

TD2 : Homotopie

Exercice 1. Généralités

On fixe X et Y deux espaces topologiques.

1. On suppose que X est connexe par arcs. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. Montrer que si f et g sont homotopes, alors leurs images sont dans la même composante connexe par arcs de Y .
2. On suppose que Y est contractile. Montrer que deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ sont toujours homotopes.
3. Montrer que si deux applications continues $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sont telles que pour tout $x \in X$ on ait $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ (en norme euclidienne), alors f et g sont homotopes.
4. Soient p et q deux polynômes à coefficients complexes de même degré. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $R > r$, les applications continues

$$\{z \in \mathbb{C}, |z| = R\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

données par $z \mapsto p(z)$ et $z \mapsto q(z)$ soient homotopes.

5. Soit $n \geq 1$. Montrer que toute application continue non-surjective $X \rightarrow \mathbb{S}^n$ est homotope à une application constante.
6. Soit $n \geq 1$. Montrer que si deux applications continues $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ sont telles que pour tout $x \in X$ on ait $|f(x) - g(x)| < 2$, alors f et g sont homotopes. En déduire qu'une application continue sans point fixe $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ est homotope à l'application $x \mapsto -x$.

Exercice 2. Équivalences d'homotopie

1. Le *ruban de Möbius* est l'espace topologique M , quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$. Dessiner M . Montrer que M a le même type d'homotopie que \mathbb{S}^1 .
2. Si X et X' , resp. Y et Y' , sont des espaces topologiques homotopiquement équivalents, montrer que les produits $X \times Y$ et $X' \times Y'$ ont même type d'homotopie.
3. Soit C un espace contractile et soit X un espace topologique. Montrer que $X \times C$ a le même type d'homotopie que X .

Exercice 3. Type d'homotopie d'un complémentaire

1. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension k de \mathbb{R}^n , avec $k < n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus E$ a le même type d'homotopie que \mathbb{S}^{n-k-1} .
2. Soit C un sous-ensemble convexe borné de \mathbb{R}^n . Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus C$ a le même type d'homotopie que \mathbb{S}^{n-1} .
3. Soit X un espace topologique, et soient A et B deux sous-espaces de X , non-vides et distincts de X . Montrer que l'on peut avoir A et B homotopiquement équivalents, sans que $X \setminus A$ et $X \setminus B$ soient homotopiquement équivalents.
4. Montrer que le tore privé d'un point a le type d'homotopie d'un bouquet de deux cercles.

Exercice 4. Homotopies et cônes

Le cône CX d'un espace topologique X est l'espace quotient obtenu en écrasant le sous-espace $X \times \{0\}$ de $X \times [0, 1]$. Soit $q : X \times [0, 1] \rightarrow CX$ l'application quotient. On note ι_X l'application

$$\iota_X : \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & CX \\ x & \mapsto & q(x, 1) \end{array}$$

1. Montrer que pour tout espace X , le cône CX est contractile.
2. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Montrer que f est homotope à une application constante si et seulement s'il existe une application continue $F : CX \rightarrow Y$ telle que $F \circ \iota_X = f$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le cône $C\mathbb{S}^n$ est homéomorphe à la boule unité fermée \mathbb{D}^{n+1} .
4. Soient X et Y des espaces topologiques, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Le cône de f , noté C_f , est l'espace topologique obtenu en recollant CX avec Y le long de f : plus précisément, c'est l'espace quotient de l'union disjointe $CX \cup Y$ par la relation $\iota_X(x) \sim f(x)$ pour tout $x \in X$.
 - (a) Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications homotopes. Montrer que C_f et C_g ont le même type d'homotopie.

Exercice 5. Composantes connexes par arcs des espaces fonctionnels

Soient X et Y des espaces topologiques avec X localement compact. On note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y , muni de la topologie compacte-ouverte. Montrer que deux fonctions f, g sont dans la même composante connexe par arcs de l'espace $\mathcal{C}(X, Y)$ si, et seulement si elles sont homotopes.

Exercice 6. Lacets remplissant la sphère

Soit X un espace topologique. Un *chemin* sur X est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Un *lacet* sur X est un chemin γ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

1. Soit $n \geq 1$ et soit γ un lacet sur la sphère \mathbb{S}^n dont l'image ne soit pas toute la sphère. Montrer que γ est homotope à un lacet constant.
2. Soit $n \geq 1$. On admet le fait qu'il existe des lacets dont l'image soit égale à toute la sphère \mathbb{S}^n . En existe-t-il qui soient de plus homotopes à un lacet constant ?
3. Soit $n \geq 2$. Soit γ un chemin sur \mathbb{S}^n . Montrer qu'il existe une subdivision

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 1$$

(pour $k \geq 1$) de $[0, 1]$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, la restriction $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ soit homotope, relativement aux extrémités a_i et a_{i+1} , à un chemin d'image nulle part dense dans la sphère \mathbb{S}^n .

4. Soit $n \geq 2$. Montrer que tout lacet sur \mathbb{S}^n est homotope à un lacet qui ne remplit pas toute la sphère. En déduire que tout lacet sur \mathbb{S}^n est homotope à un lacet constant. Cette propriété est-elle toujours vraie pour $n = 1$?

Exercice 7. Décomposition de \mathbb{S}^3 en tores pleins

Un *tore plein* est un espace homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ où \mathbb{D}^2 est le disque unité fermé dans \mathbb{R}^2 . Dans cet exercice, on montre que \mathbb{S}^3 est la réunion de deux tores pleins collés le long de leur bord, et on utilise ce fait pour déterminer le type d'homotopie du complémentaire de deux cercles simplement enlacés dans \mathbb{S}^3 .

1. On considère les deux parties A et B de \mathbb{S}^3 définies par :

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3, x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2}\} \quad , \quad B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3, x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2}\}.$$

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : A &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\rightarrow \left(\frac{(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \sqrt{2}x_3, \sqrt{2}x_4 \right) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. Construire de même un homéomorphisme $\psi : B \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$, et montrer que $A \cap B$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

2. Soit $C = \phi^{-1}(\mathbb{S}^1 \times \{0\})$ et $C' = \psi^{-1}(\mathbb{S}^1 \times \{0\})$. Montrer que $\mathbb{S}^3 \setminus (C \cup C')$ a le type d'homotopie du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.