to C^*(X)$ le morphisme de complexes induit. Alors, pour tout $(a,b) \in C^p(Y) \times C^q(Y)$, on a
   $$g^\sharp(a) \smile g^\sharp(b) = g^\sharp(a \smile b).$$
   (b) Si $h : R \to R'$ est un morphisme d'anneaux, alors, pour tout $(a,b) \in C^p(X) \times C^q(X)$, on a
   $$h \circ (a \smile b) = (h \circ a) \smile (h \circ b).$$
4. Vérifier que $\smile$ définit une application bilinéaire
$$H^p(X,R) \times H^q(X,R) \to H^{p+q}(X,R)$$
qui coïncide avec celle donnée dans le cours quand R est un corps.

Exercice 3. Anti-commutativité du cup-produit

Soit X un espace topologique. Le but de cet exercice est de donner une preuve différente de l'identité

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{pq}\beta \smile \alpha$$

pour tout $\alpha \in H^p(X,R)$ et $\beta \in H^q(X,R)$.

Pour tout n-simplexe singulier σ, on note $\bar{\sigma}$ le simplexe inversé $\sigma \circ \omega$, où $\omega : \Delta^n \to \Delta^n$ est l'application affine qui envoie tout sommet e_i du n-simplexe standard Δ^n sur e_{n-i}. Pour tout $n \geq 0$, on définit un morphisme $\rho_n : C_n(X) \to C_n(X)$ en posant $\rho(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\bar{\sigma}$

1. Montrer que les morphismes ρ_n forment un morphisme de complexes $\rho_* : (C_*,\partial) \to (C_*,\partial)$.
2. Montrer que ce morphisme de complexes est homotope à l'identité.
3. Conclure.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T2.

Exercice 4. Cap-produit

Soit X un espace topologique et G un groupe abélien. Soient $k \geq \ell \geq 0$ des entiers, σ un k-simplexe singulier et $c \in C^\ell(X, G)$. On définit le *cap-produit* par la formule :

$$(\sigma \frown c) = c(\sigma \circ \Delta_{(e_0, \cdots, e_\ell)})\sigma \circ \Delta_{(e_\ell, \cdots, e_k)}.$$

Montrer que, pour tout k-simplexe singulier σ de X et pour toute ℓ-cochaîne singulière $c \in C^\ell(X, G)$, on a

$$\partial(\sigma \frown c) = (-1)^\ell(\partial\sigma \frown c - \sigma \frown \delta c).$$