TD5 : Revêtements et groupe fondamental

Exercice 1. Échauffement

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour $n \neq 2$.
2. Soit X un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs de groupe fondamental fini. Montrer que toute application continue $X \to \mathbb{S}^1$ est homotope à une application constante.

Exercice 2. Classification complète

Décrire, à isomorphisme près et en précisant le nombre de feuillets, tous les revêtements connexes

(a) de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$.

(b) du tore.

(c) du ruban de Möbius.

Exercice 3. Graphes et groupes libres

On appelle *graphe fini* un CW-complexe fini de dimension 1. Autrement dit, un graphe fini est la donnée d'un ensemble fini de sommets S, et d'un ensemble fini d'arêtes A, tels que l'intersection de chaque arête avec l'ensemble S soit exactement l'ensemble des extrémités de cette arête.

1. Montrer que tout revêtement à fibres finies d'un graphe fini est encore un graphe fini.
2. On appelle caractéristique d'Euler d'un graphe fini connexe X l'entier $\chi(X) = \#S - \#A$. Montrer que le graphe X est homotope au bouquet de $1 - \chi(X)$ cercles.
3. Soit L un groupe libre à $n \geq 1$ générateurs, et H un sous-groupe d'indice k de L. Montrer que H est un groupe libre, dont on donnera le nombre de générateurs.
4. Soit $n \geq 3$. Montrer que le groupe libre à 2 générateurs admet un sous-groupe isomorphe au groupe libre à n générateurs. Donner des générateurs d'un tel sous-groupe pour $n = 3$.

Exercice 4. Groupe fondamental de la bouteille de Klein

1. Montrer que la bouteille de Klein est homéomorphe à la réunion de deux rubans de Möbius collés le long de leur bord (c'est-à-dire au quotient de $M_1 \sqcup M_2$ par l'identification $x = \Phi(x)$, où Φ est l'application identité de ∂M_1 dans ∂M_2).
2. Montrer que le groupe fondamental de K est le quotient du groupe libre à deux générateurs a et b par la relation $a^2 = b^2$.
3. En déduire que la bouteille de Klein n'a pas le même type d'homotopie que le tore.
4. Montrer que K est homéomorphe au quotient de $\mathbb{R}^2$ par le groupe engendré par $\sigma : (x, y) \mapsto (x+1, y)$ et $s : (x, y) \mapsto (-x, y+1)$. En déduire une présentation du groupe engendré par σ et s.

Exercice 5. Groupe fondamental d'une variété épointée

Soit V une variété topologique de dimension $n \geq 3$. Soit X un ensemble fini de points de V. Montrer que l'inclusion $V \backslash X \hookrightarrow V$ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux.

Exercice 6. Quelques exemples de calculs de groupes fondamentaux

1. Soit X un espace topologique et SX sa suspension (le quotient de $X \times [0, 1]$ obtenu en écrasant $X \times \{0\}$ d'une part et $X \times \{1\}$ d'autre part). Si X est connexe par arcs, montrer que SX est simplement connexe. Donner un contre-exemple si X n'est pas connexe par arcs.
2. Calculer le groupe fondamental de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ pour tout $n \geq 0$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T2.

Exercice 7. Bouquet de deux plans projectifs

1. Déterminer le groupe fondamental du bouquet de deux plans projectifs $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, et en donner un revêtement universel.
2. Décrire, à isomorphisme près, tous les revêtements connexes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Bouquets de cercles

Soit $k \geq 1$ un entier.

1. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements connexes à 2 feuillets du bouquet de k cercles ?
2. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements galoisiens à 3 feuillets du bouquet de k cercles ?
3. Combien y a-t-il de classes d'isomorphisme de revêtements à 3 feuillets du bouquet de 2 cercles ? Les dessiner.

Exercice 9. Complémentaire de deux espaces affines

Soit n un nombre entier strictement positif, et soient A_1 et A_2 deux sous-espaces affines de codimension ≥ 2 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Quel est le groupe fondamental du complémentaire de $A_1 \cup A_2$ dans $\mathbb{R}^n$ (on discutera suivant les codimensions de A_1 et A_2) ?

Exercice 10. Espaces topologiques finis

1. Montrer que tout espace topologique fini et connexe par arcs de cardinal 2 ou 3 est simplement connexe.
2. On considère l'espace topologique X de cardinal 4 donné par l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ avec pour base d'ouverts
$$\{\{a\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}\,.$$
Montrer que X n'est pas simplement connexe en en construisant un revêtement non-trivial. Déterminer le groupe fondamental de X, et tous les espaces topologiques connexes par arcs qui revêtent X.
3. Construire un espace topologique fini connexe par arcs dont le groupe fondamental ne soit pas abélien.

Exercice 11. Espaces topologiques à groupe fondamental donné

Soit G un groupe de présentation finie. Construire un espace topologique dont le groupe fondamental est isomorphe à G.

Exercice 12. Pour aller plus loin

1. Calculez le groupe fondamental du cercle à deux origines, et (plus dur) de la droite à deux origines.
2. Calculez le groupe fondamental d'un bouquet d'un ensemble quelconque de copies de $\mathbb{S}^1$.