TD5 : Compléments et groupes d'homotopie supérieure

Exercice 1. Le groupe fondamental

Calculer le groupe fondamental du complémentaire de la réunion de deux droites dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Sphéroïdes

Soit (X, x_0) un espace topologique pointé, et soit $k \geq 1$ un nombre entier. Soit $s_0 \in \mathbb{S}^k$ un point de la sphère $\mathbb{S}^k$.

1. Décrire l'opération de groupe sur $\pi_k(X, x_0)$ en termes des applications $(\mathbb{S}^k, s_0) \to (X, x_0)$.
2. Si $k \geq 2$, montrer que le groupe $\pi_k(X, x_0)$ est abélien.

Exercice 3. Point base et groupe d'homotopie d'un produit

1. On suppose que X est connexe par arcs. Soient x_0 et x_1 des points de X. Montrer que les groupes $\pi_k(X, x_0)$ et $\pi_k(X, x_1)$ sont isomorphes.
2. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) des espaces topologiques pointés, et soit $k \geq 1$ un nombre entier. Montrer que

$$\pi_k(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_k(X, x_0) \times \pi_k(Y, y_0).$$

Exercice 4. Groupes d'homotopie des graphes

Soit X un graphe, et soit $x_0 \in X$ un point. Montrer que le groupe $\pi_k(X, x_0)$ est trivial pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice 5. Groupes d'homotopie des surfaces classiques

Calculer les groupes d'homotopie supérieurs ($k \geq 2$) de toutes les surfaces topologiques connexes compactes (sans bord et à bord) à l'exception de la sphère $\mathbb{S}^2$ et du plan projectif réel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. On pourra admettre qu'une surface connexe compacte à bord est homéomorphe à une surface connexe compacte sans bord privée d'un nombre fini de disques ouverts.

Exercice 6. Lemme des cinq

Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
G_1 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & G_4 & \longrightarrow & G_5 \\
\downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\
H_1 & \longrightarrow & H_2 & \longrightarrow & H_3 & \longrightarrow & H_4 & \longrightarrow & H_5
\end{array}$$

où G_i et H_i, $i = 1, \ldots, 5$, sont des groupes, les deux lignes horizontales du diagramme sont des suites exactes, φ_2 et φ_4 sont des isomorphismes, φ_1 est surjectif et φ_5 est injectif. Montrer que φ_3 est un isomorphisme.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.fr, ou venir me voir au bureau T2.