TD4 : Généralités sur les revêtements

Exercice 1. Quelques propriétés

Soit $p : E \to B$ un revêtement.

1. On suppose que B est connexe et localement connexe. Montrer que pour toute composante connexe C de E, la restriction $p_{|C} : C \to B$ est un revêtement.
2. Soit $p : E \to B$ un revêtement à fibres finies. Montrer que pour tout revêtement $q : X \to E$, l'application $p \circ q$ est un revêtement.
3. On suppose que E est connexe par arcs et que p n'est pas un homéomorphisme. Montrer que B n'est pas simplement connexe.
4. On suppose que p est un revêtement à deux feuillets. Montrer qu'il admet un automorphisme non-trivial, i.e., il existe un homéomorphisme $f : E \to E$ différent de l'identité, tel que $p \circ f = p$. Donner un exemple de revêtement à trois feuillets qui n'admet pas d'automorphisme non-trivial.

Exercice 2. Homéomorphismes locaux

1. Donner un exemple d'un homéomorphisme local surjectif qui ne soit pas un revêtement.
2. Donner un exemple d'un homéomorphisme local surjectif qui ne satisfait pas la propriété de relèvement des chemins.
3. Soit $p : E \to B$ un homéomorphisme local avec E séparé.
   (a) On suppose que toutes les fibres de p sont finies de même cardinal non-nul. Montrer que p est un revêtement. Est-ce toujours vrai si les fibres ne sont plus supposées de cardinal fini ?
   (b) On suppose que B est connexe et que p est propre, c'est-à-dire qu'elle est fermée et que l'image réciproque de tout singleton est compacte. Montrer que p est un revêtement.
4. Soit P un polynôme complexe de degré $n > 0$. Soit $Z \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des racines du polynôme dérivé P', et $A = P(Z) \subset \mathbb{C}$. Montrer que l'application $P_{|\mathbb{C} \smallsetminus P^{-1}(A)} : \mathbb{C} \setminus P^{-1}(A) \to \mathbb{C} \setminus A$ est un revêtement à n feuillets.

Exercice 3. Exemples de revêtements

1. Montrer que l'application quotient $\mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un revêtement. Combien a-t-il de feuillets ?
2. Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ l'application exponentielle $x \mapsto e^{2i\pi x}$. A quelle condition sur A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ la restriction $p_{|A} : A \to \mathbb{S}^1$ est-elle un revêtement ?
3. Dessiner tous les revêtements à 2 feuillets du bouquet de deux cercles.
4. Construire un revêtement du ruban de Möbius par un cylindre. En existe-t-il un avec un nombre impair de feuillets ?
5. Construire un revêtement non-trivial du ruban de Möbius par lui-même. En existe-t-il un avec un nombre pair de feuillets ?
6. La bouteille de Klein K est l'espace topologique obtenu comme quotient de $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, y)$. Construire un revêtement de la bouteille de Klein par $\mathbb{R}^2$, puis par le tore.
7. Donner un revêtement non-trivial du groupe unitaire $U(n)$.
8. Donner un revêtement non-trivial de l'espace topologique X obtenu comme réunion de la sphère $\mathbb{S}^2$ avec l'un de ses diamètres.

Exercice 4. Produit de revêtements

Soient $p : E \to B$ et $p : E' \to B'$ des revêtements. Montrer que $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ est un revêtement. Un produit infini de revêtements est-il toujours un revêtement ?

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T2.

Exercice 5. Tiré en arrière d'un revêtement

Soit $p : E \to B$ un revêtement, et $f : X \to B$ une application continue. On note $f^*(X)$ le sous-espace topologique de $X \times E$ défini par $f^*(X) = \{(x,e) \in X \times E,\ f(x) = p(e)\}$, appelé le *produit fibré* de X et E au-dessus de B. Montrer que l'application

$$f^*(p) : \begin{array}{ccc} f^*(X) & \to & X \\ (x,e) & \mapsto & x \end{array}$$

est un revêtement.

Exercice 6. Actions de groupes

Soit X un espace topologique localement compact sur lequel un groupe discret G agit continûment. On fait les deux hypothèses suivantes :

(i) L'action de G est libre, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$, on a $g \cdot x = x$ si et seulement si $g = e$.

(ii) L'action de G est propre, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble

$$\{g \in G,\ K \cap gK \neq \emptyset\}$$

est fini.

Montrer alors que l'application quotient $p : E \to E/G$ est un revêtement, et que E/G est séparé.

Exercice 7. Revêtement à nombre infini de feuillets

Soit X un espace topologique qui s'écrit comme union de deux ouverts connexes U et V. Montrer que si l'intersection $U \cap V$ n'est pas connexe, alors X admet un revêtement connexe avec un nombre infini de feuillets.